

张宇
▶

CLASSIC

考研数学题源探析

经典 1000 题

(习题分册·数学三)

1000
EXERCISES
ON MATHS
□ Mr. Zhang

主编
张宇

2017



张宇
▶

CLASSIC

考研数学题源探析
经典1000题

(习题分册·数学三)

张宇 主编

编委 (按姓氏拼音排序): 蔡燧林 高昆轮 胡金德 万金平 乌日罕

亦一 (笔名) 于吉霞 曾凡 (笔名) 张乐 张心琦 张宇 郑利娜 朱杰

版权专有 侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

张宇考研数学题源探析经典 1000 题. 习题分册. 数学三 / 张宇主编. — 北京 : 北京理工大学出版社, 2016. 1

ISBN 978-7-5682-1842-9

I. ①张… II. ①张… III. ①高等数学—研究生—入学考试—习题集 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 022025 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68948351(其他图书服务热线)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 河北鹏润印刷有限公司

开 本 / 787 毫米×1092 毫米 1/16

印 张 / 7

字 数 / 174 千字

版 次 / 2016 年 1 月第 1 版 2016 年 1 月第 1 次印刷

定 价 / 54.80 元(共 2 册)

责任编辑 / 高 芳

文案编辑 / 胡 莹

责任校对 / 孟祥敬

责任印制 / 边心超

图书出现印装质量问题,请拨打售后服务热线,本社负责调换

Foreword 2017版前言

与考生说几句体己话

这本书,首先是题源,说白了,就是命题的源泉.建设好这个源泉,是这本书的指导思想.源头建设是极其不容易的,绝不是东拼西凑几个题目那样简单,众多命题专家和教学专家多年的经验和无私的奉献,才成就了这本书的高质量.很欣慰地看到,上一个考研年,本书不仅对2016的考研数学试题做出了精准的预测,而且还对考生参加全国、各省市大学生数学竞赛,校内的期中、期末考试,都起到了积极的作用,甚至还有原题出现在各种形式的考试试卷上.

这本书,又是习题集.考研数学复习,必须要辅以足量的习题训练,这是本书的目标与任务.关于如何做题和本书习题的安排等详细内容,可见上一版的前言.

这本书,还是畅销书.全国有众多考生选择这本习题集,让本书作者倍感责任重大.这一版,仍然做了认真修改:增加、替换了一些要紧的题目,以适应新一年的命题趋势;吸收了各方面传递给作者的好的建议;订正、修改了一些关键的内容,以进一步提高本书的质量和可读性.

在这里,要感谢不少高校教师选择本书作为他们辅导学生、提高大学数学学习能力的习题课教材,感谢全国各大考研辅导机构选择本书作为学员的复习资料,感谢各位考生对本书提出的宝贵意见和建议.

新的一个考研年,我作为主编,代表各位作者,继续欢迎各位读者朋友们勇于攀登,攻克难关,用好这本书,提高数学解题能力.



2016年1月

Foreword 2016版前言

巩固所学 见多识广

——与读者谈谈做数学题的学问

本书是一本考研数学学习题集.看完教材,学完知识,就要做题.做题有学问吗?请读者认真阅读这个前言,尤其是下面的“五”.

一、题海战术?

曾经有文化媒体的记者问我:你是否同意“题海战术”?我对此问题感到两难:其一,如果我说同意,便会遭到批判——现在都讲素质教育,你怎么还让学生陷于题海之中?只会做题,搞得呆头呆脑;其二,如果我说不同意,那便违背了我的真实想法——不做题,怎么能够把书本上的数学知识内化为自己的本领?面对两难,如何作答?

我与读者讲,当你和别人针锋相对时,不要与其争辩甚至争吵,争来争去,最终谁也说服不了谁.怎么办?提高自己回答问题的“档次”,将他尖锐的问题化解掉——于是,我当时回答:你这个问题本身就有问题,莫说让考研的学生做几个月的数学题,就是让他们做整整一年的数学题,也不能叫题“海”,最多就是个题“河”,其实基本上就是个题“沟”,所以,实事求是地说,我们应该叫“题沟战术”.记者朋友听后大笑.这个回答,既能够低调处理问题,避免争论,也能够道出我的观点——几百道、上千道题目,算不上题海.事实上,我们不用形成题目的汪洋大海,只需有针对性地、高质量地填满一个题目的小水沟,就足以应对考研数学了.

这本《张宇考研数学题源探析经典1000题》就是为了实现上面这个切合实际的目标而编写的.

二、考研数学好题的标准

本书命制或者挑选题目坚持的标准是“好题”.什么是考研数学的好题?我认为要具备以下三点:

- (1) **经典性** 所谓经典性是指试题能够恰当、精准地考查考研数学的重要知识点和基本思想方法;
- (2) **针对性** 所谓针对性是指试题能够与考研无缝接轨,与考研出题的风格、特点和难度达到高度一致;
- (3) **预测性** 所谓预测性是指试题能够对即将到来的考研有预测性.我们承认做题的目的是为了巩固和加强对知识点的认识和理解、学会解题,但同时,如果能够起到预测未来方向的作用,则会锦上添花.

三、考研数学题源探析

根据以上三点,本书精心命制和整合了大约1000道考研数学复习的题目,其主要来源是:



(1)与考研数学命题密切相关的重要资料.这里包括考研数学命题前的全国征题、部分考研命题的备考题(即考研数学B卷考题)、命题人退下来以后命制的题目、某些全国大学数学教学基地的考试题库等,这些题一般综合了多个知识点,有一定的难度和区分度.

(2)前苏联、全国、各省市大学生数学竞赛试题的改编题.对经典的大学数学竞赛题如何进行改编,使其适合考研的风格和特点,这既是对未来考题的预测(因为这些竞赛题中有很多题目是“潜在的考试题”),也是本书的一大特色.试题改编是颇费一番周折的,本书中一些重要题目后的“注”,看似题外之话,但是字斟句酌、涵义深刻,请读者仔细品味,必会有所收获.当然,基于竞赛基础,这些题一般也会是综合题,难度高、区分度大.

(3)作者在一线教学中编写和积累的经典题目.这里,有些题目考查的是非常重要的基础知识,有些题目考查的是学生易错的、易混淆的知识,还有些题目,本应是在课堂上讲授给学生的,但是无奈于课堂时间有限,很多精彩的好题没有机会在课上详细解释,也将此选编到本书中,供学生课后巩固所学、增长见识之用,同时也给没有上我的课程的读者提供一个有价值的习题资料.这里的题目除了有一定难度的综合题外,还有些简单题,难度不高,但对学生的区分是明显的.

四、本书的重大改动说明

本书各位作者曾经分别参与考研数学命题与阅卷、考研数学大纲的编写与修订、高等教育出版社《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲解析》的编写、高等教育出版社《考研数学历年真题解析》的编写和审定、部分重点高校(如清华大学、中国人民大学、北京理工大学、浙江大学等)相关教材的编写和审定等,这些工作经验对于本书的形成具有重要意义.

本书最初的版本中,收录了1987年到1999年的考研真题,这部分内容现在已经放到《张宇考研数学真题大全解》那本书里去了,这样更加合理.于是,读者看到的这本书,事实上是做了重大改动的:删去的真题原本占了书中题目的大部分篇幅,现在补充进来的题目占到全部题目的70%左右,可以说把作者“压箱底的宝贝”基本都拿出来了.

在北京理工大学出版社的大力支持下,作者将这本书呈现给读者,供考研究生的读者和有志于提高大学数学水平的读者们参考.

五、本书使用说明

首先,我非常希望读者懂得做习题集的科学的態度.做习题集有两个目的:一是巩固所学,二是见多识广.所谓巩固所学,读者很容易明白,就是在已经读教材、读例题后,通过演算同例题类似的习题这种重复性劳动,加强对所学知识的认识,加深对所用方法的理解.但是,所谓见多识广,有些读者好像不会合理应对.数学题的形式,浩瀚无垠,千变万化,即使在一定的范围内(当然我们这里就是指在考研大纲的范围内),想要做到无所不能,也绝非易事.所以,适当地演算一些从未见过的难题、新题,不仅可以查漏补缺,更能够增长见识,提高解题能力和数学素养,这是做习题集的重要目的.听者有心,这本习题集中的题目,希望读者不管一开始会与不会,都要好好努力去做,然后结合答案搞清搞透,最终达到巩固所学、见多识广的目的.

接下来,有一个技术问题需要告诉读者.作为一本习题集,可以采用“知识分类、先易后难”的原则来进行题目安排,大部分习题集也确实是这样安排的.所谓知识分类,是指把考查同一知识点的题目集中在一起,比如从第1题到第10题,考查知识点甲,从第10题到第20题,考查知识点乙,以此类推.所谓先易后难,是指按照从简单到复杂、从考查单一知识到考查综合能力的顺序来安排题目,比如考查知识点甲的第1题到第10题,一般是第1题最好做,越往后越难,到了第10题,难度最大.听起来,这个原则很科学.



然而,本书不采用上述原则.为什么?第一,“知识分类”会使得这部分题目对读者有明显的提示——你既然知道这一部分都是考知识点甲的,那便很容易找到问题的突破口,题目的难度会大大降低.试想,考研数学的试卷上会告诉你这个题目是考查知识点甲的吗?第二,“先易后难”好像符合人们思考、训练的习惯,但是,这也恰恰不符合考研数学命题的题目安排顺序——考研数学试卷上有两个变化无常:一是高等数学、线性代数、概率论与数理统计放在一张卷子上考,二是题目难度顺序有时难,有时易,难度可以说是“波浪式”的.所以,习题集如果按照“先易后难”的传统习惯,显然与考研数学命题与应考的实际背道而驰.

综上所述,从考研实战的角度出发,为了使考生能够在平时的训练中就逐渐适应考研数学试卷的风格,作者依据“知识相对混编、难易变化无常”的原则来进行题目安排:第一,出几个考知识点甲的题目,突然就换到几个考知识点乙、知识点丙的题目,还可能再跳回考知识点甲的题目,不出现明显的提示;第二,也许最开始的题目就很难,中间有简单题,再往后做题又会碰到难题,难度“此起彼伏”.作者用心良苦,希望考生保持实战演练的状态,这样才能更好地使用本书,发挥它的最大作用.

对于习题集的使用,我建议读者:把题目的演算过程写到草稿纸上去,把做题后看着答案详解做的标注写到笔记本上去,总之,不要在题目上做任何标记——这样做的目的很明确——如果此题你第一次做的时候不会做或者做错了,当你下次再做这个题目时,在没有任何提示的情况下,你能保证自己一定会做吗?“干干净净”的习题集,事实上是对读者提出了高标准、严要求,希望读者把习题全部做完一遍后,第二遍就能够查漏补缺、扫清死角.

感谢从命题组中退下来的老专家们,他们功底深厚、德高望重,给予了作者诸多帮助,为本书增色不少.感谢家人们,他们中的大多数并不懂书中的内容,可是他们懂得它对我和学生的意义.

张宇

2015年1月于北京

张宇考研数学系列丛书详细说明

书名	拟出版时间	主要内容
张宇高等数学 18 讲	2016 年 1 月	以考试大纲、历年真题和主流教材为依据,诠释考研数学中高等数学部分的全部考点,配以优秀的例题、习题和全部详细答案.原命题组长参与.
张宇线性代数 9 讲	2016 年 1 月	以考试大纲、历年真题和主流教材为依据,诠释考研数学中线性代数部分的全部考点,配以优秀的例题、习题和全部详细答案.原命题人参与.
张宇概率论与数理统计 9 讲	2016 年 1 月	以考试大纲、历年真题和主流教材为依据,诠释考研数学中概率论与数理统计部分的全部考点,配以优秀的例题、习题和全部详细答案.原命题人参与.
张宇考研数学题源探析经典 1000 题	2016 年 1 月	以考研命题所使用的所有题目源头为依据,精心挑选和编制了大约 1000 道高仿真练习题,题目与考研无缝接轨,综合性强,知识相对混编,难易变化无常,利于考生复习过程中保持实战演练的状态.原命题组长参与.
张宇考研数学真题大全解	2016 年 4 月	囊括考研数学命题以来所有考研真题(1987—2016),给读者提供原汁原味的实考题.原命题组长参与.
考研数学命题人终极预测 8 套卷	2016 年 9 月	全国唯一一本考研命题人和辅导专家通力合作、全程亲自编写的冲刺模拟卷(上).实战演练,积累经验,查漏补缺,科学预测,并配有部分重点难题讲解视频.原命题组长与命题成员参与.
张宇考研数学最后 4 套卷	2016 年 11 月	全国唯一一本考研命题人和辅导专家通力合作、全程亲自编写的冲刺模拟卷(下).实战演练,积累经验,查漏补缺,科学预测,并配有部分重点难题讲解视频.原命题组长与命题成员参与.

注:主编张宇将在每本书正式出版时在微博发布最新封面,市面上其他任何同名图书均非张宇所写,请考生注意鉴别.

以上书籍新浪微博答疑地址:@张宇考研图书交流论坛 <http://weibo.com/yuntubook/>

张宇新浪微博:@宇哥考研 <http://weibo.com/zhangyumaths/>

Contents 目录

第一篇 微积分

第 1 章 函数、极限、连续 (3)

- 一、选择题 (3)
- 二、填空题 (5)
- 三、解答题 (6)

第 2 章 一元函数微分学 (10)

- 一、选择题 (10)
- 二、填空题 (14)
- 三、解答题 (15)

第 3 章 一元函数积分学 (21)

- 一、选择题 (21)
- 二、填空题 (23)
- 三、解答题 (26)

第 4 章 多元函数微分学 (32)

- 一、选择题 (32)
- 二、填空题 (34)
- 三、解答题 (34)

第 5 章 二重积分 (38)

- 一、选择题 (38)
- 二、填空题 (39)

三、解答题	(40)
-------	------

第 6 章 无穷级数 (42)

一、选择题	(42)
二、填空题	(44)
三、解答题	(45)

第 7 章 常微分方程与差分方程 (48)

一、选择题	(48)
二、填空题	(49)
三、解答题	(51)

第二篇 线性代数

一、选择题	(57)
二、填空题	(65)
三、解答题	(69)

第三篇 概率论与数理统计

一、选择题	(83)
二、填空题	(87)
三、解答题	(91)

01

微积分

WEI JI FEN

微积分学是数学三考查的内容之一，主要考查考生对微积分学的基本概念、基本理论、基本方法的理解和掌握，以及考生的抽象思维能力、逻辑推理能力、综合运用能力和解决实际问题的能力。在试卷中占56%，84分。

第 1 章 函数、极限、连续

一、选择题(在目前的考研中,选择题是 4 分/题,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选选项前的字母填在题后的括号里.)

1.1. 设数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n = 0$, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\{y_n\}$ 必为无穷小量的充分条件是 ()

(A) $\{x_n\}$ 是无穷小量

(B) $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ 是无穷小量

(C) $\{x_n\}$ 有界

(D) $\{x_n\}$ 单调递减

1.2. 以下 3 个命题:

① 若数列 $\{u_n\}$ 收敛于 A , 则其任意子数列 $\{u_{n_i}\}$ 必定收敛于 A ;

② 若单调数列 $\{x_n\}$ 的某一子数列 $\{x_{n_i}\}$ 收敛于 A , 则该数列必定收敛于 A ;

③ 若数列 $\{x_{2n}\}$ 与 $\{x_{2n+1}\}$ 都收敛于 A , 则数列 $\{x_n\}$ 必定收敛于 A .

正确的个数为

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

1.3. 设 $f(x)$ 是偶函数, $\varphi(x)$ 是奇函数, 则下列函数(假设都有意义)中, 是奇函数的是 ()

(A) $f[\varphi(x)]$

(B) $f[f(x)]$

(C) $\varphi[f(x)]$

(D) $\varphi[\varphi(x)]$

1.4. 设 $f(x) = \sin(\cos x)$, $\varphi(x) = \cos(\sin x)$, 则在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内 ()

(A) $f(x)$ 是增函数, $\varphi(x)$ 是减函数

(B) $f(x), \varphi(x)$ 都是减函数

(C) $f(x)$ 是减函数, $\varphi(x)$ 是增函数

(D) $f(x), \varphi(x)$ 都是增函数

1.5. 设在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内 $f(x) > 0$, 且当 k 为大于 0 的常数时有 $f(x+k) = \frac{1}{f(x)}$, 则在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内函数 $f(x)$ 是 ()

(A) 奇函数

(B) 偶函数

(C) 周期函数

(D) 单调函数

1.6. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0, \\ x^2 + x, & x > 0, \end{cases}$ 则 ()

(A) $f(-x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0, \\ -(x^2 + x), & x > 0 \end{cases}$

(B) $f(-x) = \begin{cases} -(x^2 + x), & x < 0, \\ -x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

(C) $f(-x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0, \\ x^2 - x, & x > 0 \end{cases}$

(D) $f(-x) = \begin{cases} x^2 - x, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

1.7. 设 $f(x) = u(x) + v(x)$, $g(x) = u(x) - v(x)$, 并设 $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0} v(x)$ 都不存在, 下列论断正确的是 ()

(A) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 必存在

(B) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 必不存在

(C) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 必不存在

(D) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 必存在



1.8. 两个无穷小量比较的结果是 ()
 (A) 同阶 (B) 高阶 (C) 低阶 (D) 不确定

1.9. 函数 $f(x) = x \sin x$ ()
 (A) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界 (B) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界
 (C) 当 $x \rightarrow \infty$ 时为无穷大 (D) 当 $x \rightarrow \infty$ 时极限存在

1.10. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\sin \frac{1}{x}} - 1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^\alpha - \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = A \neq 0$ 的充要条件是 ()

(A) $\alpha > 1$ (B) $\alpha \neq 1$ (C) $\alpha > 0$ (D) 与 α 无关

1.11. 设当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 不是无穷大, 则下述结论正确的是 ()

(A) 设当 $x \rightarrow x_0$ 时, $g(x)$ 是无穷小, 则 $f(x)g(x)$ 必是无穷小
 (B) 设当 $x \rightarrow x_0$ 时, $g(x)$ 不是无穷小, 则 $f(x)g(x)$ 必不是无穷小
 (C) 设在 $x = x_0$ 的某邻域 $g(x)$ 无界, 则当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)g(x)$ 必是无穷大
 (D) 设在 $x = x_0$ 的某邻域 $g(x)$ 有界, 则当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)g(x)$ 必不是无穷大

1.12. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义, 且 $f(x)$ 在点 x_0 处间断, 则在点 x_0 处必定间断的函数为 ()

(A) $f(x) \sin x$ (B) $f(x) + \sin x$ (C) $f^2(x)$ (D) $|f(x)|$

1.13. 设当 $x \rightarrow x_0$ 时, $\alpha(x), \beta(x) (\beta(x) \neq 0)$ 都是无穷小, 则当 $x \rightarrow x_0$ 时, 下列表达式中不一定为无穷小的是 ()

(A) $\frac{\alpha(x)}{\beta^2(x)}$ (B) $\alpha^2(x) + \beta^3(x) \cdot \cos \frac{1}{x}$
 (C) $\ln[1 + \alpha(x) \cdot \beta^2(x)]$ (D) $|\alpha(x)| + |\beta(x)|$

1.14. 设当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^{\tan x} - e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小, 则 n 为 ()

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

1.15. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$ 是等价无穷小, 则 ()

(A) $a = 1, b = -\frac{1}{6}$ (B) $a = 1, b = \frac{1}{6}$ (C) $a = -1, b = -\frac{1}{6}$ (D) $a = -1, b = \frac{1}{6}$

1.16. 设当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = ax^3 + bx$ 与 $g(x) = \int_0^{\sin x} (e^{x^2} - 1) dx$ 等价, 则 ()

(A) $a = \frac{1}{3}, b = 1$ (B) $a = 3, b = 0$ (C) $a = \frac{1}{3}, b = 0$ (D) $a = 1, b = 0$

1.17. 设当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = \ln(1 + x^2) - \ln(1 + \sin^2 x)$ 是 x 的 n 阶无穷小, 则正整数 n 等于 ()

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

1.18. 若 $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{\lambda - e^{-kx}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, 则 ()

(A) $\lambda < 0, k < 0$ (B) $\lambda < 0, k > 0$
 (C) $\lambda \geq 0, k < 0$ (D) $\lambda \leq 0, k > 0$

1.19. 设 $f(x) = \frac{1}{e^{\frac{1}{x}} - 1}$, 则 ()

(A) $x = 0, x = 1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点
 (B) $x = 0, x = 1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点
 (C) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点, $x = 1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点



(D) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点, $x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点

1.20. 设 $f(x) = \frac{\ln|x|}{|x-1|} \sin x$, 则 $f(x)$ 有 ()

(A) 1个可去间断点, 1个跳跃间断点 (B) 1个跳跃间断点, 1个无穷间断点

(C) 2个可去间断点 (D) 2个无穷间断点

1.21. 设 $f(x) = \frac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}$, 则下列结论中错误的是 ()

(A) $x=-1, x=0, x=1$ 为 $f(x)$ 的间断点

(B) $x=-1$ 为无穷间断点

(C) $x=0$ 为可去间断点

(D) $x=1$ 为第一类间断点

1.22. 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调有界, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内间断点的类型只能是 ()

(A) 第一类间断点 (B) 第二类间断点

(C) 既有第一类间断点也有第二类间断点 (D) 结论不确定

二、填空题(在目前的考研中, 填空题是 4 分 / 题, 请将答案填在题中的横线上.)

1.23. 设 $f(x)$ 是奇函数, 且对一切 x 有 $f(x+2) = f(x) + f(2)$, 又 $f(1) = a, a$ 为常数, n 为整数, 则 $f(n) =$ _____.

1.24. 对充分大的一切 x , 给出以下 5 个函数: $100^x, \log_{10} x^{100}, e^{10x}, x^{10^{10}}, e^{\frac{1}{100}x^2}$, 则其中最大的是 _____.

1.25. $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot 2x =$ _____.

1.26. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x =$ _____.

1.27. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{2}{\sin x}} =$ _____.

1.28. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{1+x}}{x^2 + x - 2} =$ _____.

1.29. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{(e^{x^2} - 1) \ln(1-x)} =$ _____.

1.30. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1} =$ _____.

1.31. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}) =$ _____.

1.32. 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(4x-1)^\alpha} = \beta > 0$, 则 α, β 的值分别为 _____.

1.33. 若当 $x \rightarrow 0$ 时, 有 $\ln \frac{1-ax^2}{1+ax^2} \sim \frac{1}{10\ 000} x^4 + \sin^2(\sqrt{6}x)$, 则 $a =$ _____.

1.34. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 若有 $\ln\left(\cos \frac{2x}{3}\right) \sim Ax^k$, 则 $A =$ _____, $k =$ _____.

1.35. 当 $x \rightarrow -1$ 时, 若有 $\sqrt[3]{x} + 1 \sim A(x+1)^k$, 则 $A =$ _____, $k =$ _____.

1.36. 当 $x \rightarrow \pi$ 时, 若有 $\sqrt[4]{\sin \frac{x}{2}} - 1 \sim A(x-\pi)^k$, 则 $A =$ _____, $k =$ _____.

1.37. 若 $f(x) = \begin{cases} e^x(\sin x + \cos x), & x > 0, \\ 2x+a, & x \leq 0 \end{cases}$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数, 则 $a =$ _____.



1.38. 已知数列 $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} =$ _____.

三、解答题(在目前的考研中,解答题包括计算题、应用题和证明题,平均10分/题.)

1.39. 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & e^{-1} < x < 1, \\ x, & 1 \leq x < e, \end{cases}$ $g(x) = e^x$, 求 $f[g(x)]$.

1.40. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 0, \\ \ln x, & x > 0, \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 2e^x - 1, & x \leq 0, \\ x^2 - 1, & x > 0, \end{cases}$ 求 $f[g(x)]$.

1.41. (1) 求函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + (2x)^n + x^{2n}}$ 的表达式, $x \geq 0$;

(2) 讨论函数 $f(x)$ 的连续性.

1.42. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}}$.

1.43. 求下列极限.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \sin x} - 1}{\tan x}$;

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$;

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \left(1 - \cos \frac{x}{2} \right)}{\ln(1 + x^4)}$;

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$;

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + xe^x}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right)$;

(6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[\frac{n - 2na + 1}{n(1 - 2a)} \right]^n \left(a \neq \frac{1}{2} \right)$;

(7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4}$;

(8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^{\sin x}}{x \sin^2 x}$;

(9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x(1 - \cos x)}$;

(10) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \tan \frac{1}{n} \right)^{n^2}$;

(11) $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n}$;

(12) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^x$;

(13) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\cot^2 x}$;

(14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x^2 \sin \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1 + x)}$;

(15) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[n - n^2 \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right]$;

(16) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{a}{x} - \left(\frac{1}{x^2} - a^2 \right) \ln(1 + ax) \right] (a \neq 0)$;

(17) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+a)^{x+a} (x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$;

(18) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1 + \frac{1}{\ln x}}$;

(19) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{\tan x}$;

(20) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin^2 x} \ln(1+t) dt}{(\sqrt[3]{1+x^3} - 1) \sin x}$;

(21) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \left[\int_0^{u^2} \arctan(1+t) dt \right] du}{x(1 - \cos x)}$;

(22) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - (\sin x)^x}{x^2 \ln(1+x)}$;

(23) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2} \right)$;

(24) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2 [x + \ln(1-x)]}$;

(25) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x(1 - \cos \sqrt{x})}$;

(26) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$;

(27) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$;

(28) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}$;



$$(29) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}}.$$

1.44. 设 $f(x) = x^2 + ax + b$, 证明: $|f(1)|, |f(3)|, |f(5)|$ 中至少有一个不小于 2.

1.45. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (1 + \sqrt[n]{2} + \cdots + \sqrt[n]{n})$.

1.46. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}$.

1.47. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left[\left(\frac{2 + \cos x}{3} \right)^x - 1 \right]$.

1.48. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin^2 x + e^x) - x}{\ln(x^2 + e^{2x}) - 2x}$.

1.49. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^x}{1 - x + \ln x}$.

1.50. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \sqrt{\cos 2x}}{x^2}$.

1.51. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1 + e^{\frac{1}{x}})}$.

1.52. 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

1.53. 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}})$.

1.54. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}}$, $a_i > 0$, 且 $a_i \neq 1, i = 1, 2, \dots, n, n \geq 2$.

1.55. 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$.

1.56. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\arctan \frac{a}{n} - \arctan \frac{a}{n+1} \right)$, $a > 0$.

1.57. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left[1 + \frac{f(x)}{\sin x} \right]}{a^x - 1} = A (a > 0, a \neq 1)$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$.

1.58. 已知 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 存在, 且

$$f(x) = \frac{x - \arctan(x-1) - 1}{(x-1)^3} + 2x^2 e^{x-1} \lim_{x \rightarrow 1} f(x),$$

求 $f(x)$.

1.59. 设 $f(x)$ 是三次多项式, 且有

$$\lim_{x \rightarrow 2a} \frac{f(x)}{x-2a} = \lim_{x \rightarrow 4a} \frac{f(x)}{x-4a} = 1 (a \neq 0),$$

求 $\lim_{x \rightarrow 3a} \frac{f(x)}{x-3a}$.

1.60. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - a} (\cos x - b) = 5$, 求 a, b 的值.

1.61. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{n^\beta - (n-1)^\beta} = 10$, 试求 α, β 的值.

1.62. 确定常数 a 和 b 的值, 使