初中重难点突破宝典

MATHS

BAODIAN

突破宝典

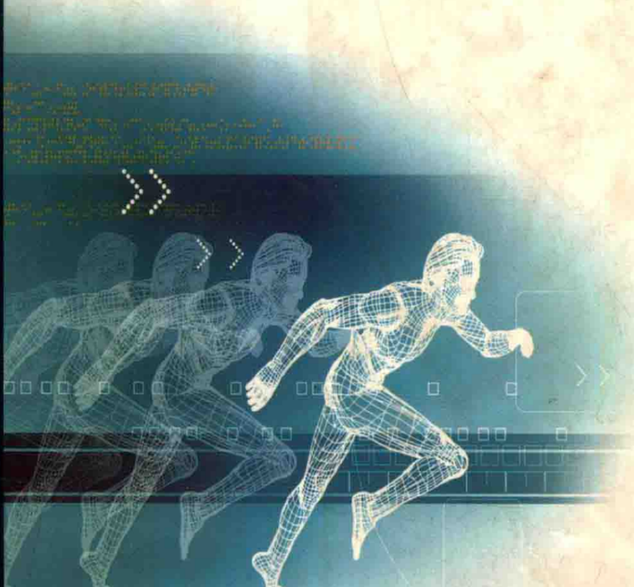
初三

数学

主　编　叶尧城

副主编　冯善庆

孙延洲



湖北教育出版社

初中重难点突破宝典

突破宝典

BAODIAN

主　编　叶尧城
副主编　冯善庆　孙延洲
编　委　许第二　谭崇坤
　　　　陈士云

初三 数学

湖北教育出版社

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

初三数学重难点突破宝典/叶尧城主编. —2 版.
—武汉:湖北教育出版社,2002
ISBN 7-5351-2707-X

Ⅰ.初…　Ⅱ.叶…　Ⅲ.数学课-初中-教学参考资料　Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 095557 号

出版　发行:湖北教育出版社　武汉市青年路 277 号
网址:http://www.hbedup.com　邮编:430015　电话:027-83619605
邮购电话:027-83669149

经　销:新　华　书　店
印　刷:文字六〇三厂印刷　(441021·湖北襄樊盛丰路 45 号)
开　本:850mm×1168mm　1/32　13.75 印张
版　次:2003 年 8 月第 2 版　2003 年 8 月第 2 次印刷
字　数:350 千字　印数:10 001—15 000

ISBN 7-5351-2707-X/G·2201　定价:16.00 元

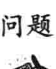
前　言

《初中重难点突破宝典》(数、理、化)是依据九年义务教育初中各科最新教学大纲规定的任务和要求,为培养面向21世纪初中学生应具备的学科素质和能力而编写的。旨在密切配合初中各科教学,拓宽学生的知识面,提升学生的综合素质。本书将通过对精典例题的分析与说明,导出学习中的重难点,再对重难点知识进行消化、分解、综合,总结学习方法,归纳认知规律,拓展思维路径,使学生能掌握并运用知识解决问题,且能在应用能力与创新意识上有所突破。

根据当前初中数理化教学的实际需要及学生的知识结构,《初中重难点突破宝典》按教材中的顺序分章节进行编写,每章节由以下四部分组成:

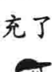
精典题解 *Learn*

精选典型例题进行精炼讲解,力求使每道例题都能对该章节的重点或难点有所反映。在分析中着重注意问题的解题思维,阐释思想方法,引导读者掌握分析问题、解决问题的方法(重点突出解决问题的通法),并给出较为详细规范的解答。



重难点透析 *Understand*

重点剖析本章的重难点知识,说明重在何处,难在哪里,如何理解,怎样归纳、拓展,以知识为载体培养学生分析问题和解决问题的能力。同时,为进一步加强对重难点知识的理解和把握,也适当补充了一些例子加以阐述。



突破训练 *Try*

依据剖析的本章内容的重难点,有针对性地精选一些习题供

学生练习。其中带★号的习题稍稍增加了一些思维强度和综合度。

创新与应用 Create

为积极贯彻国家教育部有关实施素质教育的文件精神，在本书中特选了一些与生产和生活实际相关的学科问题及创新题型，着意培养综合能力、创新意识和创新能力。

在每章学习结束后，我们均给出了一组单元训练题，其目的是使学生巩固所学的有关知识，同时也便于教师对学生反馈的情况进行评价与调控。书末附有3套综合测试题以及参考答案。

“精、实、新”是本书的主要特色，我们在编写过程中力求例题精、讲解精、习题精；用朴实的文笔，使内容较为充实，能为学生打下扎实的基础；同时在选编例习题时，注意了选用近两年出现的新颖问题和最新题型，培养学生的创新意识和创新能力，从而使得本书具有较强的针对性、启发性、实用性和指导性。

参加本丛书编写的均是湖北省一线优秀的特级教师和高级教师，他们不仅教学经验丰富，而且极富开拓精神，为奉献给读者真正实用的精品，在萃取和钻研最新资料上下了很深的功夫。相信读者在使用本书的过程中就有体会。

在编写和审校中，尽管我们力求避免失误，但疏漏之处仍恐在所难免，敬请广大读者批评指正。

编者

2002年1月21日

目　录

代　数

代 数

第十二章　一元二次方程

12.1　一元二次方程

精典题解

例 1　下列关于 x 的方程，一定是一元二次方程的是（　　）.

(A) $(m-4)x^2+(\sqrt{3}-2)x+m+3=0$

(B) $m^2x+m+5=0$

(C) $\sqrt{5}x^2-\frac{\sqrt{3}}{a}x+\frac{1}{m}=0$

(D) $-4x^2+x^{-1}+3=0$

分析　判断一个方程是否是一元二次方程应紧扣定义——只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的整式方程叫一元二次方程．

解　(A)方程中最高次项为 $(m-4)x^2$，因无法判定 $(m-4)$ 是否为零，从而不能确定该方程是否为一元二次方程．

(B)方程中关于未知数 x 的最高次项是 m^2x，且当 $m\neq0$ 时，x 的最高次数为 1，故该方程不是一元二次方程．

(C)是一元二次方程．题目中的一次项为 $\frac{\sqrt{3}}{a}x$，系数是字母系数，不能误认为它是分式方程．

(D)方程中 x^{-1}实际上是$\dfrac{1}{x}$,分母中含有未知数是分式方程,所以不是整式方程,也一定不是一元二次方程 .

说明　本题的关键在于正确理解一元二次方程概念,应把握以下三点:1. 方程必须是整式方程;2. 只含有一个未知数;3. 未知数的最高次数是 2.

例 **2**　把关于 x 的方程 $ax^2-x-\sqrt{2}x+\sqrt{3}x^2+b=c$($a$ 为有理数)化成一般形式,并指出它的二次项系数、一次项系数及常数项 .

分析　任何关于 x 的一元二次方程经过整理,都可以化成 $ax^2+bc+c=0(a\neq0)$的一般形式,方程的二次项系数、一次项系数及常数项是在方程为一般形式的前提下而言的 .

解　移项,合并同类项,得方程的一般形式

$$(a+\sqrt{3})x^2-(1+\sqrt{2})x+b-c=0.$$

因为 a 为有理数,所以 $a+\sqrt{3}\neq0$.

所以方程的二次项系数为$(a+\sqrt{3})$,一次项系数为 $-(1+\sqrt{2})$,常数项是$(b-c)$.

说明　本题重点考查对一元二次方程一般形式的认识 . 在指出二次项系数时,若二次项系数含有字母,应对二次项系数是否为零加以分析 . 同时要密切注意各项系数及常数项的符号,尤其是负号,如本例中一次项的系数为 $-(1+\sqrt{2})$,不要写成$(1+\sqrt{2})$.

例 **3**　方程$(m^2-4)x^2+(m-2)x+5m-1=0$,(1)当 $m\neq$ ±2 时,方程为一元二次方程;(2)当 $m=$ -2 时,方程为一元一次方程 .

分析　(1)考查一元二次方程的一般式附加条件,解题关键是令二次项系数不等于零,解此不等式即可 .

(2)关键是使二次项系数为 0 而一次项系数不为零,即为一元一次方程,解此不等式组即可 .

解　(1)由 $m^2-4\neq0$,得 $m\neq\pm2$.

所以，当 $m \neq \pm 2$ 时方程为一元二次方程

(2)由$\begin{cases} m^2-4=0, \\ m-2\neq 0, \end{cases}$得 $m=-2$.

所以，当 $m=-2$ 时，方程为一元一次方程．

说明　一元二次方程定义在解题中占有相当重的份量，特别是对其二次项系数 $a\neq 0$ 要重点把握，不可忽视．

重难点透析

1．本节的重点是一元二次方程概念理解，难点是把不是一般形式的一元二次方程化为一般形式．对于这个概念，应从如下几点加以理解：

(1)方程两边都是关于未知数的整式．如方程 $2x^2-\frac{1}{x}=0$、$x^2-x^{-1}=0$ 均不是一元二次方程；

(2)方程只含有一个未知数；

(3)方程经整理后最高次数为 2，即可化为 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$形式，特别注意 $a\neq 0$.

如方程 $x^4+3x^2-2y-8x=-2y+x^4-9$ 是一元二次方程，因为方程两边 x^4-2y 可以消去．

而方程 $x^2-mx(2x-m-1)=x$ 就不一定是一元二次方程了．因为整理后的方程是$(1-2m)x^2+(m^2+m-1)x=0$，当 $m\neq\frac{1}{2}$时它是一元二次方程；当 $m=\frac{1}{2}$时它为 $-\frac{1}{4}x=0$，是一元一次方程．

显然方程 $4x^2+5x+1=4x^2-6x$ 也不是一元二次方程．想一想为什么？

2．二次项系数含字母的方程，是考查一元二次方程概念的重点题型，学习时应高度重视．如例 1 中(A)方程若加上 $m\neq 4$ 的条件，该方程就是关于 x 的一元二次方程，例 2 中因为 a 为有理数，所以二次项系数 $a+\sqrt{3}\neq 0$ 等．还有一类方程如$(a^2+1)x^2+bx+$

$c=0$，不论 a 为任何实数，$a^2+1>0$，所以该方程是关于 x 的一元二次方程．

3．一元二次方程的一般形式是一元二次方程概念的延伸，又是继续学习一元二次方程问题的需要．要求会把一个一元二次方程化为一般形式，并能准确说出二次项系数、一次项系数和常数项．特别要注意系数所带的负号，在例2中，即使没有指出先把方程化为一般形式，只要求写出方程的二次项系数、一次项系数和常数项，在解题时，也要把方程先化成一般形式．这是因为方程各项系数和常数项是在方程为一般形式的前提下而言的．

突破训练

1．判断

(1)方程 $ax^2+bx+c=0$ 是一元二次方程．（　）

(2) $(\pi-2)x^2+2x^{-1}-1=0$ 是一元二次方程．（　）

(3)一元二次方程 $7x^2+32x=-5$ 的二次项系数是7，一次项系数是32，常数项是5．（✓）

2．（甘肃省，1998）$px^2-3x+p^2-p=0$ 是关于 x 的一元二次方程，则（C）

(A) $p=1$　(B) $p>0$　(C) $p\neq0$　(D) p 为任意实数

3．下列方程是一元二次方程的是（C）

(A) $ax^2+bx+c=0$　(B) $ax^2+bx+c\quad(a\neq0)$

(C) $(k^2+1)x^2+(k-2)x+3=0$　(D) $(k^2-1)x^2+x^{-1}+5=0$

4．方程 $5x^2-7=0$ 的一次项系数是__0__．

5．若关于 x 的方程 $(k-2)x^2+3x+1=0$ 是一元二次方程，则 k $\neq 2$．

6．当 $m\neq$__±1__时，方程 $(m^2-1)x^2-(m-1)x+\frac{1}{4}=0$ 是关于 x 的一元二次方程；当 $m=$__1__时，上述方程是关于 x 的一元一次方程．

7．把下列方程先化成一元二次方程的一般形式，再写出它的二次项系数、一次项系数及常数项．

(1) $3x(x-1)=2(x+2)+8$；　$3x^2-5x-22=0$

(2) $(x+1)^2-3(x-1)^2=5x-7$；　$2x^2-3x-5=0$

(3) $k^2x^2+(x-1)(2x+3)-mx=0$；

(4) $ax^2 - bx + ax = m - n - bx^2 + cx^2$. $(a + b - c \neq 0)$

创新与应用

8. 关于 x 的方程 $ax^b - cx - 20 = 0$ 是一元二次方程的条件是 a≠0, b=2 ,是一元一次方程条件是 a=0 C≠0 .

9. 把方程 $(x+3)(x-1) = x(1-x)$ 整理成一般形式,再算出 $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 的值. $2x^2+x-3=0$ $(-\frac{3}{2}$ 或 $1)$

a=1, b=0 10. 若 $x^{2a+b} - 2x^{a-b} + 3 = 0$ 是关于 x 的一元二次方程,求 a, b 的值. 或

a=b=$\frac{2}{3}$ 11. 若 $3x^{2m-1} + 2x^2 - 10x + 1 = 0$ 是关于 x 的一元二次方程,求 m. m=$\frac{3}{2}$

12. 关于 x 的方程 $(m-1)x^{|m-1|} - 2x^{m+1} + m = 0$ 是一元二次方程,求 m.

m=-1

12.2 一元二次方程的解法

精典题解

例 1 解方程 $6(4x-1)^2 - 24 = 0$.

分析 移项后可用直接开方法解

解 移项得 $6(4x-1)^2 = 24$

在方程两边同时除以 6,得

$$(4x-1)^2 = 4,$$

解这个方程,得

$$4x - 1 = \pm 2,$$

$$\therefore x_1 = \frac{3}{4}, x_2 = -\frac{1}{4}.$$

说明 本题用直接开方法解一元二次方程. 直接开平方法是解一元二次方程最基本的方法,其特征是方程的一边是完全平方式,另一边是一个非负常数.

例 2 用配方法解方程 $x^2 + 6mx + 5m^2 = 0$.

分析 可把 m 当成字母系数(已知数),方程经过移项、配方

后变为形如$(ax+b)^2=c$方程．

解　移项，得$x^2+6mx+5m^2=0$，

配方，得

$$x^2+6mx+9m^2=-5m^2+9m^2,$$

即$(x+3m)^2=4m^2$.

$\because 4m^2\geqslant 0$,

$\therefore x+3m=\pm 2m$,

$\therefore x_1=-m, x_2=-5m$.

☞说明　配方法是解一元二次方程的重要方法．熟练掌握完全平方式是配方法解题的基础，是导出求根公式的关键．对于二次项系数是1的方程，直接将常数项移到等式的右边后，再在方程两边同时加上一次项系数一半的平方即可．若二次项系数不为1，一般应先将二次项系数化为1，然后再配方较简便．当然，根据具体情况也可作灵活处理，如解方程$9x^2+6x=5$，就可在方程两边同时直接加1，即$9x^2+6x+1=6$，得$(3x+1)^2=6$即可，没有必要把二次项系数化为1.

例3　用公式法解方程$x^2+2(m-n)x=4mn$.

分析　先化为一般形式，然后套用一元二次方程求根公式．

解　移项，得

$$x^2+2(m-n)x-4mn=0.$$

$\because a=1, b=2(m-n), c=-4mn$,

$$\begin{aligned}\therefore b^2-4ac &=[2(m-n)]^2-4\cdot 1\cdot(-4mn)\\ &=4(m^2-2mn+n^2)+16mn\\ &=4(m^2+2mn+n^2)\\ &=4(m+n)^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore x &=\frac{-2(m-n)\pm\sqrt{4(m+n)^2}}{2\times 1}=\frac{-2(m-n)\pm 2(m+n)}{2}\\ &=(m-n)\pm(m+n),\end{aligned}$$

$\therefore x_1=2m, x_2=-2n$.

☞说明　一般来说，一元二次方程都能用公式法求解．用公式

法解一元二次方程有时计算量较大，解方程时应首先将方程化为一般形式，然后确定二次项系数、一次项系数及常数项，最后套用公式．正确确定各项系数和常数项，这是确保用公式法正确解题的关键．

例 **4**　解方程 $5a^2x^2+6ax+1=0.(a\neq0)$.

分析　因方程左边可用十字相乘法分解因式，故用因式分解法．

解　将方程左边因式分解，得

$$(5ax+1)(ax+1)=0,$$

$$\begin{array}{ccc} 5a & \times & 1 \\ a & & 1 \end{array}$$

$$\therefore 5ax+1=0 \text{ 或 } ax+1=0.$$

$$\because a\neq0,$$

$$\therefore x_1=-\frac{1}{5a},x_2=-\frac{1}{a}.$$

说明　相对于用配方法、公式法解方法而言，用因式分解法解一元二次方程特点是计算特别简便直观实用，但并不是所有的一元二次方程都可以很直观地用因式分解法来解，只有具备方程的一边是零，另一边是可分解为两个一次因式之积时，才可用此法.其解法根据是：如果两个因式的积等于零，那么这两个因式中至少有一个因式等于零．

例 **5**　解方程 $(2x+3)^2+8x+15=0$.

分析　因 $8x+15=4(2x+3)+3$，故可将 $(2x+3)$ 当作一个整体，用因式分解法．

解　原方程可变形为

$$(2x+3)^2+4(2x+3)+3=0.$$

$$\therefore[(2x+3)+3][(2x+3)+1]=0,$$

$$\therefore(2x+3)+3=0 \text{ 或 } (2x+3)+1=0,$$

$$\therefore x_1=-3,x_2=-1.$$

说明　利用换元思想意识，可把某些方程特定的部分当成一个整体，并适当加以变形整合，可使解方程解题过程变得简便．

例 **6**　解方程 $x^2-3|x|-4=0$.

分析　对未知数正负值进行分类讨论去绝对值符号，再求解，且对求出的解进行检验，去增根．

解　当 $x \geqslant 0$ 时，原方程为 $x^2-3x-4=0$，解这个方程得 $x_1=4$，$x_2=-1$．

$\because x \geqslant 0$，$\therefore x=4$

当 $x<0$ 时，原方程为 $x^2+3x-4=0$，解这个方程得 $x_3=-4$，$x_4=1$．

$\because x<0$，$\therefore x=-4$．

$\therefore$ 原方程根为 4 或 -4．

说明　解含绝对值符号方程，一般先要分类讨论脱去绝对值符号，得到若干个方程，再分别解这些方程，注意解得的根一定要检验．

例 7　x 取何值时，代数式 $\dfrac{x^2-2\sqrt{5}x+5}{x^2-5}$ 的值为 0?

分析　可根据分式分子值为 0 而分母值不为 0 求出 x 值．

解　依题意，得

$$\begin{cases} x^2-2\sqrt{5}x+5=0 & (1) \\ x^2-5 \neq 0 & (2) \end{cases}$$

由(1)得 $x_1=x_2=\sqrt{5}$，由(2)得 $x \neq \pm\sqrt{5}$．

$\therefore$ 不论 x 取何值，原代数式值不为 0．

说明　本题考查分式值为 0 的条件，易错点是忽视分母 $x^2-5 \neq 0$，解题关键是分式值为 0 必须分子值为 0 而分母值不为零．

例 8　已知 $x^2-4xy+3y^2=0$，求 $x:y$ 值

解　等式左边分解因式，得

$$(x-3y)(x-y)=0$$

$\therefore x-3y=0$ 或 $x-y=0$

$\therefore x=3y$ 或 $x=y$

$\therefore x:y=3:1$ 或 $x:y=1:1$

说明　本题解题关系是把其中一个字母当成已知数，解另一

个字母的方程．

重难点透析

1．能熟练地运用四种方法解一元二次方程是本章的重点．这四种方法中，直接开平方法是建立在数的开方基础上；配方法是以直接开平方法为基础；公式法是配方法直接推出结果；因式分解法是把一元二次方程转化成两个一元一次方程来解，突出了“降次”转化求解的思想．

2．配方法是本章教材的难点．是导出求根公式的关键，也是代数变形中的一种重要方法，在以后的学习中会常用到，学好配方法有助于深刻理解本章所学内容．

3．本节的又一难点是在解方程时对各种方法的选择．突破这一难点的关键是在对四种方法都会使用的基础上，熟悉各种方法的优缺点，处理好特殊方法和一般方法的关系．配方法和公式法对所有的一元二次方程都适用，直接开方法和因式分解法只对具备相应特征的方程才适用．用公式法解方程是常用方法之一，尽管用此法解方程计算量较大，但在学习时应适当加强训练，力争达到熟练的程度．

4．优选一元二次方程解法可按如下思路处理：

(1)遇到有 $ax^2=c$ 或 $a(x+b)^2=c$ 的情况，选用直接开平方法．

(2)除直接开平方法之外，首先考虑因式分解法，因为这种方法比较简便．如 $x^2-(\sqrt{5}+\sqrt{2})x+\sqrt{10}=0$，左边易因式分解(右边是 0)，所以用因式分解法解较好．

(3)当用其他方法不便时，可选用配方法或公式法．

突破训练

1.(大连市,2001)方程 $x^2-4=0$ 的解为 (　　)

(A) $x=2$　　(B) $x=-2$

(C) $x_1=2\quad x_2=-2$　　(D) $x_1=-\sqrt{2}.\ x_2=\sqrt{2}$