现代物理基础丛书 73

物理学中的群论

（第三版）

——李代数篇

马中骐 著

科学出版社

现代物理基础丛书　73

物理学中的群论

（第三版）

—— 李代数篇

马中骐　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

《物理学中的群论》第三版分两篇出版，本书是李代数篇，但仍包含有限群的基本知识. 本书从物理问题中提炼出群的概念和群的线性表示理论，通过有限群群代数的不可约基介绍杨算符和置换群的表示理论，引入标量场、矢量场、张量场和旋量场的概念及其函数变换算符，以转动群为基础解释李群和李代数的基本知识和半单李代数的分类，在介绍单纯李代数不可约表示理论的基础上，推广盖尔范德方法，讲解单纯李代数最高权表示生成元、表示矩阵元的计算和状态基波函数的计算. 书中附有习题，与本书配套的《群论习题精解》涵盖了习题解答.

本书适合作为粒子物理、核物理和原子物理等专业研究生的群论教材或参考书，也可供青年理论物理学家自学群论参考.

图书在版编目（CIP）数据

物理学中的群论.李代数篇/马中骐著. —3 版. —北京：科学出版社，2015
(现代物理基础丛书；73)
ISBN 978-7-03-045882-7

Ⅰ. ①物… Ⅱ. ①马… Ⅲ. ①群论-应用-物理学 Ⅳ. ①O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 234450 号

责任编辑：刘凤娟／责任校对：蒋 萍
责任印制：徐晓晨／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京教图印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2006 年 12 月第 二 版 开本：720×1000 1/16
2015 年 10 月第 三 版 印张：17 1/2
2015 年 10 月第十二次印刷 字数：336 000

定价：78.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

第三版前言

对称性研究在物理学各个领域都起着越来越重要的作用. 群论是研究系统对称性质的有效工具, 因此群论方法已成为物理工作者必备的基础知识. 群论课程是许多物理专业或理论化学专业研究生的必修课或选修课.

作为“中国科学院研究生教学丛书”之一,《物理学中的群论》由北京的科学出版社于 1998 年出版. 经过几年的教学实践和改进, 又于 2006 年出版了第二版, 已有 11 次印刷. 该教材是按照 120 学时的教学计划来写作的. 随着近年教学改革的进展, 各院校教学计划都有相当大的变化. 群论课程的教学时间一般都有较大的压缩. 据作者了解, 目前各院校的群论课程一般在 60 学时左右, 原来教材很难适应形势的变化. 很多朋友建议重写一本精读教材, 以适应新形势的需要.

针对缩短的教学时间, 教学安排应该更有针对性. 在内容的选择上, 应该根据读者的不同专业有所取舍. 粒子物理、核物理和原子物理等专业的研究生, 需要知道各种单纯李代数不可约表示及其波函数的具体计算方法, 但对晶格对称性的细节需要较少. 凝聚态物理、固体物理和光学等专业的研究生, 则对有限群和晶格对称理论更重视一些, 对李代数理论虽需要有一般性的了解, 但可能不太关注具体的计算细节. 在一些朋友和研究生的建议下, 作者决定把《物理学中的群论》第三版分两篇出版, 分别适用于不同专业的教学需要. 本书是《李代数篇》, 从群和表示理论的基础知识讲起, 包括有限群的基本内容, 但更偏重于李代数的基本知识和最高权表示的计算方法, 篇幅略多于《物理学中的群论》第二版正文的一半. 书中还包括作者近年群论研究中的新体会, 如 4.4.4 节关于球谐多项式的计算, 5.2.4 节推广的盖尔范德方法, 5.4.6 节 n 个电子系统反对称波函数的计算等. 如果每学时按 45 分钟计算, 预计 70 学时的教学时间可以完成课程教学. 建议使用本书作为教材的教师, 根据学生的具体情况, 可再做适当增删. 有些内容, 如 4.3.4 节 SU(2) 群群上的积分、4.6.2 节的后半部分关于典型李群的具体讨论、5.1.3 节最高权表示的一些数学结果等内容, 可安排学生自学参考, 不一定都在课堂上讲授. 如果教学时间不够, 从 5.4 节开始的内容, 可以根据需要, 有选择地讲解. 本书适合粒子物理等专业研究生的群论教学. 已经出版的《有限群篇》, 虽也包含李代数的基本知识, 但删去本书第 5 章单纯李代数最高权表示的具体计算, 加强有限群理论的篇章, 增加晶格对称理论的内容, 适合凝聚态物理等专业研究生的群论教学.

既然是重新撰写群论教材, 本书尽量融入近十年作者在教学和科研上的新成果和新体会. 本书坚持原有的特点, 从物理中提出问题, 抽象成数学概念, 提炼出具体

计算方法, 培养学生独立解决物理学中数学问题的能力. 作者希望本书能更适合当前群论教学的需要.

在立意写作本书和具体写作过程中，作者得到了阮东教授、刘玉鑫教授、李康教授、傅宏忱教授、苏刚教授、龚新高教授、王凡教授、管习文教授、王剑华教授、仝殿民教授、王美山教授、阎凤利教授、高亭教授、薛迅教授、侯喜文教授、董世海教授、金柏琪教授、顾晓艳教授、刘小明教授等的鼓励和支持，得到了夫人李现女士的全力支持和协助，一并在此表示感谢. 作者感谢中国科学院大学把本书纳入中国科学院大学研究生教材系列, 资助本书由科学出版社出版.

马中骐

2014 年于北京

目　　录

第 1 章　群的基本概念

群论是研究系统对称性质的有力工具. 本章首先从系统对称性质的研究中, 概括出群的基本概念. 通过物理中常见的对称变换群的例子, 使读者对群有较具体的认识. 然后, 引入群的各种子集的概念、群的同构与同态的概念和群的直接乘积的概念.

1.1　对　　称

对称是一个人们十分熟悉的用语. 世界处在既对称又不严格对称的矛盾统一之中. 房屋布局的对称给人一种舒服的感觉, 但过分的严格对称又会给人死板的感觉. 科学理论的和谐美, 其中很大程度上表现为对称的美. 在现代科学研究中, 对称性的研究起着越来越重要的作用.

我们常说, 斜三角形很不对称, 等腰三角形比较对称, 正三角形对称多了, 圆比它们都更对称. 但是, 对称性的高低究竟是如何描写的呢?

对称的概念是和变换密切联系在一起的, **所谓系统的对称性就是指它对某种变换保持不变的性质.** 保持系统不变的变换越多, 系统的对称性就越高. 只有恒等变换, 也就是不变的变换, 才保持斜三角形不变. 等腰三角形对底边的垂直平分面反射保持不变, 而正三角形对三边的垂直平分面反射都保持不变, 还对通过中心垂直三角形所在平面的轴转动 $\pm 2\pi/3$ 角的变换保持不变. 圆对任一直径的垂直平分面的反射都保持不变, 也对通过圆心垂直圆所在平面的轴转动任何角度的变换保持不变. 因为保持圆不变的变换最多, 所以它的对称性最高.

量子系统的物理特征由系统的哈密顿量 (Hamiltonian) 决定, 量子系统的对称性则由保持系统哈密顿量不变的变换集合来描写. 例如, N 个粒子构成的孤立系统的哈密顿量为

$$H = -\frac{\hbar^2}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j^{-1}\nabla_j^2 + \sum_{i<j} U(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|). \tag{1.1}$$

其中, $\boldsymbol{r}_j$ 和 m_j 是第 j 个粒子的坐标矢量和质量, ∇_j^2 是关于 $\boldsymbol{r}_j$ 的拉普拉斯 (Laplace) 算符, U 是两个粒子间的二体相互作用势, 它只是粒子间距离的函数. 拉普拉斯算符是对坐标分量的二阶微商之和, 它对系统平移、转动和反演都保持不变. 作用势只依赖于粒子间的相对坐标绝对值, 也对这些变换保持不变. 若粒子是全同

粒子, 哈密顿量还对粒子间的任意置换保持不变. 这个量子系统的对称性质就用系统对这些变换的不变性来描述.

保持系统不变的变换称为系统的对称变换, 对称变换的集合描写系统的全部对称性质. 根据系统的对称性质, 通过群论方法研究, 可以直接得到系统许多精确的、与细节无关的重要性质.

1.2　群及其乘法表

1.2.1　群的定义

系统的对称性质由对称变换的集合来描写. 我们先来研究系统对称变换集合的共同性质. 按照物理中的惯例, 两个变换的乘积 RS 定义为先做 S 变换, 再做 R 变换. 显然, 相继做两次对称变换仍是系统的对称变换, 三个对称变换的乘积满足结合律. 不变的变换称为恒等变换 E, 它也是一个对称变换, 并与任何一个对称变换 R 的乘积仍是该变换 R. 对称变换的逆变换也是系统的一个对称变换. 上述性质是系统对称变换集合的共同性质, 与系统的具体性质无关. 把对称变换集合的这些共同性质归纳出来, 得到群 (group) 的定义.

定义 1.1　在**规定了元素的“乘积”法则**后, 元素的集合 G 如果满足下面四个条件, 则称为群.

(1) 集合对乘积的**封闭性**. 集合中任意两元素的乘积仍属此集合:

$$RS \in \mathrm{G}, \quad \forall\, R \text{ 和 } S \in \mathrm{G}. \tag{1.2}$$

(2) 乘积满足**结合律**:

$$R(ST) = (RS)T, \quad \forall\, R,\ S \text{ 和 } T \in \mathrm{G}. \tag{1.3}$$

(3) 集合中**存在恒元** E, 用它左乘集合中的任意元素, 保持该元素不变:

$$E \in \mathrm{G}, \quad ER = R, \quad \forall\, R \in \mathrm{G}. \tag{1.4}$$

(4) 任何元素 R 的**逆** R^{-1} **存在**于集合中, 满足

$$\forall\, R \in \mathrm{G}, \quad \exists\, R^{-1} \in \mathrm{G}, \quad \text{使 } R^{-1}R = E. \tag{1.5}$$

作为数学中群的定义, **群的元素可以是任何客体, 元素的乘积法则也可任意规定**. 一旦确定了元素的集合和元素的乘积规则, 满足上述四个条件的集合就称为群. 系统对称变换的集合, 对于变换的乘积规则, 满足群的四个条件, 因而构成群, 称为**系统的对称变换群**. 在物理中常见的群大多是线性变换群、线性算符群或矩阵群.

如果没有特别说明, 当元素是线性变换或线性算符时, 元素的乘积规则都定义为相继做两次变换; 当元素是矩阵时, 元素的乘积则取通常的矩阵乘积.

在群的定义中, 群元素是什么客体并不重要, 重要的是它们的乘积规则, 也就是它们以什么方式构成群. 如果两个群, 它们的元素之间可用某种适当给定的方式一一对应起来, 而且元素的乘积仍以此同一方式一一对应, **常称对应关系对元素乘积保持不变**, 那么, 从群论观点看, 这两个群完全相同. 具有这种对应关系的两个群称为同构 (isomorphism).

定义 1.2 若群 G' 和 G 的所有元素间都按某种规则存在一一对应关系, 它们的乘积也按同一规则一一对应, 则称两群同构. 用符号表示, 若 R 和 $S \in \mathrm{G}$, R' 和 $S' \in \mathrm{G}'$, $R' \longleftrightarrow R$, $S' \longleftrightarrow S$, 必有 $R'S' \longleftrightarrow RS$, 则 $\mathrm{G}' \approx \mathrm{G}$, 其中符号“ $\longleftrightarrow$ ”代表一一对应, “ $\approx$ ”代表同构.

互相同构的群, 它们群的性质完全相同. 研究清楚一个群的性质, 也就了解了所有与它同构的群的性质. 在群同构的定义里, 元素之间的对应规则没有什么限制. 但如果选择的规则不适当, 使元素的乘积不再按此规则一一对应, 并不等于说, 这两个群就不同构. 只要对某一种对应规则, 两个群符合群同构的定义, 它们就是同构的.

从群的定义出发, 可以证明, 恒元和逆元也满足

$$RE = R, \quad RR^{-1} = E. \tag{1.6}$$

第二个式子表明元素与其逆元是相互的. 由此易证群中恒元是唯一的, 即若 $E'R = R$, 则 $E' = E$. 群中任一元素的逆元是唯一的, 即若 $SR = E$, 则 $S = R^{-1}$. 于是, 恒元的逆元是恒元, 和 $(RS)^{-1} = S^{-1}R^{-1}$. 作为逻辑练习, 习题第 1 题让读者证明这些结论. 证明中除群的定义外, 不能用以前熟悉的任何运算规则, 因为它们不一定适合群元素的运算. 下面我们认为这些结论已经证明, 可以应用了.

一般说来, 群元素乘积不能对易, $RS \neq SR$. 元素乘积都可以对易的群称为阿贝尔 (Abel) 群. **若群中至少有一对元素的乘积不能对易, 就称为非阿贝尔群**. 元素数目有限的群称为有限群, 元素的数目 g 称为有限群的阶 (order). 元素数目无限的群称为无限群, 如果无限群的元素可用一组连续变化的参数描写, 则称为连续群.

把群的子集, 即群中部分元素的集合 $\mathcal{R} = \{R_1,\ R_2,\ \cdots,\ R_m\}$, 看成一个整体, 称为复元素. 作为集合, 复元素不关心所包含元素的排列次序, 且重复的元素只取一次. 两复元素相等的充要条件是它们包含的元素相同, 即 $\mathcal{R} = \mathcal{S}$ 的充要条件是 $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$. 普通元素和复元素相乘仍是复元素. $T\mathcal{R}$ 是由元素 TR_j 的集合构成的复元素, 而 $\mathcal{R}T$ 则由元素 R_jT 的集合构成. 设 $\mathcal{S} = \{S_1,\ S_2,\ \cdots,\ S_n\}$, 两复元素的乘积 $\mathcal{RS}$ 是所有形如 R_jS_k 的元素集合构成的复元素. 上面出现的元素乘

积, 如 TR_j, R_jT 和 R_jS_k, 均按群元素的乘积规则相乘. 复元素的乘积满足结合律. 如果复元素的集合, 按照复元素的乘积规则, 符合群的四个条件, 也构成群.

定理 1.1(重排定理) 设 T 是群 $\mathrm{G} = \{E,\ R,\ S,\ \cdots\}$ 中的任一确定元素, 则下面三个集合与原群 G 相同:

$$\begin{aligned} T\mathrm{G} &= \{T,\ TR,\ TS,\ \cdots\}, \\ \mathrm{G}T &= \{T,\ RT,\ ST,\ \cdots\}, \\ \mathrm{G}^{-1} &= \{E,\ R^{-1},\ S^{-1},\ \cdots\}. \end{aligned}$$

用复元素符号表达为

$$T\mathrm{G} = \mathrm{G}T = \mathrm{G}^{-1} = \mathrm{G}. \tag{1.7}$$

证明 以 $T\mathrm{G} = \mathrm{G}$ 为例证明. 对群 G 任何元素 R, 有 $TR \in \mathrm{G}$, 因而 $T\mathrm{G} \subset \mathrm{G}$. 反之, 因为 $R = T(T^{-1}R)$, 而 $T^{-1}R \in \mathrm{G}$, 所以 $\mathrm{G} \subset T\mathrm{G}$. 证完.

对于有限群, 群元素数目有限, 因此有可能把元素的乘积全部排列出来, 构成一个表, 称为群的乘法表 (multiplication table), 简称群表. 为了确定起见, 对于 $RS = T$, 今后称 R 为**左乘元素**, S 为**右乘元素**, 而 T 为**乘积元素**. 乘法表由下法建立: 在表的最左面一列, 把全部群元素列出来, 作为左乘元素, 在表的最上面一行, 也把全部群元素列出来, 作为右乘元素, 元素的排列次序可以任意选定, 但常**让左乘元素和右乘元素的排列次序相同, 恒元排在第一位**. 表的内容有 $g \times g$ 格, 每一格填入它所在行最左面一列的元素 R (左乘元素) 和它所在列最上面一行的元素 S (右乘元素) 的乘积 RS. 因为恒元与任何元素相乘还是该元素, 如果把恒元排在表中第一个位置, 则**乘法表内容中第一行和右乘元素相同, 第一列和左乘元素相同**. 由重排定理, **乘法表乘积元素中每一行 (或列) 都不会有重复元素**. 乘法表完全描写了有限群的性质.

我们先来看二阶群和三阶群的乘法表. 当把第一列和第一行按左乘元素和右乘元素填完后, 重排定理已完全确定了表中各位置的填充, 如表 1.1 和表 1.2 所示. 因此**准确到同构, 二阶群只有一种, 三阶群也只有一种**.

表 1.1 二阶群的乘法表

C_2	e	σ
e	e	σ
σ	σ	e

在二阶群中, 可让 e 代表恒等变换, σ 代表空间反演变换, 则这是对空间反演不变的系统的对称变换群, 常记为 V_2. 也可让 e 代表数 1, σ 代表数 -1, 按普通的数乘积, 它们也构成二阶群, 记为 C_2. 这两个群是同构的, $\mathrm{V}_2 \approx \mathrm{C}_2$. 对三阶群有 $\omega^2 = \omega'$ 和 $\omega^3 = e$.

表 1.2 三阶群的乘法表

C_3	e	ω	ω'
e	e	ω	ω'
ω	ω	ω'	e
ω'	ω'	e	ω

按右手螺旋法则, 绕沿空间 $\hat{\boldsymbol{n}}(\theta,\varphi)$ 方向的轴转动 ω 角的变换记为 $R(\hat{\boldsymbol{n}},\omega)$, 其中 θ 和 φ 是 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 方向的极角和方位角, 尖角 $\wedge$ 表单位矢量. 设 $R=R(\hat{\boldsymbol{n}},2\pi/N)$, R 及其幂次的集合

$$\mathrm{C}_N=\{E,\ R,\ R^2,\ \cdots,\ R^{N-1}\},\quad R^N=E,\quad R^{-1}=R^{N-1}, \tag{1.8}$$

定义元素乘积为相继做变换, 则此集合满足群的定义, 构成群. 一般说来, 由一个元素 R 及其幂次构成的有限群称为**由 R 生成的循环群**, R 称为循环群的生成元. C_N 是 N 阶循环群, 生成元 R 常记为 C_N, 称为 N 次固有转动, 或简称 N 次转动. 此转动轴常称为 N 次固有转动轴, 简称 N 次轴.

N 次转动和空间反演 σ 的乘积记为 S_N, $S_N=\sigma \mathrm{C}_N=\mathrm{C}_N\sigma$, 称为 N 次非固有转动. 由 S_N 及其幂次构成的循环群记为 $\overline{\mathrm{C}}_N$, 此转动轴称为 N 次非固有转动轴. **C_N 群的阶是 N, $\overline{\mathrm{C}}_N$ 群的阶, 根据 N 是偶数或奇数, 分别是 N 或 $2N$.**

循环群中元素乘积可以对易, 因而循环群是阿贝尔群. 循环群生成元的选择不是唯一的, 如循环群 C_N 中, C_N 和 C_N^{N-1} 都可作生成元. 循环群的乘法表有共同的特点, 当表中元素按生成元的幂次排列时, 表的每一行都可由前一行向左移动一格得到, 而最左面的元素移到最右面去.

现在来研究四阶群的乘法表. 四阶循环群 C_4 的乘法表如表 1.3 所示, 其中 R 的自乘和 T 的自乘都不等于恒元, 它们的四次幂才是恒元. 如果四阶群中所有元素的自乘都是恒元, 由于重排定理, 这样的四阶群乘法表只能如表 1.4 所示. 设 σ, τ 和 ρ 分别是空间反演、时间反演和时空全反演, 则此群称为四阶反演群 V_4. 也由于重排定理, 四阶群中除恒元外的任一元素的三次幂不能等于恒元. 因此, **准确到同构, 四阶群只有两种**: 如果群中所有元素自乘都是恒元, 它就与 V_4 群同构; 否则, 它就与 C_4 群同构.

表 1.3 四阶循环群 C_4 的乘法表

C_4	E	R	S	T
E	E	R	S	T
R	R	S	T	E
S	S	T	E	R
T	T	E	R	S

表 1.4　四阶反演群 V_4 的乘法表

V_4	e	σ	τ	ρ
e	e	σ	τ	ρ
σ	σ	e	ρ	τ
τ	τ	ρ	e	σ
ρ	ρ	τ	σ	e

1.2.2　子群

群 G 的子集 H, **如果按照原来的元素乘积规则**, 也满足群的四个条件, 则称为群 G 的子群 (subgroup). 注意, 乘积规则是群的最重要的性质, 如果给子集元素重新定义新的乘积规则, 那它就与原群脱离了关系, 即使此子集构成群, 也不能称为原群的子群. 任何群都有两个**平庸的子群: 恒元和整个群**. 但通常更关心非平庸子群.

既然有限群的元素数目是有限的, 那么有限群任一元素的自乘, 当幂次足够高时必然会有重复. 由群中恒元唯一性知, 有限群任一元素的自乘若干次后必可得到恒元. 若 $R^n = E$, n 是 R 自乘得到恒元的最低幂次, 则 n 称为元素 R 的阶, R 生成的循环群称为元素 R 的周期. 元素的周期构成子群, 称为循环子群 (cyclic subgroup). 阶数为 n 的循环子群, 通常就记为 C_n, 必要时用撇来加以区分. **恒元的阶为 1, 其他元素的阶都大于 1**. 不同元素的周期也可有重复或重合. 请注意**不要混淆群的阶和元素的阶这两个不同的概念**, 只有循环群生成元的阶才等于该群的阶.

如何来判定一个子集是否构成子群? 既然子集元素满足原群的元素乘积规则, 结合律是显然满足的. 如果子集对元素乘积封闭, 则它必定包含子集中任一元素的周期, 对有限群来说, 元素 R 的周期包含了恒元和逆元 R^{-1}, 因此**对有限群, 检验子集是否满足封闭性就可以判定子集是否构成子群.** 当然对无限群, 判定子群还必须检验恒元和逆元是否在子集中. **不含恒元的子集肯定不是子群,** 这是否定子集为子群的一个最简单判据.

有限群中任一元素 R 的周期构成群中一个子群. 若此子群尚未充满整个群, 则在子群外再任取群中一元素 S, 由 R 和 S 所有可能的乘积构成一个更大的子群. 若它还没有充满整个群, 则再取第三个、第四个元素加入上述乘积, 最后总能充满整个有限群, 即群中所有元素都可表为若干个元素的乘积. 适当选择这些元素, 使有限群中所有元素都可表为尽可能少的若干个元素的乘积, 这些元素称为有限群的生成元, 生成元不能表成其他生成元的乘积. **有限群生成元的数目称为有限群的秩**.

1.2.3　正 N 边形对称群

把正 N 边形放在 xy 平面上, 中心和原点重合, 一个顶点在正 x 轴上. 保持正

N 边形不变的变换有两类. z 轴是 N 次固有转动轴, 绕 z 轴转动 $2\pi/N$ 角的变换记为 T, 则有 N 个对称变换 $T^n(1 \leqslant n \leqslant N)$, 其中 $T^N = E$. 在 xy 平面上, 当 N 是偶数时, 两相对顶点的连线和两对边中点的连线都是二次固有转动轴, 当 N 是奇数时, 顶点和对边中点的连线都是二次固有转动轴, 绕它们转动 π 角的变换都保持正 N 边形不变. 这样的二次转动轴共有 N 个, 它们与 x 轴的夹角分别为 $j\pi/N$ 角, 对应的对称变换记为 S_j, $0 \leqslant j \leqslant N-1$. 由这 $2N$ 个元素 T^m 和 S_j 的集合构成正 N 边形对称群 D_N (dihedral group).

研究 D_N 群元素的乘积规则. T 的周期是 N 阶循环群, 现在关键是要计算 TS_j 等于什么. 既然这些变换都不移动原点, 那么再有两点就完全确定了平面图形的位置. 设与 S_j 相应的二次轴上有点 A, 它在变换 S_j 中保持不变, 而在变换 T 中逆时针转动了 $2\pi/N$ 角, 设转到 B 点. 相应地, 原先的 B 点, 经 S_j 变到与二次轴对称的位置 C, 再经 T 变换, 恰好转到 A 点 (图 1.1). 可见 TS_j 是绕 $\angle AOB$ 的角平分线转动 π 角的变换, 因为此角平分线与原二次轴夹角为 π/N, 所以

$$TS_j = S_{j+1}, \quad j \mod N, \tag{1.9}$$

$j \mod N$ 是一种常用的数学符号, 它把取值相差 N 的两个 j 看成相同的, 即 $S_{j+N} = S_j$.

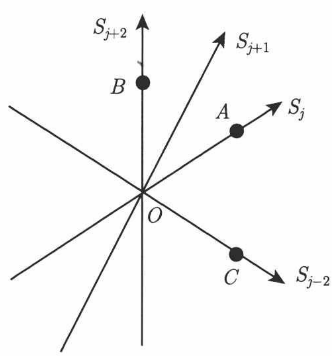

图 1.1 $TS_j = S_{j+1}$ 的计算示意图

注意到 S_j 的阶是 2, 由式 (1.9) 可推得群中所有元素的乘积规则:

$$\begin{aligned} &T^N = S_j^2 = E, && T^m S_j = S_{j+m}, \\ &T^m = S_{j+m} S_j = S_j S_{j-m}, && S_j T^m = S_{j-m}, \end{aligned} \quad j \text{ 和 } m \bmod N. \tag{1.10}$$

D_N 群的生成元可取为 T 和 S_0, 而 $S_m = T^m S_0$. 式 (1.10) 用公式给出了有限群的元素乘积规则. 当群的阶数较高时, 公式法比乘法表更方便. 阶数较低时采用乘法表更直观. 例如, 由式 (1.10) 可以列出正三角形对称群 D_3 的乘法表, 如表 1.5 所示.