普通高等教育"十二五"规划教材
工 科 数 学 精 品 丛 书
海 军 院 校 重 点 教 材

工程数学（下）

第二版

主　编　戴明强　刘子瑞
副主编　任耀峰　王胜兵　金裕红　艾小川

科 学 出 版 社

普通高等教育"十二五"规划教材

工科数学精品丛书

海军院校重点教材

工程数学

（下）

（第二版）

主　编　戴明强　刘子瑞

副主编　任耀峰　王胜兵

　　　　金裕红　艾小川

科学出版社

北京

内容简介

本书共6篇30章，分为上、下两册．上册包括线性代数、概率论、数理统计等基本内容，下册包括复变函数、积分变换、数理方程与特殊函数等基本内容．全书选材适当、结构合理，每章有小结、重要词汇中英文对照，在应用性较强的章节后还配有数学实验基础知识，便于教师教学和读者自学．

本书可作为高等学校本科工学、管理学等专业教材，也可作为教研工作者的参考书．

图书在版编目(CIP)数据

工程数学．下/戴明强，刘子瑞主编．—2版．—北京：科学出版社，2015.7

(工科数学精品丛书)

普通高等教育"十二五"规划教材　海军院校重点教材

ISBN　978-7-03-045208-5

Ⅰ．①工…　Ⅱ．①戴…②刘…　Ⅲ．①工程数学-高等学校-教材　Ⅳ．①TB11

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第164501号

责任编辑：王雨舸／责任校对：董艳辉

责任印制：高　嵘／封面设计：苏　波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市首壹印务有限公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2009年8月第　一　版　开本：787×1092　1/16

2015年8月第　二　版　印张：18

2015年8月第一次印刷　字数：443 200

定价：39.50元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《工科数学精品丛书》序

工科学生毕业多年后时常感言，数学知识很多似乎没有派上用处，但数学训练、数学思想和精神，却无时无刻不在发挥着积极的作用，成为取得成功的最重要因素之一.

数学是一门高度抽象的学科，但是它非人类精神纯粹自由创造和想像，而是源于自然和工程问题.系统传授数学知识当然是工科数学教学的基本任务与责任，同时，掌握了数学的思想方法和精神实质，就可以由不多的几个公式演绎出千变万化的生动结论，显示出无穷无尽的威力.工科数学创新教学，增强数学应用背景的讲授，拓宽学生的知识面，了解数学学科在科学研究领域的重要性，为学生打开数学与应用的窗口，等等，能培养学生的创新意识与精神，提高数学思维与素养，真正达到工科数学教学的目的.

工科数学精品教材的编写与成熟，在开放的视野与背景下，得到认同，自然成为纸质教材与数字出版的精品，从而得到广泛认可和使用.

在学会、领导和专家的关怀和指导下，本区域若干所全军重点、一本和省重点高校，其工科数学教材，在科学出版社出版和再版.10余年以来，教学和教材理念从素质教育，到分类分层教学改革，到数学思想、方法与创新教育，历经各校几届班子和责任教授的共同努力，逐渐成熟，成为具有较高质量的核心精品.

教材转型与数字出版如火如荼，大趋势赫然在前，教材又重新经历新的考验.《工科数学精品丛书》正是按此理念和要求，直面开放的视野与背景，将改革与创新的成果汇集起来，重新审视和操作，精益求精，以赢得内容先机，修订版和新编教材均是如此.

修订和新编的核心理念，一是体现数学思维，将数学思想和方法(如数学建模)融入教材体系、内容及其应用；二是深化改革与创新，面向开放和数字出版的大平台，赢得先机，营造精品.

《工科数学精品丛书》为工科数学课程教材：高等数学、线性代数、概率论与数理统计、数学建模、数学实验、复变函数与积分变换、数值分析、数学物理方程、离散数学、模糊数学、运筹学等.上述各课程大多为全军级、海军级优质课程和省部级精品课程，对应教材为相应的一、二级获奖教材.

丛书注重质量，讲究适用和教学实践性，体系相对完整与系统，加强应用性，按照先进、改革与创新等编写原则和基本要求安排教材框架、结构和内容.

丛书具有明确的指导思想：

(1) 遵循高等院校教学指导委员会关于课程的教学基本要求，知识体系相对完整，结构严谨，内容精炼，循序渐进，推理简明，通俗易懂.

(2) 注重教学创新，加强教学知识与内容的应用性，注重数学思想和方法的操作与应用及其实用性.增强数学应用背景的介绍，拓宽学生的知识面，了解数学学科在科学研究

领域的重要性，为学生打开数学与应用的窗口，培养学生的创新意识与精神，提高数学思维与素养，真正达到工科数学教学的目的.

（3）融入现代数学思想（如数学建模），分别将 Mathematic、Matlab、Sas、Sps 等软件的计算方法，恰当地融入课程教学内容中，培养学生运用数学软件的能力.

（4）强化学生的实验训练和动手能力，可将实验训练作为模块，列入附录，供教学选用或学生自学自练，使用者取舍也方便.

（5）教材章后均列出重要概念的英文词汇，布置若干道英文习题，要求学生用英文求解，以适应教育面向世界的需要，也为双语教学打下基础.

（6）为使学生巩固知识和提高应用能力，章末列出习题，形式多样.书后配测试题，书末提供解题思路或参考答案.

丛书为科学出版社普通高等教育“十二五”规划教材.

《工科数学精品丛书》编委会

2015 年 1 月

前　　言

《工程数学》是继《高等数学》之后的又一门重要的基础课程，它包括线性代数、概率论、数理统计、复变函数、积分变换和数理方程等内容.

本教材曾于1995年在海军工程大学内部出版，在使用了五年后进行过一次改编. 2009年正式出版又经过一次内容有较大幅度调整的改编，在编写过程中，我们吸收了国内外同类教材的优点，并结合多年教学实践的经验，注意了理论知识实际背景的介绍、学科发展历程的叙述和数学应用软件的简介，增强了实用性. 在内容取舍、例题选择、习题配备以及叙述方式上，注意反映教学的特点和要求. 在应用性较强的章节后配备了相应的数学软件知识和程序实例，为同步进行的数学实验打下基础，帮助读者更好地体会数学的工具作用. 重要的词汇给出了中英文对照，留下延伸阅读的接口. 每章后进行了简明扼要的小结，可以帮助读者理清基本内容纲要，并便于教学和自学. 第一版于2013年获海军优秀教材一等奖. 第二版的编写融入我们近五年工科数学教学实践的体会，在保留原书基本框架和特色的基础上，主要改编了第三篇第13章和第五篇，并根据教学的需要，更新了其余篇章的部分内容、例题和习题.

本书努力打造鲜明的特色，体现如下：

1. 根据教学大纲要求，在整体框架方面，保证了基本概念、基本理论和基本方法的完整. 在具体内容取舍上，则结合教学实际，侧重于工程数学的基本方法，同时又兼顾了理论上的系统性和逻辑上的严谨性.

2. 概念、理论和方法的引入，注重说明它们的实际背景，体现实践、理论、再实践的认识论原则。精心组编的教学内容，由一层知识到另一层知识，力求体现事物的矛盾运动。读者用心读完这套教材，不仅可以学到相关知识和科学思维方式，也能受到严密逻辑的训练.

3. 讲基础联系前沿，讲近代不忘历史. 在介绍工程数学主体知识的同时，注意选择结

合点，用少量的笔墨介绍有关的科学发展的史实，或点缀一下发展前沿的成就，用以开阔读者视野，激发求知欲望。

4. 全书融入编者多年的教学实践经验，在基本知识内容编排上注重读者理解和掌握，在延伸知识编排上注重读者继续学习的需要.

本书的编写大纲由戴明强拟定，戴明强、刘子瑞任主编，任耀峰、王胜兵、金裕红、艾小川任副主编. 全书共 6 篇 30 章，第一篇由戴明强编写，第二篇由任耀峰编写，第三篇由金裕红编写，第四篇由刘子瑞编写，第五篇由艾小川编写，第六篇由王胜兵编写. 全书由戴明强、刘子瑞统稿。

本书被海司院校部列为海军级重点教材，它的出版得到了海军工程大学各级领导和机关的关心和支持. 熊萍、瞿勇、孙慧玲、王玉琢、袁昊劼等同事在教材编写过程中提供了热情的帮助，在此表示衷心的感谢。本书编写参考了大量资料，对于书末所列参考书目的作者们也要表示由衷的敬意和真诚的感谢.

由于编者水平有限，不足之处在所难免，敬请批评指正.

编　者

2015 年 4 月

目　录

第四篇　复变函数

第四篇

GONG CHENG SHU XUE

复变函数

高等数学的研究对象是自变量为实数，函数值亦为实数的实函数，从映射的观点看，实函数是实数到实数的映射，理论的探讨和生产实践的发展，又提出了对复变函数的研究也即复数到复数之间的映射，研究复变数之间的相互依赖关系，就是复变函数的主要任务.

意大利数学家卡尔达诺(H. Cardano，1545 年)在解代数方程时，首先产生了复数开方的思想，出现了 $\sqrt{-15}$，但这只不过是一种纯形式的表示，当时谁也不知道这样的表述有什么好处，用类似形式的数进行计算又得到一些矛盾，因而长期以来都被视为不能接受的虚数，一直到 17 世纪和 18 世纪，随着微积分的发明与发展，情况才逐渐有了改变，负

数开方以及所对应的复数逐渐被人们所认识.

关于复数理论最系统的论述，是由瑞士数学家欧拉(L. Euler)作出的. 他在 1777 年系统地建立了复数理论，发现了复指数函数和三角函数之间的关系，创立了复变函数论的一些基本定理，用符号“i”作为虚数单位，也是他首创的，此后复数才被人们广泛承认和使用.

在 19 世纪，复变函数的理论经过法国数学家柯西(A. Cauchy)、德国数学家黎曼(B. Riemann)和魏尔斯特拉斯(K. Weierstrass)的巨大努力，形成了非常系统的理论，并且深刻地渗入到代数学、数论、微积分方程等数学分支，同时，它在热力学、流体力学、电学等方面也有很多应用.

20 世纪以来，复变函数已被广泛地应用在理论物理、弹性理论、天体力学等方面，与数学中其他分支的联系也日益密切，致使经典的复变函数理论，如整函数与亚纯函数理论、解析函数的边值问题等有了新的发展和应用，并且开辟了一些新的方向，如多元复变函数论、广义解析函数论等.

复变函数研究的中心对象是解析函数，因此，复变函数论又称为解析函数论.

由于实数是复数的特殊情况，因此复变函数理论中的许多结论与实函数中是类似的. 在学习复变函数中，我们应注意与高等数学中关于实函数中的概念和性质进行比较，找出其共同点，但更重要的是找出其不同点，这样便于我们从更高的角度认识问题、研究问题. 这也是学好复变函数课程行之有效的方法.

第 15 章 复数与复变函数

本章介绍复数的概念、复数的运算以及复数的几种不同表示方法，使读者对复数有一些基本的了解，同实变数一样，每一个复变数都有自己的变化范围，由此引入区域的概念并在此基础上引入复变函数的概念以及复变函数的极限及连续性等概念，它们是高等数学中函数、极限及连续概念的推广.

15.1 复数及其代数运算

复数的概念来源于解代数方程，例如方程 $x^2=-1$ 在实数范围内无解，若令 $\mathrm{i}^2=-1$，则 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ 为方程 $x^2=-1$ 的解，称 i 为虚数单位.

形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 或 $z=x+y\mathrm{i}$ 的数，称为复数，其中 x 和 y 是任意实数，分别称为复数 z 的**实部**和**虚部**，常记为

$$x=\mathrm{Re}(z),\quad y=\mathrm{Im}(z)$$

两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 的加、减、乘法运算定义如下：

$$(x_1+\mathrm{i}y_1)\pm(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2)$$

$$(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)$$

以上两式分别称为复数 z_1 与 z_2 的和、差与积.

称满足 $z_2\cdot z=z_1(z_2\neq 0)$ 的复数 z 为 z_1 与 z_2 的商，记为$\dfrac{z_1}{z_2}$，由乘法定义，得

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

容易验证复数的加法满足交换律和结合律，复数的乘法满足交换律与结合律，且满足乘法对于加法的分配律.

实部为 0 的复数称为纯虚数，复数 $x+\mathrm{i}y$ 与 $x-\mathrm{i}y$ 称为**共轭复数**，即 $x+\mathrm{i}y$ 是 $x-\mathrm{i}y$ 的共轭复数，或 $x-\mathrm{i}y$ 是 $x+\mathrm{i}y$ 的共轭复数. 复数 z 的共轭复数记为$\bar{z}$，于是

$$x-\mathrm{i}y=\overline{x+\mathrm{i}y}$$

共轭复数满足以下运算性质：

性质 1 $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$，$\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$，$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

性质 2 $\bar{\bar{z}}=z$

性质 3 $z\cdot\bar{z}=[\mathrm{Re}(z)]^2+[\mathrm{Im}(z)]^2$

性质 4 $z+\bar{z}=2\mathrm{Re}(z)\quad z-\bar{z}=2\mathrm{i}\mathrm{Im}(z)$

全体复数并引进上述算术运算后就称为复数域.实数域和复数域都是代数中所研究的“域”的实例.和实数域不同的是，在复数域中不能规定复数的大小.

注：在计算$\dfrac{z_1}{z_2}$时，常利用共轭复数的性质3，分子分母同乘以分母的共轭复数.

例 15.1 设$z_1 = 5 - 5\mathrm{i}$，$z_2 = -3 + 4\mathrm{i}$，求$\dfrac{z_1}{z_2}$及$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

解

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5-5\mathrm{i}}{-3+4\mathrm{i}} = \frac{(5-5\mathrm{i})(-3-4\mathrm{i})}{(-3+4\mathrm{i})(-3-4\mathrm{i})}$$

$$= \frac{(-15-20)+(15-20)\mathrm{i}}{25} = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}\mathrm{i}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = -\frac{7}{5} + \frac{1}{5}\mathrm{i}$$

例 15.2 设$z = -\dfrac{1}{\mathrm{i}} - \dfrac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$，求$\mathrm{Re}(z)$，$\mathrm{Im}(z)$与$z\bar{z}$.

解 $z = -\dfrac{1}{\mathrm{i}} - \dfrac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = -\dfrac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}} - \dfrac{3\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})} = \mathrm{i} - \left(-\dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2}\mathrm{i}\right) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

所以

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{3}{2},\quad \mathrm{Im}(z) = -\frac{1}{2},\quad z\bar{z} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$$

例 15.3 设$z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$，$z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$，证明：$z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$

证 $z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2} = 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$.

15.2 复数的几何表示

1. 复平面

由于任一复数$z = x + \mathrm{i}y$与一对有序实数(x, y)成一一对应，所以，对于平面上给定的直角坐标系，复数$z = x + \mathrm{i}y$可以用该平面上坐标为(x, y)的点来表示，x轴称为实轴，y轴称为虚轴，两轴所在的平面称为复平面或z平面.这样复数与复平面上的点成一一对应，所以常把点z称为复数z.

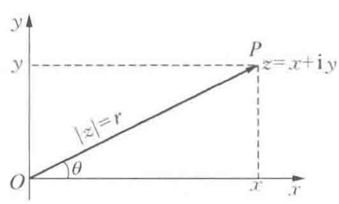

图 15.1 复数的向量表示

复数z还能用从原点指向点(x, y)的平面向量来表示（图 15.1），向量的长度称为z的**模**或**绝对值**，记为

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

以下各式的成立是显然的

$$|x| \leqslant |z|,\quad |y| \leqslant |z|,\quad |z| \leqslant |x| + |y|,\quad z\bar{z} = |z|^2 = |z^2|$$

在$z \neq 0$的情况下，表示z的向量与x轴正向间的交角θ称为z的**辐角**，记为$\mathrm{Arg}\, z$.

显然

$$\tan(\operatorname{Arg} z) = \tan\theta = \frac{y}{x}$$

若 θ 是 $z \neq 0$ 的辐角，则 $\theta + 2k\pi$（k 为整数）也是 z 的辐角.

$$\operatorname{Arg} z = \theta + 2k\pi \text{ 为 } z \text{ 的全部辐角 } (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

在 z 的辐角中，我们把满足 $-\pi < \theta_0 \leqslant \pi$ 的 θ_0 称为 $\operatorname{Arg} z$ 的主值，记为 $\arg z$.

当 $z = 0$ 时，$|z| = 0$，此时 z 的辐角不确定.

两个复数 z_1 与 z_2 的加、减法运算和相应向量的加减法运算一致.

利用直角坐标和极坐标的关系 $\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases}$ 可以把 z 表示成下面的形式

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \quad \text{（该形式称为复数的三角表示法）}$$

利用高等数学中介绍过的欧拉公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$$

得 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，把该形式称为复数的指数表示法.

复数的各种表示法可以相互转换，下面是一些例子.

例 15.4 将下列复数化成三角表示式与指数表示式.

(1) $z = -\sqrt{12} - 2\mathrm{i}$ (2) $z = 1 - \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi \ (0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$

解 (1) $r = |z| = \sqrt{12+4} = 4$，$\tan\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{-2}{-\sqrt{12}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

由于 z 在第三象限，所以 $\theta = -\dfrac{5}{6}\pi$. 由此得 z 的三角表示式

$$z = 4\left[\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right]$$

z 的指数表示式为 $z = 4\mathrm{e}^{-\frac{5}{6}\pi\mathrm{i}}$.

(2)
$$\begin{aligned} & 1 - \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi \\ = & 2\sin^2\frac{\varphi}{2} + \mathrm{i}\cdot 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = 2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\sin\frac{\varphi}{2} + \mathrm{i}\cos\frac{\varphi}{2}\right) \\ = & 2\sin\frac{\varphi}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right)\right] = 2\sin\frac{\varphi}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right)} \end{aligned}$$

例 15.5 求下列方程所表示的曲线.

(1) $|z - \mathrm{i}| = 2$ (2) $|z - 2\mathrm{i}| = |z + 2|$ (3) $\operatorname{Im}(\mathrm{i} + \bar{z}) = 4$

解 (1) 从几何上可以看出，$|z - \mathrm{i}| = 2$ 表示以 i 为中心，半径为 2 的圆周（图 15.2(a)）. 事实上该圆周的直角坐标方程为：$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 2$，即

$$x^2 + (y-1)^2 = 4$$

(2) 该方程表示到点 2i 和 -2 距离相等的点的轨迹，所表示的曲线就是连接点 2i 和

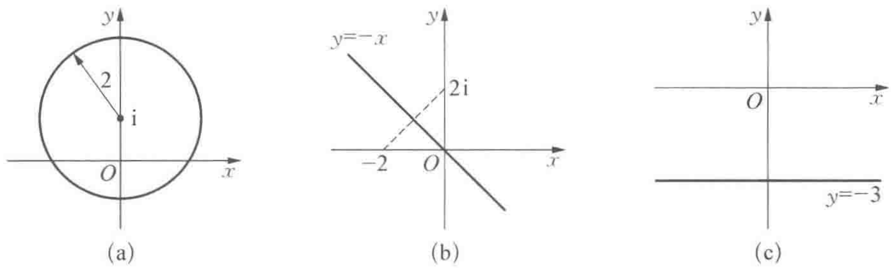

图 15.2　复数方程表示曲线

−2 的线段的垂直平分线(图 15.2(b)),它的方程为 $y=-x$.

(3) 设 $z=x+\mathrm{i}y$, 则 $\mathrm{i}+\bar{z}=x+(1-y)\mathrm{i}$, 所以 $\mathrm{Im}(\mathrm{i}+\bar{z})=1-y$ 从而可求得曲线方程为 $y=-3$, 即一条平行于 x 轴的直线(图 15.2(c)).

2. 复球面

除了用平面内的点或向量来表示复数外,还可以用球面上的点来表示复数,下面介绍此方法.

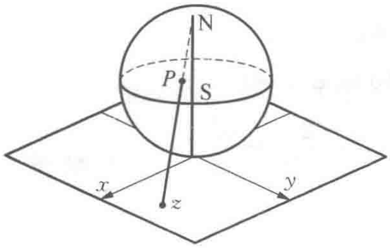

图 15.3　复球面

取一个与复平面切于原点 $z=0$ 的球面,球面上的一点 S 与原点重合,通过 S 作垂直于复平面的直线与球面相交于 N 点. 我们称 N 为北极,S 为南极(图 15.3).

考虑起点在北极 N 并通过球面上任意点 P 的射线,它与 xOy 平面相交于一点,记作 z;反之,起点在北极 N 并通过 xOy 平面上任一点 z 的射线与球面也只交于一点. 这样,xOy 平面上所有的点与球面上所有的点(除了北极 N 以外)就建立了一一对应关系. 由前述可知,复数可以视为复平面内的点,所以我们就可以用球面上的点来表示复数.

但是,对于球面上的北极 N,还没有复平面内的一个点与它对应. 为了使复平面与球面上的点都能一一对应起来,规定:复平面上有一个唯一的“无穷远点”,它与球面上的北极 N 相对应. 相应地,我们又规定:复数中有一个唯一的“无穷大”与复平面上的无穷远点相对应,并把它记为∞,因而球面上的北极 N 就是复数无穷大∞的几何表示. 这样,球面上的每一个点,就有唯一的复数与它对应,这样的球面称之为复球面.

复平面再加上无穷远点称为扩充复平面. 对复数∞而言,实部、虚部与辐角的概念均无意义. 注意,这里的无穷远点∞不像在微积分中把它视为符号,而是视为一个确定的点. 这个点的引入既是为了今后理论上的需要,也是为了能够更好地反映客观事物.

关于∞的四则运算作以下规定(设 z 是复数)

$$\infty+z=z+\infty=\infty,\quad \infty-z=z-\infty=\infty$$

$$\infty\cdot z=z\cdot\infty=\infty\quad (z\neq 0)$$