探秘数学常数

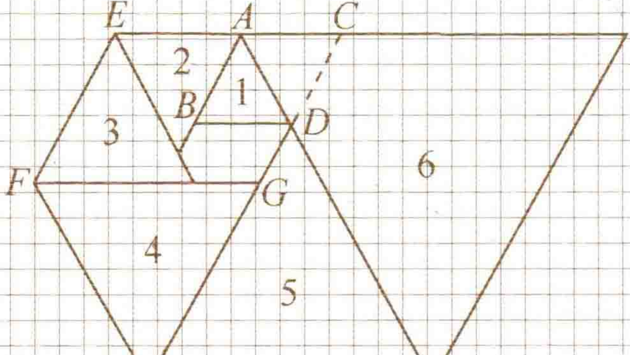
陈梅 陈仁政 主编

妙趣横生的

数学常数

陈梅 陈仕达

著



中国工信出版集团
人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

探秘数学常数

陈梅 陈仁政 主编

妙趣横生的数学常数

陈梅 陈仕达

著

人民邮电出版社

北京

图书在版编目（CIP）数据

妙趣横生的数学常数 / 陈梅，陈仁政主编 ；陈梅，陈仕达著. -- 北京 ：人民邮电出版社，2016.4
（探秘数学常数）
ISBN 978-7-115-41695-7

Ⅰ. ①妙… Ⅱ. ①陈… ②陈… ③陈… Ⅲ. ①常数—普及读物 Ⅳ. ①O1-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第040188号

内容提要

“没有数字，一切都是混乱和黑暗的。”毕达哥拉斯学派的数学家、思想家菲洛劳斯说，“庞大、万能和完美无缺是数字的力量所在，它是人类生活的开始和主宰者，是一切事物的参与者。”

数字中的各种常数令人敬畏，它们似乎是宇宙诞生之初“上帝”的精心选择。那一串串无限不循环的数字往往让人陷入无底洞般的哲学沉思：为什么这些数字不是别的，而偏偏就是这个样子呢？除了那些众所周知的基本常数之外，还有很多非主流的数学常数，它们奇异的特性同样具有浓重的神秘色彩。今天，就让我们一起来看一看到底有哪些神秘的常数。

本书适合广大数学爱好者阅读。

◆ 主　编　陈　梅　陈仁政
著　　　陈　梅　陈仕达
责任编辑　刘　朋
责任印制　彭志环

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市丰台区成寿寺路11号
邮编　100164　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
大厂聚鑫印刷有限责任公司印刷

◆ 开本：700×1000　1/16
印张：17.75
字数：338千字　2016年4月第1版
印数：1-3 000册　2016年4月河北第1次印刷

定价：39.00元

读者服务热线：(010)81055410　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315
广告经营许可证：京东工商广字第8052号

编 委 会

丛书主编：陈　梅　陈仁政

丛书副主编：陈仕达　陈　雪　黎　渝

本册主编：陈　梅　陈仕达

丛书编委（以姓氏的汉语拼音为序排列）：

曹明清　陈出新　陈　立　陈　梅　陈仁政　陈仁仲　陈仕达

陈　雪　方裕强　傅艳艳　龚炳文　郭　春　郭汉卿　胡权阳

胡　晓　江明珍　匡晓燕　黎　渝　李昌敏　李　骥　李军红

梁　聪　梁媛琳　廖洪波　刘　伟　刘　洋　卢　颖　丘　雷

钱丹锋　全　刚　全建辉　任治奇　税康秀　王　可　王　奎

王明华　王　倩　魏　佳　席　波　席　涛　杨素君　易　扬

曾君成　张　静　周兴国

前　言

著名数学家哥德尔 18 岁进入维也纳大学时学习的是理论物理专业，他常到位于维也纳第九区斯特鲁德尔霍夫大街 4 号的理论物理研究所四楼的大教室聆听奥地利物理学家蒂林的课。有一次，他参加了德国哲学家、物理学家施里克介绍罗素数论著作的研讨会，由此对数理逻辑产生了浓厚的兴趣。数的吸引力如此之大，竟致哥德尔改换门庭。入校两年后，哥德尔放弃了物理学专业，改学数学。5 年以后的 1931 年，25 岁的哥德尔发表了震惊数学界的不完备定理。而在今天，用他的姓氏命名的哥德尔奖从 1993 年起每年都在颁发。

提到数学，我们自然无法回避数学常数。最著名的数学常数当属圆周率 π、黄金分割数 φ 和自然对数的底 e。以色列数学史家马奥尔在《无穷之旅——关于无穷大的文化史》一书中称它们为“3 个著名的无理数”。在美国加州谷歌公司总部的 4 座办公大楼中，有 3 座是以这 3 个数学符号命名的。当然，数学中重要的常数远不止于此。

数学常数是古老而又年轻的数论的重要组成部分。虽然截至目前已经取得了许多重大数论研究成果，但是还有不少谜团让人看朱成碧，不辨五色。正如日本著名数学家弥永昌吉所说，数论的“大部分仍然笼罩在神奇的面纱之下”。因此，需要我们继续不断探索。“苔花如米小，也学牡丹开。”本丛书作者虽然明知力所不逮，但凭借着对数学常数的浓厚兴趣，自 1982 年开始，断续经过 33 年的努力，终于编写成了这套系统介绍数学常数的普及读物。这套书包括《说不尽的圆周率》《不可思议的自然对数》《奥妙无穷的黄金分割》《妙趣横生的数学常数》。

虽然目前国内外出版了一些介绍上述三大数学常数的图书，但总体来说不够系统全面，许多有趣的知识没有罗列其中。本套图书希望能在以下方面做出

有益探索。

首先，本套图书以 π、φ、e 等主要的数学常数为主线，但又不限于此，内容涵盖重要数学概念和数学思想的形成、著名公式和定理的证明以及它们在各学科和生活中的应用。单是书中涉及的数学家以及相关的科学家、哲学家等就有 2000 多位，读者可以从书中了解这些著名人物在数学研究中的探索历程、所取得的重要成果以及逸闻趣事。

其次，本套图书在化繁为简、深入浅出方面进行了积极的尝试，力求消除“数学是可怕的学科”这样的误解，把“可怕”变为“可爱”，让读者充分感受到数学之真、之美、之乐、之用，感受到数学的魅力。中国数学家张景中在其所著的《数学与哲学》一书开篇就指出：“联系数学的发展历史学习数学哲学，有趣又有效。”在编写过程中，作者也尽力将数学史和科学史内容融入书中，从而梳理出重要数学思想和数学定理的发展脉络，以及著名数学难题的求解历程。读者感受到的将不再是仅以定理、证明、计算面孔出现的枯燥乏味的脑力训练，而将看到一个有血有肉、充满活力与无限乐趣的新形象。

再次，知识驱动着人类文明的发展，数学作为我们理解和探索科学以及世界的重要工具发挥了重要作用。知识的获取过程是艰辛的，但也充满着乐趣，数学更是如此。本套图书在介绍数学知识之外，更加注重表现数学家的优秀品质以及探索精神，希望读者在享用前人所留下的宝贵精神财富的同时能有一些感触或感悟。

除了作者团队的协作与努力之外，许多专家、学者、朋友及相关人士也为本套图书的编写与出版给与了帮助。在此感谢张景中、李敏、郭书春、宁挺、梁宗巨、张奠宙、查有良、吴振奎、丘和、曾润生、王青建、邹大海、彭定才、潘宁、邓文华、陈文伟、贾小勇、吴至友、罗明、安克·毛雷尔等。由于篇幅所限，还有不少人士的姓名在此未能提及，一并表示感谢。

限于作者的陋见，书中难免存在疏漏与不当之处，请读者批评指正。

爱因斯坦说：“不要担心你在数学上遇到的困难，我敢保证我遇到的困难比你大得多。”让我们以此共勉，并慢慢爱上有趣又好玩的数学吧。

编者

目　录

第 1 章　精彩纷呈的自然数 / 1

1.1　0——是不是自然数 / 1
1.2　3——石头垒成的数 / 2
1.3　5——少年英雄为它呕心沥血 / 14
1.4　6——四处游荡而又有时缺席 / 24
1.5　7——吉凶一身，四海为家 / 37
1.6　13——1 元美钞上的秘密 / 47
1.7　365——《难题》中的地球数 / 58
1.8　1729——不同凡响的出租车数 / 61
1.9　142 857——下凡的圣数 / 63

第 2 章　并非绣花枕头的无理数 / 72

2.1　大海不能吞噬的秘密 / 72
2.2　4 个著名的无理数 / 76
2.3　数系的发展：从自然数到超越数 / 82
2.4　6 个著名的超越数 / 84

第 3 章　欧拉常数 γ / 91

3.1　调和级数之谜 / 92
3.2　欧拉常数 γ / 98
3.3　用途广泛的 γ / 106
3.4　γ 与某些数学常数 / 108

3.5 “所有人的老师” / 111

第 4 章 孪生素数家族的常数 / 116

4.1 孪生素数的布朗常数 B_2 和孪生素数常数 C_2 / 116
4.2 孪生素数的布朗常数 B_4 和表兄弟素数常数 C_4 / 124
4.3 六素数与其他 / 132

第 5 章 其他有专用名称的数学常数 / 134

5.1 MRB 常数 / 134
5.2 迈塞尔-梅尔滕斯常数 M_1 / 136
5.3 伯恩斯坦常数 β / 137
5.4 连分数常数 C_1，C_2，C_3 / 138
5.5 恩布里-特雷费森常数 β* / 139
5.6 朗道-拉马努金常数 K / 139
5.7 卡塔兰常数 C / 141
5.8 勒让德常数 B'_L / 143
5.9 威斯万纳斯常数 K / 144
5.10 阿佩里常数 a / 145
5.11 米尔斯常数 A / 149
5.12 拉马努金-索尔德内尔常数 μ / 150
5.13 巴克豪斯常数 B / 151
5.14 超黄金比 ψ / 152
5.15 厄尔多斯-波尔文常数 E_B / 153
5.16 谢尔宾斯基常数 K / 154
5.17 辛钦常数 K_0 / 154
5.18 斐波那契数倒数和常数 ψ / 156
5.19 费根鲍姆常数 δ 和 α / 157
5.20 卡普勒卡尔常数 K_a / 159

第 6 章 五彩缤纷的数列 / 163

6.1 完全数 / 164
6.2 “调和数” / 170

6.3 亲和数 / 171
6.4 幸运数 / 178
6.5 多角数 / 178
6.6 水仙花数、回归数和草数 / 191
6.7 幂数 / 196
6.8 黑格涅尔数 / 202
6.9 佩尔数 / 204
6.10 贝尔数与斯特林数 / 207
6.11 卡塔兰数 / 210
6.12 卡普勒卡尔数 / 212
6.13 无 8 数 / 214
6.14 皮索特数与塞勒姆数 / 216
6.15 快乐数与伤心数 / 217
6.16 史密斯数 / 219
6.17 弗里德曼数 / 220
6.18 马尔科夫数 / 222
6.19 卡迈克尔数 / 223
6.20 邹赛尔数 / 224
6.21 哈沙德数 / 225
6.22 自守数 / 226
6.23 基斯数 / 228
6.24 金蝉蜕壳数 / 228
6.25 冰雹数 / 229
6.26 累进可除数 / 233
6.27 普罗斯数、谢尔宾斯基数和里塞尔数 / 236
6.28 自我数 / 239
6.29 “魔术数” / 240
6.30 不可及数 / 240

第 7 章 琳琅满目的素数 / 242

7.1 素数的种类 / 242
7.2 梅森素数、双梅森素数和塔形梅森素数 / 244
7.3 费马素数 / 251

7.4　佩兰素数和佩兰伪素数 / 252
7.5　热尔曼素数、安全素数和危险素数 / 254
7.6　吸血鬼素数 / 260
7.7　回文素数和二面素数 / 262
7.8　循环素数、可逆素数、顺序素数和逆序素数 / 267
7.9　可截断素数 / 270
7.10　强素数 / 272
7.11　纽曼-山克斯-威廉斯素数 / 274

第 1 章

精彩纷呈的自然数

整数是一切数学的根源。

——俄国-德国数学家闵科夫斯基

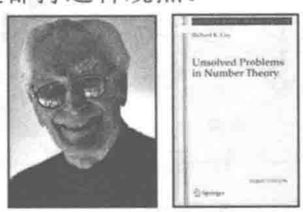
1.1 0——是不是自然数

说到自然数，就必须先说哪些数是自然数，例如 0 是否属于自然数？

关于 0 是否属于自然数，历来是有争议的。

一种观点认为，0 不是“自然”数（shǔ）数（shù）时数（shǔ）出来的，所以不是自然数。中国陈文伟等 3 位学者于 2011 年发表在中国《智能系统学报》第 5 期上的论文《数学进化中的知识发现方法》就持这种观点，认为“自然数与 0 是矛盾的（自然数是有值的数，0 是无值的数）”。“0 与自然数 1，2，3 等不同，代表的是‘无’，在任何计量单位中都表示‘没有’，是任何一个确定的量的否定”，是这种观点的另一种写照。20 世纪新中国的初等教材一直都持这种观点。

另一种观点则认为，0 是最小“最自然”的自然数——远古的人类“最自然”地用“有”和“无”计数。例如，狩猎回来两手空空，就说“无”，也就是当今的 0。英国数学家、国际象棋研究专家、加拿大卡尔加里大学数学系名誉教授盖伊于 1981 年在施普林格出版社出版了名著《数论中未解决的问题》，其中也明确地说 0 是自



盖伊和 2004 年版
《数论中未解决的问题》

然数。

这两种观点的争议来自不同领域对 0 的认识差异。例如，在数论中 0 不属于自然数，而在集合论和计算机科学中，0 属于自然数。

由于日益重要的计算机科学发展的需求，国际标准 ISO 31-11：1992 与取代它的 2009ISO 80000-2 都从集合论的角度规定，非负整数集或自然数集的符号“N”表示的自然数包括正整数和 0。上述 ISO 是 International Organization for Standardization（国际标准化组织）的缩写。为了便于国际交流，中华人民共和国国家标准 GB 3102.11—93（《物理科学和技术中使用的数学符号》）参照了这一国际标准，在第 11-2.9 项做出了同样规定。因为这些规定，新中国建国以来中小学教材中“自然数集不包括 0”的规定在从 21 世纪开始新出版的教材中发生了改变，原来的自然数集称为正整数集（记为“N_+”或“N*”），而新的自然数集则包括 0 与原来的自然数集。截止到 k−1 的自然数集用 N_k 表示。上述 N 也可以用 ℕ（N 的 MS Mincho 体）表示。

GB 3102.11—93

项目	符号	应用	意义或读法	备注及示例
11-2.9	ℕ,N		非负整数集；自然数集 the set of positive integers and zero; the set of natural numbers	N={0,1,2,3,⋯} 自11-2.9至11-2.13集内排除0的集，应上标星号或下标+号，例如N*或N_+； N_k={0,1,⋯, k−1}

GB 3102.11—93：自然数是 0，1，2，3，⋯

应当注意，〇、零、0 的用法是不同的，不能随意混用。举例来说，把汉字与阿拉伯数字混用（“中西合璧”）的“二 00 九”，把小写汉字数字与大写汉字数字混用（“大小不分”）的“二零零九”或“贰〇〇玖”，都是不规范的。正确规范的写法是“2009”、“二〇〇九”和“贰零零玖”。

1.2 3——石头垒成的数

1. 三叠石传奇

英国大文豪莎士比亚说：“我希望幸运在奇数中⋯⋯人们也认为神灵在奇数中，即在生、死、机遇之中。”所以，我们的“自然数扫描”就从最小的

奇素数 3 开始。这里要说明的是，本书在没有特别指明时，都是指自然数从 1 开始。

在广西南宁市大沙田经济开发区，有一个著名的三叠石巷。这个小巷为什么以此为名，又怎么会出名呢？

传说古代有 3 匹白马危害当地民众，践踏良田。于是，有勇士挺身而出，将这些白马赶到了乱石岗中的一个地洞里，然后搬来 3 块巨石叠在一起封住洞口，拯救了村民。这 3 块巨石就成了现在的三叠石。

三叠石之所以出名的原因之一是这 3 块石头之间虽然有缝隙（支撑点很小，贴合并不紧密），却能叠成稳稳的宝塔形，雷打不动，手推不倒，矗立了几百年之久。在当地传说中，每逢农历十五之夜，被困的 3 匹白马还想奋力挣脱出洞而撞击石头，使 3 块巨石之间出现了裂缝。鉴于三叠石的传奇，前来祭拜的善男信女们在其上镌刻了密密麻麻的祈愿文字。

三叠石：旧津巴布韦币（左），新津巴布韦币（右）

津巴布韦首都哈拉雷郊区的平衡石公园里，也有这类三叠石。也许是由于三叠石经风历雨依然能保持平衡不倒，可寓意国家长存不朽，所以津巴布韦把它列为国家重点保护文物，还在钞票上印有它的图案。

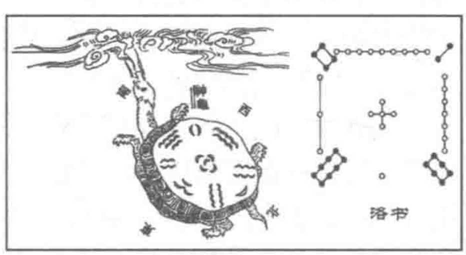

浮盖山的三叠石

当然，其他地方也有这种神奇的三叠石，例如浙江省仙霞山脉的浮盖山（又名盖仙山）。

三叠石是长期流水或风力侵蚀掉其间松软易蚀部分而形成的，因为每块石头的重心都通过支承面，所以能保持不倒，并没有力学原理之外的所谓“玄机”。

2．3 阶幻方之谜

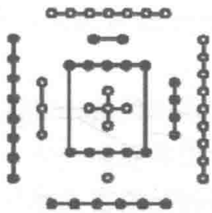
距今几千年以前，中华大地洪水肆虐，于是有了大禹治水的故事。大禹在治理洛水的时候，洛水之神河伯派一只神龟把一本书驮来献给他。这本书中有一个奇怪的图——洛书或者叫洛图（见右图）。另一种传说是神龟的背上有这个图。



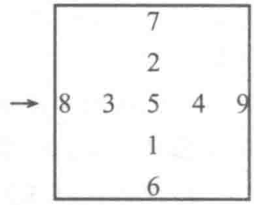
神龟献洛书

不管怎么说，从洛图可以看出，它有 3×3 组小点子。就这样，大禹凭借洛书、开山斧和避水剑这“三件宝”，治理了洛河的水患。

另一个传说是，大禹治水的善举得到了其他河神的帮助。例如，在治理黄河的时候，黄河中的龙马献给他一张河图（见右图），这张图帮他制定了一套正确的治水方案。对河图的“翻译”是：其中共有1到10（10是图中两组5个小黑点相加之和，这两组5个小黑点在“译文”图中已略去）的10个自然数。其中小圆圈代表的5个奇数为阳数，相加为25；小黑点代表的5个偶数为阴数，相加为30，阴阳相加共得55。所以，古人说：“天地之数五十有五。”

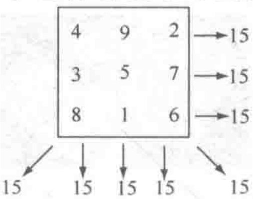


原始河图



河图“译文”

传说当然不可信，但洛书中3×3组小点子组成的幻方却真真切切，而且其中包含着说不尽的奥秘。有哪些奥秘呢？下面要谈到一部分。



洛书“译文”

左图是洛书中3×3组小点子的“数字翻译”——一个3阶幻方。图中每一行3个数字之和、每一列3个数字之和以及每一条对角线上3个数字之和都等于15——这个3阶幻方的幻方常数。

因为没有2阶幻方，所以最小的幻方是3阶幻方。3在这里又风光一回！

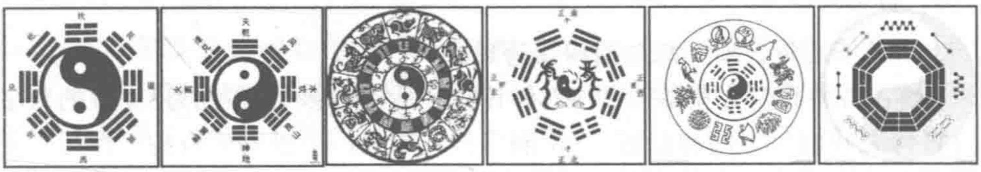
3阶幻方是世人公认的中国首创的古老“土特产”。在约公元前80年成书的《大戴礼》（又名《大戴礼记》或《大戴记》）卷八《明堂篇》中，就清楚地记载着“二九四，七五三，六一八”的“九宫数字”。中国传统文化把“天宫”用“井”字划分为乾、坎、艮、震、中、巽、离、坤、兑这九个“宫”，所以3阶幻方又叫九宫图。

由于有的学者认为《大戴礼》的成书时间是公元前500年前后的春秋时期，所以得到世界上最早记载的幻方是在大约公元前5世纪的结论。从《大戴礼》的无论哪种成书时间都可以看出，中国对幻方的记载总是早于希腊科学家塞翁在大约公元130年对幻方的记载。

虽然3阶幻方不能帮助大禹治水，但是除了作为益智游戏和组合数学的内容之外，还有许多实际用途。例如，在船坞上有一个3×3格的方形货仓，将重量分别为1吨、2吨、3吨……9吨的货物依次堆放进去并保持船坞的平衡，就要照3阶幻方中的那些数字来安排。既然3阶幻方这样神通广大，那我们就来看一看它有哪些神奇之处吧！

把3阶幻方的任意一行（或一列或一条对角线）上的3个数字任意排列成一

个新的 3 位数（例如 924），把它与用另外任意一行（或一列或一条对角线）上的 3 个数字同样排列成的一个新的 3 位数（例如 159）相乘，然后把所得乘积的各位数字“加到底”：924×159=146 916，1+4+6+9+1+6=27，2+7=9，最终得到 9。从“最终得到 9”，就要附带说一下洛书、河图与太极图的“神秘联系”。对河图中的数字进行类似计算，就有：27 165 × 38 495=1 045 716 675，1+4+5+7+1+6+6+7+5=42，4+2=6，最终得到 6。有人认为，一种形状（太极图有多种形状）的太极图中左边部分的数字与右边部分的数字就分别是古人十分重视的 6 和 9——通过河图、洛书与太极图来暗示。



五花八门的太极图中的一部分

用 3 阶幻方中每一列的 3 个数字分别构成 1 个 3 位数，就能看到这 3 个 3 位数之和与它们各自的“梅数”（见 1.6 节）之和相等，如 276+951+438=672+159+834=1665；而且它们各自的平方之和也相等，如 $276^2+951^2+438^2=672^2+159^2+834^2=1\ 172\ 421$。

不但如此，上述“列对应”的性质，对于行也成立，如 492+357+816=294+753+618=1 665，$492^2+357^2+816^2=294^2+753^2+618^2=1\ 035\ 369$。

还有，把 3 阶幻方中的 3×3 方格分解为 9 个 2×2 方格，见下图。此时发现，这 9 个 2×2 方格中各自的 4 个数字之和恰好是从 16 到 24 这连续 9 个自然数！

4 9	9 2	3 5	5 7	4 9	9 2	4 2	3 7	4 2
3 5	5 7	8 1	1 6	8 1	1 6	3 7	8 6	8 6
和 21	和 23	和 17	和 19	和 22	和 18	和 16	和 24	和 20

3 阶幻方分解

7	15	2
3	8	13
14	1	9

广义 3 阶幻方

最后，每行与每列数字各自的乘积之和都等于 $225=15^2$（都含中心数 5 的“基因”）：4×9×2+3×5×7+8×1×6=4×3×8+9×5×1+2×7×6=225。这个奇妙的结果对于由自然数（不一定从 1 开始且不要求连续）组成的广义 3 阶幻方也成立。例如，对右图那样的广义 3 阶幻方，也有 7×15×2+3×8×13+14×1×9=7×3×14+15×8×1+2×13×9=648=9^2×8（都含中心数 8 的“基因”）。225 的有趣巧合是，世界上最大

的水电站长江三峡水电站的总装机容量是225亿瓦。

洛书所示的3阶幻方还有7个“替身”，它们都是将它经过旋转与反射变换之后的同构幻方。

2	9	4	8	1	6	6	1	8	6	7	2	2	7	6	8	3	4	4	3	8
7	5	3	3	5	7	7	5	3	1	5	9	9	5	1	1	5	9	9	5	1
6	1	8	4	9	2	2	9	4	8	3	4	4	3	8	6	7	2	2	7	6

通过将洛书幻方旋转与反射之后形成的7个3阶同构幻方

3. 有趣的3

（1）从毕达哥拉斯到欧拉的错误猜想

3被古希腊数学家毕达哥拉斯（本书以下通常简称毕氏）称为“完美的数字”，因为它代表开始、中间和结束。“正因为”3完美，所以它的有趣“性质”无处不在。

把数学中最著名的两个超越数圆周率π和自然对数的底e各自四舍五入到个位，都得到3。由此可见，3是e和π这对“邻居”共用的“墙”。

最小的素数也是唯一的偶素数2的3次方8，是斐波那契数（列）[指1，1，2，3，5，…，以下简称F数（列）]中最大的立方数。更妙的是，2和3可以分别由[e]和[π]（[x]表示取整）得到。

如果要问有没有这样的一个自然数，从它开始的连续3个自然数各自的立方之和等于它们后面的一个自然数的立方？回答是肯定的，但只有唯一的一个：3——$3^3+4^3+5^3=6^3$。因为它似乎是二维平面的勾股定理在向三维立体延伸，所以我们称它为超勾股弦等式。列出一元三次方程求解，就得到这组唯一的自然数答案。然而，欧拉在发现了$3^3+4^3+5^3=6^3$（这个式子可以在后来的英国数学家戈弗雷·哈罗德·哈代的著作《数论导引》中找到）之后，却产生了一个有趣的错误猜想。

1769年（一说1772年），欧拉注意到$3^3+4^3+5^3=6^3$，以及依据法国数学家费马否定了一个自然数的立方可能等于另外两个自然数的立方之和，就猜想性地“推广”了费马大定理：1个自然数的4次方，不可能等于3（=4-1）个自然数各自的4次方之和（即$a^4+b^4+c^4=d^4$没有自然数解），1个自然数的5次方不可能等于4（=5-1）个自然数各自的5次方之和（即$a^5+b^5+c^5+d^5=e^5$没有自然数解；这里斜体的e不是自然对数的底，下同），等等。这个“推广”用数学式子表达就是：不定方程$\sum_{i=1}^{n-1} a_i^n = b^n$（其中自然数$n>2$）即$a_1^n+a_2^n+\cdots+a_i^n=b^n$（其中自然数$n>i$）没有自然数解。当然，欧拉在1730年研究费马大定理时，也有正确的猜测并“差

一点”证明：$a^4+b^4+c^4+d^4=e^4$ 有自然数解。他的猜测是此前 1621 年法国数学家麦齐里阿克猜测的“改良版”（把上述“有自然数解”改为有非负整数解）。麦齐里阿克还验证了小于 326 的 e，但没能证明。法国数学家笛卡儿也认为证明“实在太难了，以至于我不敢动手去找”。1770 年（一说 1772 年），意大利-法国数学家、巴黎埃菲尔铁塔上所刻“七十二贤”之一的拉格朗日首先给出了完整的证明，于是这个猜测成了拉格朗日四平方和定理。1773 年，欧拉简化了证明。

1911 年，英国数学家诺里耶发现了 $30^4+120^4+272^4+315^4=353^4$。另外，也有人说美国数学家迪克森在20世纪50年代也给出了这个式子，证实了 $a^4+b^4+c^4+d^4=e^4$ 有自然数解。距离欧拉猜想之后 197 年的 1966 年，他的“$a^5+b^5+c^5+d^5=e^5$ 没有自然数解”的猜想被美国数学家兰德尔和帕金给出的一个反例（最小反例）$27^5+84^5+110^5+133^5=144^5$ 推翻。他俩的论文《欧拉猜想的一个反例》发表在美国《计算数学》杂志 1967 年第 21 卷第 101～103 页上。而在 2004 年 8 月 27 日，另一个推翻“$a^5+b^5+c^5+d^5=e^5$ 没有自然数解”的更大的反例也被数学家吉姆·弗尔耶找到：$55^5+3183^5+28\,969^5+85\,282^5=85\,359^5$。

美国哈佛大学数学家埃尔克斯于 1988 年发表在《计算数学》上的一篇论文，又给出了他在 1986 年发现的“$a^4+b^4+c^4=d^4$ 没有自然数解”的又一个反例：$2\,682\,440^4+15\,365\,639^4+18\,796\,760^4=20\,615\,673^4$。在埃尔克斯发表论文后不久（也是在 1988 年），号称“思维机器”团体的成员、美国数学家罗杰·弗尔耶用埃尔克斯的技巧，又找到了一个推翻“$a^4+b^4+c^4=d^4$ 没有自然数解”的、有可能是最小的反例：$95\,800^4+217\,519^4+414\,560^4=422\,481^4$。而已知的大反例之一，是数学家麦克劳德于 1997 年得到的 $638\,523\,249^4=219\,076\,465^4+275\,156\,240^4+630\,662\,624^4$。不过，至今还没有找到大于 5 次方的反例。

$$\begin{aligned}&2\,682\,440^4\\&+15\,365\,639^4\\&+18\,796\,760^4\\&=20\,615\,673^4\end{aligned}$$

“$a^4+b^4+c^4=d^4$ 没有自然数解”被推翻

如果不限制自然数 $n>i$，那么还有不少结果：$12^7+35^7+58^7+64^7+83^7+85^7+90^7=102^7$，1966 年由塞尔特瑞吉给出；$2^8+3^8+5^8+6^8+8^8+9^8+10^8+14^8+15^8+21^8+26^8+36^8+47^8+65^8+93^8+137^8+227^8+379^8+958^8+960^8+961^8+\cdots+1066^8+1067^8$（从 960^8 起共 108 项）$=18\,278^7$，1972 年由一位中国学者给出；6+9+15+33+36+42+54+63+72+108+135+174+237+405+615+918+1599+3069+3362+6336+6339+…+7086+7089+7092（每一项都略去幂指数 9，从 6939 至 7092 为公差为 3 的等差数列，共连续 52 项）+13 448+20 172+26 896+36 982+30 258+40 344+43 706+50 430+168 100+221 892+339 562+500 938+759 812+1 398 592+2 582 016+7 779 668+8 441 982+8 435 344=9 339 639，1972 年由一位中国学者给出……