21世纪高等学校数学系列教材

新编线性代数

■ 主　编　连保胜
■ 副主编　王文波　鄂学壮　胡　松　汪祥莉

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

21世纪高等学校数学系列教材

新编线性代数

■ 主　编　连保胜

■ 副主编　王文波　鄂学壮　胡　松　汪祥莉

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

新编线性代数/连保胜主编.—武汉:武汉大学出版社,2016.3
21世纪高等学校数学系列教材
ISBN 978-7-307-17425-2

Ⅰ.新…　Ⅱ.连…　Ⅲ.线性代数—高等学校—教材　Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第321980号

责任编辑:胡　艳　　责任校对:汪欣怡　　版式设计:马　佳

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件:cbs22@whu.edu.cn　网址:www.wdp.com.cn)
印刷:湖北鄂东印务有限公司
开本:787×1092　1/16　印张:8　字数:193千字　插页:1
版次:2016年3月第1版　2016年3月第1次印刷
ISBN 978-7-307-17425-2　定价:19.00元

前　言

新编线性代数的目的,不是试图从严谨的科学角度来重新研究线性代数,而是从一个完全技术的角度重新认识和理解这门课。一个最基本的目的就是试图从最简单的角度让读者感受线性代数最基础的内容和方法,学会用自己的方式去理解和把握线性代数的学习与应用。

本书中有大量我们自己对线性代数最通俗的理解和把握,编写这本书的目的,不是期许读者做多少题目,完成多少练习;恰恰相反,我们希望读者在阅读的过程中,在记忆的基础上,可以充分发挥自己的能力,少做题,甚至不做题,却可以感悟线性代数的本质,这才是我们最深层的愿望。书中我们大胆地打破了线性的板块分割,按照一种内在的联系重新编排了线性代数的一些内容,主要是依据矩阵的四则运算来定位和编排,但为了便于教学,我们在某些方面依然做出了一些分割,希望读者在阅读的过程中,可以自己再加以适当的连接,实现知识系统的网络化。

本书在保持传统教材优点的基础上,对教材内容、教材体系进行了适当的调整和优化,全书以线性方程组为主线,以矩阵为基本研究对象。第一章由线性代数的几个重要概念出发,引出线性相关、线性无关和极大无关组的概念,突出线性相关、线性无关以及极大无关组的重要地位。第二章为行列式的定义及运算,由实例引出,并对行列式算法要义、三大核心技术和算法基本流程等内容展开讨论。第三章为矩阵的概念及运算,从特殊矩阵出发,并对分块矩阵、逆矩阵、初等矩阵等内容展开讨论。第四章对向量组的线性相关性、向量组的秩展开讨论,并通过行秩、列秩给出矩阵秩的定义,为确定方程组的解结构做了一个较好的铺垫。第五章为矩阵特征值和特征向量的计算,由矩阵特征值和特征向量的求解出发,展开讨论了矩阵特征值和特质向量的性质,以及矩阵特征值和特质向量的结构。第六章对二次型以及矩阵的合同进行了讨论。本书的编写参考了众多国内外的优秀教材和资料,结构严谨,逻辑清晰,例题、习题丰富,其中包含了部分研究生入学考试的优秀试题,也适当配置了一些应用性练习题。

本书由连保胜任主编,王文波、鄂学壮和胡松、汪祥莉任副主编,连保胜提出编写思想和编写提纲,并进行统稿和定稿。其中,第一、二、三章由连保胜和王文波编写,第四、五、六章由鄂学壮和胡松编写。习题和习题答案由连保胜、胡彦超共同编写。

特别致谢武汉科技大学教务处对本书的大力支持!

由于编者水平有限,本书一定存在不妥之处,希望专家、同行、读者批评指正,以便今后不断完善。

编　者

2015 年 11 月

目　录

第一章 线性代数的含义

俗语云："工欲善其事必先利其器"，要学好线性代数，必须先了解什么是线性代数. 下面，结合我们的教学经验，谈谈我们对线性代数的初步理解.

1.1 线性的本质

首先，应确定对象，也就是谁和谁是线性关系，这一点往往容易被忽略，读者应充分注意.

其次，明确线性是指对象之间的一种运算关系结构.

线性最初起源于对象 x，y 之间的直线关系，其数学表达式为 $y=kx$，$k\in\mathbf{R}$. 换一种写法为：$ax+by=0$，a，$b\in\mathbf{R}$，注意直线的代数形式 $ax+by=0$，a，$b\in\mathbf{R}$ 有以下两个特点：

(1)线性的对象 x，y 首先与数 a，b 分别做乘法，在数学中称这样的运算为数乘(用数乘以对象，注意本书中所说的数均指实数)；

(2)数乘之后，它们以代数和(加法)形式组合在一起.

综上所述，线性的含义就是**对象的数乘与对象之间的加法**.

例 1.1：泰勒展式：$e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots$ 现在可以这样读：将函数对象 e^x 用函数对象 1，x，x^2，…，x^n，…的线性组合的方式表示出来. 用对象 1，x，x^2，…，x^n，…的线性组合表示初等函数是初等函数泰勒展式的本质，当然，对象 1，x，x^2，…，x^n，…所起的作用在后面会有说明.

例 1.2：已知 $3x-2y+z=0$，该如何称呼这个等式？

答：该等式的名称为三元一次线性常系数齐次不定方程. 其中线性的对象是 x，y，z.

例 1.3：常微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 被称为线性微分方程，其中线性的对象是哪个？

答：其中线性的对象是 y，$p(x)$ 是系数，它与对象 y 做数乘运算. 突出线性的对象，这个方程完整的称呼应为关于 y 的一阶线性微分方程.

1.2 关于线性的几个重要概念

1.2.1 线性组合

望文生义，对象乘以数再用加法连接(组合)在一起，这样构成的组合就是线性组合(就是用数乘与加法将对象结合在一起).

例 1.4：设对象是 $\sin x$，$\cos x$，则 $3\sin x-\cos x$ 就是它们的一种线性组合，而 $2\sin^2x+$

$3\cos x$ 不是 $\sin x$，$\cos x$ 的线性组合，在这个运算中有对象乘以对象：$\sin^2 x=\sin x\times\sin x$.

例 1.5：对象为向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1, 3, 5)$，$\boldsymbol{\beta}=(2.4.6)$，则 $3\boldsymbol{\alpha}-4\boldsymbol{\beta}$ 就是对象 α，β 的一个线性组合.

1.2.2　线性表出(线性表示)

望文生义，一个对象用其余对象的线性组合的方式表示出来(等号形式)，就是这个对象在其余对象下的线性表出.

一个对象可以被其他对象线性表出，说明它的线性功能可以被其他对象替代.

例 1.6：目标对象是 $\cos 2x$，其余对象是$\cos^2 x$，$\sin^2 x$. 等式 $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$ 的含义是：目标对象 $\cos 2x$ 用对象$\cos^2 x$，$\sin^2 x$ 的线性组合表示出来.

注意：不是对象 $\cos x$，$\sin x$，思考一下是什么缘故.

例 1.7：已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1, 1)$，$\boldsymbol{\beta}=(0, 1)$，$\boldsymbol{\gamma}=(3, 0)$，$\boldsymbol{\tau}=(4, -1)$，则有 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}+\frac{1}{3}\boldsymbol{\gamma}+0\boldsymbol{\tau}$，可以读作：目标对象向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 表示成对象 $\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$，$\boldsymbol{\tau}$ 的线性组合，也就是向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 由向量 $\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$，$\boldsymbol{\tau}$ 线性表出. 还可以线性表出为 $\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\tau}$. 可见，由一些对象线性表出某对象的方法不一定唯一. 什么条件下线性表出某对象的方式是唯一的？值得我们关注.

1.2.3　线性无关

一组对象，它们中的任何一个对象都不可以用本组中其余对象的线性组合的方式表示出来，或者任何一个对象不能由其余对象线性表出，这组对象就是线性无关的.

说明：这组对象彼此具备线性独立性，它们线性无关. 每个对象都有其独特的作用，不可以被替代. 一个线性无关组的任何一个成员在线性条件下，都独立地承担自己的那部分职责，不可或缺，这就是对线性无关的本质理解.

定义：数学表达式为：若对象组 $\alpha_i(i=1, 2, \cdots, n)$，数组 $k_i(i=1, 2, \cdots, n)$，当且仅当 $k_i=0(i=1, 2, \cdots, n)$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\alpha_i=0$ 成立，则称对象组 $\alpha_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 线性无关.

通俗而言：一组对象线性无关，是指当且仅当在系数全部为 0 时线性组合是 0 才成立.

反证：若其中 $k_i\neq 0$，则 $\alpha_i=-\sum\limits_{j\neq i}^{n}k_j\alpha_j/k_i$，也就是 α_i 可以由此组中其余对象线性表出，显然与线性无关的定义冲突，从而每个数乘系数都必须是 0.

例 1.8：已知一组向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1, 1)$，$\boldsymbol{\beta}=(0, 1)$，$\boldsymbol{\gamma}=(3, 0)$，$\boldsymbol{\tau}=(4, -1)$，则 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 是线性无关的.

证明：$x\boldsymbol{\alpha}+y\boldsymbol{\beta}=0\Leftrightarrow(x, x)+(0, y)=0\Leftrightarrow x=0, y=0$.

当然，其中任何两个为单独的一组都是线性无关的，请读者类似地证明.

1.2.4　线性相关

对象组中存在一个对象可以用本组中其余对象的线性组合的方式表示出来，或者存在

一个对象能用其余对象线性表出，这个对象组就是线性相关的.

定义：数学表达式为：若对象组 $\alpha_i(i=1, 2, \cdots, n)$，数组 $k_i(i=1, 2, \cdots, n)$，当 $\sum_{i=1}^{n} k_i\alpha_i=0$ 时，存在某个 $k_i\neq 0$ 使得上述组合成立，则称此组 $\alpha_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 线性相关.

若其中 $k_i\neq 0$，则 $\alpha_i=-\sum_{j\neq i}^{n} k_j\alpha_j/k_i$，也就是 α_i 可以由此组中其余对象线性表出.

说明：在这组对象中，全体不具备线性独立性，它们线性相关. 被其余对象表出的对象在这个对象组没有线性独立性，它存在的线性功能可以被其余对象代替，它在这个对象组中是无用的，它在此组中对整体没有什么线性贡献，它的存在可有可无. 它能做的事情可以由其余对象分担. 一个线性相关组中至少存在一个成员，在线性条件下，它的存在没有什么意义，可以或缺，这个就是线性相关的本质理解.

例 1.9：已知一组向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1, 1, 1)$，$\boldsymbol{\beta}=(0, 1, 0)$，$\boldsymbol{\gamma}=(1, 0, 0)$，$\boldsymbol{\tau}=(4, -1, 2)$，则 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$ 是线性无关的($x\boldsymbol{\alpha}+y\boldsymbol{\beta}+z\boldsymbol{\gamma}=0\Leftrightarrow x=0, y=0, z=0$)，当 4 个向量为一组时，它们是线性相关的($\boldsymbol{\tau}=2\boldsymbol{\alpha}-3\boldsymbol{\beta}+2\boldsymbol{\gamma}$).

注意：一个线性相关组中，可以存在部分组是线性无关的.

1.2.5 极大线性无关组

对象组 $\alpha_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 的部分组 $\alpha_i(i=1, 2, \cdots, r, r\leqslant n)$ 是线性无关的，如果将其余的任何一个对象 $\alpha_k(n\geqslant k>r)$ 加入这个部分组，得到新的部分组线性相关，则这个部分组 $\alpha_i(i=1, 2, \cdots, r, r\leqslant n)$ 是对象组 $\alpha_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 的极大线性无关组，简称极大无关组.

注意：(1)对象组的极大无关组在对象组中起核心作用，它完全承担了对象组的全部线性功能，换言之，就是将对象组中的线性相关的对象去掉了；

(2)对象组的极大无关组的对象个数，称为对象组的秩；

(3)对象组的极大无关组不一定唯一；

(4)对象组的一个极大无关组称为该对象组的基底，而其余对象在由基底线性表出的系数构成的数组称为该对象在这个基底下的坐标，且是唯一的.

例 1.10：已知一组向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1, 1, 1)$，$\boldsymbol{\beta}=(0, 1, 0)$，$\boldsymbol{\gamma}=(1, 0, 0)$，$\boldsymbol{\tau}=(4, -1, 2)$，则 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$ 是线性无关的($x\boldsymbol{\alpha}+y\boldsymbol{\beta}+z\boldsymbol{\gamma}=0\Leftrightarrow x=0, y=0, z=0$)，当然 4 个向量为一组时，它们是线性相关的($\boldsymbol{\tau}=2\boldsymbol{\alpha}-3\boldsymbol{\beta}+2\boldsymbol{\gamma}$)，从而 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$ 是该组的极大无关组；该组的秩是 3；同样，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$，$\boldsymbol{\tau}$ 也是该组的极大无关组，极大无关组不一定唯一.

由 $\boldsymbol{\tau}=2\boldsymbol{\alpha}-3\boldsymbol{\beta}+2\boldsymbol{\gamma}$ 知，$\boldsymbol{\tau}$ 在基底 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$ 下的坐标为(2, -3, 2).

1.2.6 线性等价

两个对象组 $\alpha_i(i=1, 2, \cdots, n)$，$\beta_i(i=1, 2, \cdots, m)$，若每组中的任何一个对象均可以由另一组线性表出，也就是它们可以互相线性表出，则称这两组对象线性等价(简称等价). 记作：$\{\alpha_i: i=1, 2, \cdots, n\}\cong\{\beta_i: i=1, 2, \cdots, m\}$.

数学表达：$\alpha_i = \sum_{j=1}^{m} k_{ij}\beta_j(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，$\beta_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\alpha_j(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$

$$\Leftrightarrow \{\alpha_i:\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\} \cong \{\beta_i:\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m\}.$$

注意：若一组对象的极大无关组和该组对象是线性等价的，则该组的任意两组极大无关组也是等价的.

例 1.11：已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}=(1,\ 1)$，$\boldsymbol{\beta}=(0,\ 1)$，$\boldsymbol{\gamma}=(3,\ 0)$，$\boldsymbol{\tau}=(4,\ -1)$，其中任意两个向量构成的部分组都是线性无关的，也是该向量组的极大线性无关组，并且它们都是互相线性等价的. 这组向量组的秩是 2. 数学表达式请读者尝试写出.

1.2.7 关于线性相关与线性无关的基本结论

注意：所有结论均使用线性相关，线性无关的定义加以证明.

(1)若把 0 视为对象组中的一个对象，则这个对象组 0，α_1，α_2，…，α_n 一定线性相关.

存在非零常数 1 以及 $k_i=0(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 使得等式

$$1\times 0 + \sum_{i=1}^{n} k_i\alpha_i = 0$$

成立，从而此对象组线性相关.

(2)若一个对象 β 可以由对象组 α_1，α_2，…，α_n 线性表出，则加上这个对象的对象组 β，α_1，α_2，…，α_n 一定线性相关，与原对象组是否线性相关无关.

拓展：线性相关是指对象群体之间的关系，举一个例子：甲、乙两人不相关(不认识)，加上丙后，甲、乙、丙 3 人构成群体就可以相关了(他们可以两两循环认识). 某两个人无关，但全体中国人一定是相关的.

(3)一组线性无关对象组中的任何一个局部(子集)也是线性无关的. 反之，一组对象中的任何一个部分组都是线性无关的，则全体线性无关，而一组对象中存在某部分线性无关，则不能保证全体线性无关.

例 1.12：已知一组向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,\ 1)$，$\boldsymbol{\beta}=(0,\ 1)$，$\boldsymbol{\gamma}=(3,\ 0)$，$\boldsymbol{\tau}=(4,\ -1)$，则线性无关的部分组有：$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$. 当然，其中任何两个为单独的一组，都是线性无关的，但是全体却是线性相关的.

(4)如果一组对象本身是线性相关的，则增加同类对象，得到的新的对象组依然会线性相关.

1.3 代　　数

通俗而言，代数是某对象的集合，集合内部的元素具备加、减、乘、除四种运算，而且每种运算的结果依然在这个集合中，也就是保持了对运算的封闭性.

例如，最简单的实数全体就是一个代数，而整数集合不是一个代数.

1.4 线 性 代 数

一个是对象集合，一个是数集合，对象集合中的元素彼此存在四则运算，同时，数集

合中的数可以和对象集合中的元素做数乘，结果也在对象集合中，这样就保证了线性运算的封闭性，这样的代数就是线性代数.

在本书中，我们的对象集合是矩阵集合，数集合是普通的实数集合，因此，本书的核心内容就围绕着矩阵的四则运算(包括线性运算与非线性运算)展开，然后以运算为基础来研究矩阵对象的性质，例如秩性质、特征值、特征向量、对角化等.

练 习 一

1. 证明对象 $1, x, x^2, \cdots, x^n, \cdots$ 在实数 $\mathbf{R}$ 上线性无关，并将对象 $\arctan x$ 用 $1, x, x^2, \cdots, x^n, \cdots$ 线性表出. 同时证明 $\cos x, 1, x, x^2, \cdots, x^n, \cdots$ 是线性相关的，并写出函数 $\sin x$ 在泰勒展式基底 $1, x, x^2, \cdots, x^n, \cdots$ 下的坐标.

2. 验证 $y=1$，$y=e^x$，$y=e^{2x}$ 是微分方程 $y'''-3y''+2y'=0$ 的解，同时证明 $y=1$，$y=e^x$，$y=e^{2x}$ 是线性无关的，它是这个微分方程的解的基底，求出此微分方程的通解.

第二章　行列式的算法

由 n 行(横的排列称为行)、n 列(纵的排列称为列)共 $n\times n$ 个对象(元素)按照一定的算法规则形成的代数式，称为行列式. 数学符号为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad |\boldsymbol{A}|$$

或者记作：$\det(\boldsymbol{A})$、$\det(a_{ij})$，约定当 $n=1$ 时，$|a_{11}|=a_{11}$.

注意：(1)元素 a_{ij} 中的 i 表示元素 a_{ij} 在行列式的第 i 行，j 表示元素 a_{ij} 在行列式的第 j 列，行 i 在前，列 j 在后，中间不使用符号做间隔. 如：a_{34} 表示元素 a_{34} 在 3 行、4 列交汇处；

(2)行列式的阶是指行列式的行数，或者列数，也就是：阶=行数=列数；

(3) 行列式中有一种约定的算法规则，最后结果是一个代数式，因此所有可以对代数式进行的运算，如求导、积分、求极限、方程求解等，都可以对行列式进行. 也就是读者会看到这样的形式 $\int_0^1 \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} \mathrm{d}x$，不要觉得奇怪.

行列式的算法总体遵循三套方案进行：第一算法；第二算法；三大初等行(列)变换.

2.1　行列式的第一算法要义

2.1.1　算法本质

算法本质：所有取自不同行、不同列的元素的乘积的代数和.

将此算法一步一步地拆解：

第一步：取. 每行只能取一个元素，而且取下一行的时候，取到的元素所在的列的元素不能取，这样一组取 n 个元素，保证取到的元素不同行、不同列，共可以取到 $n!$ 组；

第二步：每组 n 个元素做乘法，共 $n!$ 个乘法结果；

第三步：将这 $n!$ 个乘法结果做代数和.

2.1.2　代数和

引入负号后，减法也称为加法，例如：$3-4=3+(-4)$.

这样的加法称为代数和. 在行列式中，代数和前面的正负号由做乘法的元素的位置来确定. 为了确定代数和中的正负号，特别引入“逆序数”这个概念.

2.1.3 逆序数

不同的数两两比较，如果大在前、小在后，它们就构成一个逆序，否则称为自然顺序. 例如：4，3 就是一个逆序，而 1，5 不构成逆序. 一组由不同的数排成的数组的逆序总数，称为该数组数字的逆序数. 逆序数用 τ 表示.

下面介绍计算排列的逆序数的方法.

设 $p_1p_2\cdots p_n$ 是 1，2，…，n 这 n 个自然数的任一排列，并规定由小到大为标准次序.

先看有多少个比 p_1 大的数排在 p_1 前面，记为 t_1；

再看有多少个比 p_2 大的数排在 p_2 前面，记为 t_2；

……

最后看有多少个比 p_n 大的数排在 p_n 前面，记为 t_n.

则此排列的逆序数为 $\tau=t_1+t_2+\cdots+t_n$.

例如：$\tau(4,3)=1$，$\tau(5,4,3,1,2)=9$. 注意，有时候将数与数之间的间隔符号去掉，数字与数字之间稍微分开，也不引起误会，也就是 $\tau(54312)=9$. 逆序数是个普通的数，可以参入一些运算.

例 2.1：$(-1)^{\tau(4321)}=(-1)^6=1$.

而代数和的符号取决于做乘法的因子的行逆序数和列逆序数的总和的奇偶，数学表达为：$(-1)^{\tau(\text{行标组})+\tau(\text{列标组})}$.

逆序数的性质：交换一组排列中的任何两个数，逆序数的奇偶特性发生改变.

例 2.2：$\tau(54312)=9$，交换 5 与 2 后，$\tau(24315)=4$，奇数变成了偶数.

到此行列式的第一算法本质的数学描述为下面介绍的行列式的第一算法.

2.1.4 行列式的第一算法定义

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i\neq j\neq k\neq\cdots\neq p}(-1)^{\tau(ijk\cdots p)}a_{1i}a_{2j}a_{3k}\cdots a_{np}$$

注意：在乘法运算中，因子是不同行、不同列的元素，可以从它们的行标和列标中看出. 代数和中的逆序数的确定有三种方式：

(1) 在这个定义中，首先让行自然排序，只需要计算列的逆序数，确定正负号.

(2) 也可以先让列自然排序，再由行的逆序数确定代数和中的正负号，表达式为：

$$|\boldsymbol{A}|=\sum_{i\neq j\neq k\neq\cdots\neq p}(-1)^{\tau(ijk\cdots p)}a_{i1}a_{j2}a_{k3}\cdots a_{pn}$$

(3) 行和列都是乱序，分别将行的逆序数和列的逆序数做总和，确定该项在代数和中的符号.

例 2.3：$a_{31}a_{22}a_{13}$ 的符号由行的逆序数 $\tau(321)$ 确定，是奇数，符号取“-”；$a_{13}a_{22}a_{31}$ 的符号由列的逆序数 $\tau(321)$ 确定，是奇数，符号取“-”；而 $a_{31}a_{13}a_{22}$ 的符号则由行的逆序数 $\tau(312)$ 和列的逆序数 $\tau(132)$ 的总和确定，是奇数，符号取“-”.

2.1.5 特例引导

二阶、三阶用刀切来简化定义:

二阶算法:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} + (-1)^{\tau(21)} a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

等于主对角线元素 a_{11}，a_{22}之积减去副对角线元素 a_{12}，a_{21}之积，即:

主对角线

副对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

三阶算法:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^{\tau(231)} a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^{\tau(312)} a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)^{\tau(321)} a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$+ (-1)^{\tau(213)} a_{12}a_{21}a_{33} + (-1)^{\tau(213)} a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

根据排列组合的性质，三阶取自不同行、不同列的元素之积共有 6 组，沿着主对角线的元素 a_{11}，a_{22}，a_{33}之积的代数和选择“+”，而沿着副对角线的元素 a_{13}，a_{22}，a_{31}之积的代数和选择“-”. 我们形象地将二阶、三阶的算法比做分别沿着主对角线和副对角线用刀切，二阶只需要切 2 刀，一正，一负；三阶需要切 6 刀，三正，三负.

提示：四阶和四阶以上，就无法用刀切了，请读者细心体会之.

当仅有主对角线的元素非零时，无论行列式的阶数是多少，主对角线的元素做乘积后，不用变号，直接得到行列式的结果；而副对角线的符号规则是，二阶、三阶取负号，四阶、五阶取正号，隔两阶变换一次规律.

2.1.6 一些常用的行列式

(1)上、下三角形行列式等于主对角线上的元素的乘积，即:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

特别地，对角行列式等于对角线元素的乘积，即:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

类似地，
$$D=\begin{vmatrix} & & & a_{1n}\\ & & a_{2,n-1} & \\ & \begin{smallmatrix} & & \cdot\\ & \cdot & \\ \cdot & & \end{smallmatrix} & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

(2)范德蒙(Vandermonde)行列式，即：

$$V_n(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j)$$

例 2.4：计算(证明)下列行列式(等式)：

(1)$\begin{vmatrix} 1 & 4\\ -1 & 2 \end{vmatrix}$.

(2)$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

(3)证明：$\dfrac{\mathrm{d}\begin{vmatrix} f(x) & p(x)\\ q(x) & g(x) \end{vmatrix}}{\mathrm{d}x}=\begin{vmatrix} f'(x) & p(x)\\ q'(x) & g(x) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} f(x) & p'(x)\\ q(x) & g'(x) \end{vmatrix}$.

解：(1)原式$=1\times2-4\times(-1)=6$.

(2)原式$=1\times5\times9+2\times6\times7+3\times4\times8-3\times5\times7-2\times4\times9-1\times6\times8=0$.

(3)证明：左边$=(f(x)g(x)-p(x)q(x))'$

$$=f'(x)g(x)-p'(x)q(x)+f(x)g'(x)-p(x)q'(x)$$

$$=\begin{vmatrix} f'(x) & p(x)\\ q'(x) & g(x) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} f(x) & p'(x)\\ q(x) & g'(x) \end{vmatrix}=\text{右边}$$

细心的读者可以将行列式的求导推广到 n 阶行列式的情况.

同时，所有关于代数式的问题，都可以转换成行列式形式，请读者自己去做一些尝试. 在这个证明中我们使用了逆向操作.

注意：逆向操作是数学中的一种基本思想.

例 2.5：将 $ad-bc$ 逆向写成行列式形式为：$\begin{vmatrix} a & b\\ c & d \end{vmatrix}$或者$\begin{vmatrix} d & c\\ b & a \end{vmatrix}$.

下面我们进行两种逆向操作示范，得到行列式算法的第二要义，以三阶行列式为示范：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})+a_{12}(a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$$

令 $M_{11}=\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$，$M_{12}=\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}$，$M_{13}=\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$，则

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13}$$

令 $A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}$，$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}$，$A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}$，则

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

如是，就有行列式的第二算法.

2.2 行列式的第二算法要义

2.2.1 算法本质

算法本质：行列式的某行与它对应的代数余子式的乘积的和.

余子式："余"就是剩下的意思，"子"就是一部分，"式"即为代数式，在这里代数式就是行列式，因此余子式就是行列式中去掉某行、某列剩下的元素构成的行列式.

去掉行列式中元素 a_{ij} 所在的行(第 i 行)和列(第 j 列)的所有元素，其余的元素保持原有位置，得到一个 $n-1$ 阶行列式，就是元素 a_{ij} 对应的余子式，记作：M_{ij}，写法上注意依然是行前列后.

代数余子式：就是加上正负号的余子式，其符号由元素所在行与列的标号之和的奇偶确定. 记作：$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

2.2.2 行列式的第二算法定义

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{n}a_{ki}A_{ki}=a_{k1}A_{k1}+a_{k2}A_{k2}+\cdots+a_{kn}A_{kn}\quad(k=1,2,\cdots,n)$$

注意：(1)此算法可以改成某列的元素与它对应的代数余子式的乘积之和. 读者自己写出数学表达式.

(2)注意逆向使用，也就是，依照上面的定义，有

$$\sum_{i=1}^{n}b_{1i}A_{1i}=b_{11}A_{11}+b_{12}A_{12}+\cdots+b_{1n}A_{1n}=\begin{vmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

即可以反转变成行列式形式. 注意这种表示方法在数学中称为可逆的用法.

例 2.6：已知行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & k & p \end{vmatrix}$，计算 $dA_{11}+eA_{12}+fA_{13}$.

解：原式 $=\begin{vmatrix} d & e & f \\ d & e & f \\ h & k & p \end{vmatrix}=0$

例 2.7：证明：$\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ki}A_{ki}=\sum\limits_{i=1}^{n} a_{1i}A_{1i}=\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$.

证明：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{n} a_{ki}A_{ki}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{n} a_{1i}A_{1i}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$$

从而，$\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ki}A_{ki}=\sum\limits_{i=1}^{n} a_{1i}A_{1i}=\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$.

例 2.8：设行列式 $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$，计算 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$ 及 $M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}$.

解：反向使用第二算法：

$$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}=4$$

$$M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}=A_{11}-A_{21}+A_{31}-A_{41}=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}=0$$