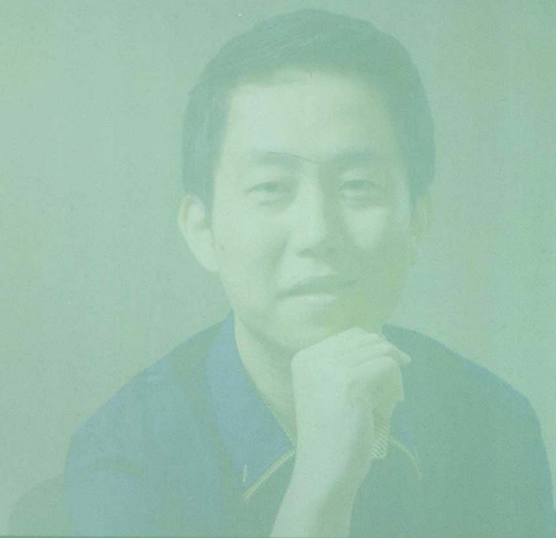
[张宇带你学系列丛书]



张宇带你学

高等数学·同济七版

（下册）

张宇 ◎ 主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

[张宇带你学系列丛书]

张宇带你学

高等数学·同济七版

（下册）

张宇 ◎主编 | 朱杰 高昆轮 ◎副主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

张宇带你学高等数学 ：同济7版. 下册 / 张宇主编. — 北京 ：北京理工大学出版社，2015.8

ISBN 978—7—5682—0951—9

Ⅰ. ①张… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第170815号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68948351(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 三河市文阁印刷有限公司
开　　本 / 787毫米×1092毫米　1/16
印　　张 / 16.5
字　　数 / 460千字
版　　次 / 2015年8月第1版　2015年8月第1次印刷
定　　价 / 39.80元

责任编辑/ 王玲玲
文案编辑/ 王玲玲
责任校对/ 孟祥敬
责任印制/ 边心超

前言
PREFACE

刚开始准备考研数学复习的同学通常都会面对两个重要问题,基础复习阶段看什么教材?怎么看?

先说第一个问题——看什么教材?虽然考研数学没有指定教材,全国各高校的大学教材又是五花八门,百家争鸣,但特别值得关注的一套教材是:同济大学数学系编写的《高等数学(第七版)》《线性代数(第六版)》、浙江大学编写的《概率论与数理统计(第四版)》.这套教材是全国首批示范性教材,是众多高校教学专家集体智慧的结晶,我建议同学们把这套教材作为考研基础复习阶段的资料.

再说第二个问题——怎么看这套教材?看什么,一句话就能说清楚;怎么看,才是学问.这里有两个关键.

第一,这套教材是按照教育部的《本科教学大纲》编写的,而考研试题是按照教育部的《全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》命制的,这两个大纲不完全一样.比如说高等数学第一章用极限的定义求函数极限可能在本科阶段就是同学们首先遇到的一个难以理解的问题,甚至很多人看到那里就已经在心里深深地埋下了一种可怕的恐惧感,但事实上,这个问题于考研是基本不作要求的;再如斜渐近线的问题在本科阶段基本不作为重点内容考查,但在考研大纲里却是命题人手里的香饽饽,类似问题还有很多;第二,针对考研,这套教材里的例题与习题有重点、非重点,也有难点、非难点;有些知识点配备的例题与习题重复了,有些知识点配备的例题与习题还不够.

这套"张宇带你学系列丛书"就是为了让同学们读好这套教材而编写的.细致说来,本书有如下四个特点:

第一,章节同步导学.本书在每一章开篇给同学们列出了此章每一节的教材内容与相应的考研要求,用以体现本科教学要求与考研要求的差异,同时精要地指出每一节及章末必做的例题和习题,可针对性地增强重点内容的复习.

第二,知识结构网图.本部分列出了本章学习的知识体系,宏观上把握各知识点的内容与联系,同时简明扼要地指出了本章学习的重点与难点等.

第三,课后习题全解.这一部分主要是为同学们做习题提供一个参照与提示,本部分给出了课后习题的全面解析,其中有的解答方法是我们众多老师在辅导过程中自己总结归纳的灵活与新颖性解法.但我还是建议同学们先自己认真独立思考习题再去翻看解答以作对比或提示之用.

第四,经典例题选讲.每一章最后部分都配有不同数量的经典例题,这部分例题较之书后习题不

论综合性还是灵活性都有所提高，目的也正如上面所谈让同学们慢慢接触考研类试题的特点与深度，逐步走向考研的要求，本部分例题及部分理论的说明等内容希望同学们认真体会并化为己有.

需要指出的是，考研大纲和本科教学大纲均不作要求的章节，本书也未收录.

总之，本书作为"张宇考研数学系列丛书"的基础篇，既可作为大学本科学习的一个重要参考，也是架起教材与《张宇高等数学18讲》《张宇线性代数9讲》《张宇概率论与数理统计9讲》及后续书籍的一座重要桥梁.我深信，认真研读学习本书的同学在基础阶段的复习必会事半功倍.

张宇

2015年8月于北京

目录
CONTENTS

第八章 向量代数与空间解析几何(仅数学一要求)

章节同步导学

章节	教材内容	考纲要求	必做例题	必做习题
§8.1 向量及其线性运算	向量的概念 空间直角坐标系	理解	例 1～9	P13 习题 8－1: 13,15,19
	向量的线性运算	掌握		
	利用坐标作向量的线性运算	掌握		
	向量的模、方向角、投影	理解		
§8.2 数量积 向量积 *混合积	数量积、向量积、混合积的概念、性质、运算规律、物理意义	掌握	例 2～5	P23 习题 8－2: 1,3,7,9,10
	两向量平行、垂直的充要条件	了解		
§8.3 平面及其方程	曲面方程与空间曲线方程的概念	了解	例 1～7	P29 习题 8－3: 2,3,5,6,9
	平面的点法式方程、一般方程	掌握		
	两平面的夹角,两平面垂直、平行或重合的充要条件	会		
§8.4 空间直线及其方程	空间直线的一般方程、对称式方程、参数方程	掌握	例 1～7	P36 习题 8－4: 3,4,5,8,9,14
	两直线的夹角,两直线垂直、平行或重合的充要条件	会		
	直线与平面的夹角,直线与平面垂直、平行的充要条件			
	平面束	掌握		
§8.5 曲面及其方程	曲面研究的基本问题	了解	例 1～4	P44 习题 8－5: 1,2,7,10(2)(4), 11(2),12
	旋转曲面的概念,旋转轴为坐标轴的旋转曲面的方程	会		
	柱面方程			
	二次曲面方程及其图形(锥面、椭球面、双曲面、抛物面)	了解		
§8.6 空间曲线及其方程	空间曲线的一般方程、参数方程	了解	例 1～5	P51 习题 8－6: 3,4,5(2),8
	空间曲线在坐标面上的投影曲线方程	会		
总习题八	总结归纳本章的基本概念、基本定理、基本公式、基本方法			P51 总习题八: 1,2,8,9,11,13, 14,15,16,19

知识结构网图

- 向量
  - 基本概念
    - 几何意义
    - 坐标表示
    - 模、方向角、投影
  - 运算
    - 线性运算
    - 数量积
    - 向量积
    - 混合积
- 曲线与曲面
  - 曲面
    - 概念与基本表示方法
    - 特殊曲面
      - 旋转曲面
      - 柱面
      - 二次曲面
  - 曲线
    - 曲线的方程
      - 一般方程
      - 参数方程
    - 曲线的投影
- 直线与平面
  - 平面
    - 概念
    - 平面方程
      - 点法式
      - 一般方程
    - 两平面的夹角
  - 直线
    - 概念
    - 直线方程
      - 一般方程
      - 标准式
      - 参数式
    - 两直线的夹角
    - 直线与平面的夹角

本章主要学习三维空间中点、直线、平面、曲线以及曲面的性质与表示方法,是整个多元函数微积分学的基础.

课后习题全解

习题 8－1　向量及其线性运算

1. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$. 试用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 表示 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

【解析】 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}=2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})-3(-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$

$=5\boldsymbol{a}-11\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{c}$.

2. 如果平面上一个四边形的对角线互相平分，试用向量证明它是平行四边形.

【证明】 设四边形 $ABCD$ 的两条对角线 AC 与 BD 交于 M 点（如图 8－1 所示）. 依题意有

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MC},\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{MB}.$$

因为 $$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DC},$$
$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BC}.$$

所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

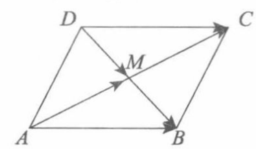


图 8－1

3. 把 $\triangle ABC$ 的 BC 边五等分，设分点依次为 D_1、D_2、D_3、D_4，再把各分点与点 A 连接. 试以 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$ 表示向量 $\overrightarrow{D_1A}$、$\overrightarrow{D_2A}$、$\overrightarrow{D_3A}$ 和 $\overrightarrow{D_4A}$.

【解析】 如图 8－2 所示，根据题意知

$$\overrightarrow{BD_1}=\frac{1}{5}\boldsymbol{a},\overrightarrow{D_1D_2}=\frac{1}{5}\boldsymbol{a},\overrightarrow{D_2D_3}=\frac{1}{5}\boldsymbol{a},\overrightarrow{D_3D_4}=\frac{1}{5}\boldsymbol{a},$$

故

$$\overrightarrow{D_1A}=-\overrightarrow{AD_1}=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD_1})=-\frac{1}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},$$

$$\overrightarrow{D_2A}=-\overrightarrow{AD_2}=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD_2})=-\frac{2}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},$$

$$\overrightarrow{D_3A}=-\overrightarrow{AD_3}=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD_3})=-\frac{3}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},$$

$$\overrightarrow{D_4A}=-\overrightarrow{AD_4}=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD_4})=-\frac{4}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}.$$

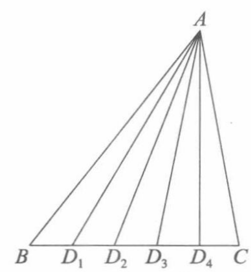


图 8－2

4. 已知两点 $M_1(0,1,2)$ 和 $M_2(1,-1,0)$. 试用坐标表示式表示向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 及 $-2\overrightarrow{M_1M_2}$.

【解析】 由题意知 $$\overrightarrow{M_1M_2}=(1-0,-1-1,0-2)=(1,-2,-2),$$
$$-2\overrightarrow{M_1M_2}=-2(1,-2,-2)=(-2,4,4).$$

5. 求平行于向量 $\boldsymbol{a}=(6,7,-6)$ 的单位向量.

【解析】 由题意知 $$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{6^2+7^2+(-6)^2}=11.$$

故平行于向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量为

$$\boldsymbol{e}_a=\pm\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\pm\frac{\boldsymbol{a}}{11}=\pm\frac{1}{11}(6,7,-6)=\pm\left(\frac{6}{11},\frac{7}{11},-\frac{6}{11}\right).$$

6. 在空间直角坐标系中，指出下列各点在哪个卦限？

$$A(1,-2,3),B(2,3,-4),C(2,-3,-4),D(-2,-3,1).$$

【解析】 A 点在第Ⅳ卦限，B 点在第Ⅴ卦限，C 点在第Ⅷ卦限，D 点在第Ⅲ卦限.

7. 在坐标面上和在坐标轴上的点的坐标各有什么特征？指出下列各点的位置：

$$A(3,4,0),B(0,4,3),C(3,0,0),D(0,-1,0).$$

【解析】 在 yOz 面上，点的横坐标 $x=0$；

在 zOx 面上，点的纵坐标 $y=0$；

在 xOy 面上，点的竖坐标 $z=0$；

在 x 轴上，点的纵、竖坐标均为 0，即 $y=z=0$；

在 y 轴上，点的横、竖坐标均为 0，即 $x=z=0$；

在 z 轴上，点的横、纵坐标均为 0，即 $x=y=0$.

所以 A 在 xOy 面上，B 在 yOz 面上，C 在 x 轴上，D 在 y 轴上.

8. 求点 (a,b,c) 关于(1)各坐标面；(2)各坐标轴；(3)坐标原点的对称点的坐标.

【解析】(1)点 (a,b,c) 关于 xOy 面的对称点为 $(a,b,-c)$；关于 yOz 面的对称点是 $(-a,b,c)$；关于 zOx 面的对称点为 $(a,-b,c)$.

(2)点 (a,b,c) 关于 x 轴的对称点是 $(a,-b,-c)$；关于 y 轴的对称点是 $(-a,b,-c)$；关于 z 轴的对称点是 $(-a,-b,c)$.

(3)点 (a,b,c) 关于坐标原点的对称点是 $(-a,-b,-c)$.

9. 自点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 分别作各坐标面和各坐标轴的垂线，写出各垂足的坐标.

【解析】答案如图 8—3 所示.

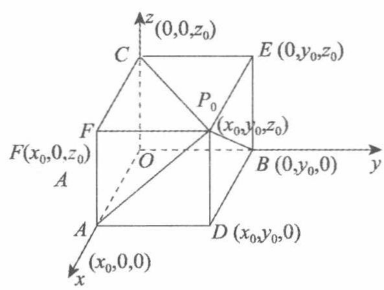


图 8—3

10. 过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 面的平面，问在它们上面的点的坐标各有什么特点？

【解析】如图 8—4 所示，过 P_0 且平行于 z 轴的直线 l 上的点的坐标的特点是：它们的横坐标与 x_0 相同，纵坐标与 y_0 相同.

而过点 P_0 且平行于 xOy 面的平面 π 上的点的坐标的特点是：它们的竖坐标与 z_0 相同.

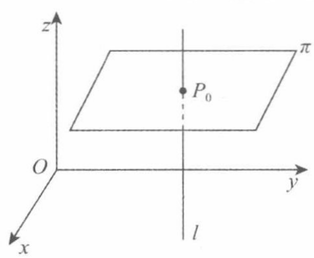


图 8—4

11. 一边长为 a 的立方体放置在 xOy 面上，其底面的中心在坐标原点，底面的顶点在 x 轴和 y 轴上，求它各顶点的坐标.

【解析】如图 8—5 所示，已知 $AB=a$，故 $OA=OB=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，于是各顶点的坐标分别为

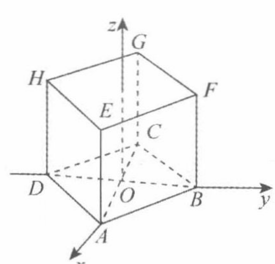


图 8—5

$$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right),B\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}a,0\right),C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right),D\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0\right),$$

$$E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,a\right),F\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}a,a\right),G\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,a\right),H\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}a,a\right).$$

12. 求点 $M(4,-3,5)$ 到各坐标轴的距离.

【解析】 点 M 到 x 轴的距离 $d_1=\sqrt{(-3)^2+5^2}=\sqrt{34}$，点 M 到 y 轴的距离 $d_2=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$，点 M 到 z 轴的距离 $d_3=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5$.

13. 在 yOz 面上，求与三点 $A(3,1,2)$、$B(4,-2,-2)$ 和 $C(0,5,1)$ 等距离的点.

【解析】 在 yOz 面上，设点 $P(0,y,z)$ 与 A,B,C 三点等距离，即

$$|\overrightarrow{PA}|^2=|\overrightarrow{PB}|^2=|\overrightarrow{PC}|^2,$$

故
$$\begin{cases}(-3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=(y-5)^2+(z-1)^2,\\(-4)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=(y-5)^2+(z-1)^2,\end{cases}$$

解方程组得 $y=1,z=-2$. 故所求点为 $(0,1,-2)$.

14. 试证明以三点 $A(4,1,9)$、$B(10,-1,6)$、$C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

【证明】 由
$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2}=7,$$
$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(2-4)^2+(4-1)^2+(3-9)^2}=7,$$
$$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(2-10)^2+(4+1)^2+(3-6)^2}=\sqrt{98}=7\sqrt{2},$$

知 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$ 及 $|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2$. 故 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

15. 设已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$ 和 $M_2(3,0,2)$. 计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

【解析】 因为 $\overrightarrow{M_1M_2}=(-1,-\sqrt{2},1)$，所以模为

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{2})^2+1^2}=2;$$

方向余弦为
$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\cos\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2},\cos\gamma=\frac{1}{2};$$

方向角为
$$\alpha=\frac{2}{3}\pi,\beta=\frac{3}{4}\pi,\gamma=\frac{\pi}{3}.$$

16. 设向量的方向余弦分别满足 (1) $\cos\alpha=0$；(2) $\cos\beta=1$；(3) $\cos\alpha=\cos\beta=0$. 问这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何？

【解析】 (1) 由 $\cos\alpha=0$ 知 $\alpha=\frac{\pi}{2}$，故向量垂直于 x 轴，平行于 yOz 面.

(2) 由 $\cos\beta=1$ 知 $\beta=0$，故向量与 y 轴同向，垂直于 xOz 面.

(3) 由 $\cos\alpha=\cos\beta=0$ 知 $\alpha=\beta=\frac{\pi}{2}$，故向量垂直于 x 轴和 y 轴，即与 z 轴平行，垂直于 xOy 面.

17. 设向量 $\boldsymbol{r}$ 的模是 4，它与 u 轴的夹角是 $\frac{\pi}{3}$，求 $\boldsymbol{r}$ 在轴 u 上的投影.

【解析】 已知 $|\boldsymbol{r}|=4$，$\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{r}=|\boldsymbol{r}|\cos\theta=4\cdot\cos\frac{\pi}{3}=4\times\frac{1}{2}=2$.

18. 一向量的终点在点 $B(2,-1,7)$ 上，它在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影依次为 4，-4 和 7. 求这个向量的起点 A 的坐标.

【解析】 设 A 点坐标为 (x,y,z)，则

$$\overrightarrow{AB}=(2-x,-1-y,7-z),$$

由题意知 $$2-x=4,-1-y=-4,7-z=7,$$
故 $x=-2,y=3,z=0$，因此 A 点坐标为 $(-2,3,0)$.

19. 设 $\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{p}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，求向量 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$ 在 x 轴上的投影及在 y 轴上的分向量.

【解析】 由题意知
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}\\&=4(3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k})+3(2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k})-(5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k})\\&=13\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+15\boldsymbol{k},\end{aligned}$$
所以 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴上的投影为 13，在 y 轴上的分向量为 $7\boldsymbol{j}$.

习题 8-2 数量积 向量积 *混合积

1. 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，求

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$； (2) $(-2\boldsymbol{a})\cdot3\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times2\boldsymbol{b}$； (3) $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦.

【解析】 (1) 由题意知
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(3,-1,-2)\cdot(1,2,-1)\\&=3\times1+(-1)\times2+(-2)\times(-1)=3,\end{aligned}$$
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&-1&-2\\1&2&-1\end{vmatrix}=(5,1,7).$$

(2) 由题意知
$$(-2\boldsymbol{a})\cdot3\boldsymbol{b}=-6(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=-6\times3=-18,$$
$$\boldsymbol{a}\times2\boldsymbol{b}=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=2(5,1,7)=(10,2,14).$$

(3) 由题意知
$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{3}{\sqrt{3^2+(-1)^2+(-2)^2}\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}$$
$$=\frac{3}{\sqrt{14}\sqrt{6}}=\frac{3}{2\sqrt{21}}.$$

2. 设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为单位向量，且满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

【解析】 已知 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，故 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=0$.

即 $$|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=0.$$

因此 $$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{1}{2}(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2)=-\frac{3}{2}.$$

3. 已知 $M_1(1,-1,2)$、$M_2(3,3,1)$ 和 $M_3(3,1,3)$. 求与 $\overrightarrow{M_1M_2}$、$\overrightarrow{M_2M_3}$ 同时垂直的单位向量.

【解析】 记与 $\overrightarrow{M_1M_2}$、$\overrightarrow{M_2M_3}$ 同时垂直的单位向量为 $\boldsymbol{e}$.

因为 $$\overrightarrow{M_1M_2}=(2,4,-1),\overrightarrow{M_2M_3}=(0,-2,2),$$

所以 $$\boldsymbol{m}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&4&-1\\0&-2&2\end{vmatrix}=(6,-4,-4),$$

所以 $$\boldsymbol{e}=\pm\frac{\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{m}|}=\pm\frac{(6,-4,-4)}{\sqrt{6^2+(-4)^2+(-4)^2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{17}}(3,-2,-2).$$

4. 设质量为 100 kg 的物体从点 $M_1(3,1,8)$ 沿直线移动到点 $M_2(1,4,2)$，计算重力所作的功(坐标系长度单位为 m，重力方向为 z 轴负方向).

【解析】 由题意知 $\overrightarrow{M_1M_2}=(-2,3,-6)$，$\boldsymbol{F}=(0,0,-100\times9.8)=(0,0,-980)$，
$$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=(0,0,-980)\cdot(-2,3,-6)=5\ 880(\mathrm{J}).$$

5. 在杠杆上支点 O 的一侧与点 O 的距离为 x_1 的点 P_1 处，有一个与 $\overrightarrow{OP_1}$ 成角 θ_1 的力 $\boldsymbol{F}_1$ 作用着；在 O 的另一侧与点 O 的距离为 x_2 的点 P_2 处，有一个与 $\overrightarrow{OP_2}$ 成角 θ_2 的力 $\boldsymbol{F}_2$ 作用着（如图8－6所示）. 问 θ_1、θ_2、x_1、x_2、$|\boldsymbol{F}_1|$、$|\boldsymbol{F}_2|$ 符合怎样的条件才能使杠杆保持平衡？

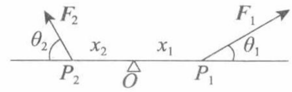


图 8－6

【解析】由物理学知识知，有固定转轴的物体的平衡条件是力矩的代数和为零. 两力矩分别为 $x_1|\boldsymbol{F}_1|\sin\theta_1$ 与 $x_2|\boldsymbol{F}_2|\sin\theta_2$，要使杠杆平衡，必须满足以下条件：

$$|\boldsymbol{F}_1|x_1\sin\theta_1=|\boldsymbol{F}_2|x_2\sin\theta_2.$$

6. 求向量 $\boldsymbol{a}=(4,-3,4)$ 在向量 $\boldsymbol{b}=(2,2,1)$ 上的投影.

【解析】由题意知　$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{(4,-3,4)\cdot(2,2,1)}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\dfrac{6}{3}=2.$

7. 设 $\boldsymbol{a}=(3,5,-2)$，$\boldsymbol{b}=(2,1,4)$，问 λ 与 μ 有怎样的关系，能使得 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直？

【解析】若要向量 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直，只需 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{k}=(0,0,1)$ 垂直即可，所以 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直的充要条件是

$$(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{k}=(3\lambda+2\mu,5\lambda+\mu,-2\lambda+4\mu)\cdot(0,0,1)=0,$$

因此
$$-2\lambda+4\mu=0\Leftrightarrow\lambda=2\mu.$$

8. 试用向量证明直径所对的圆周角是直角.

【证明】如图 8－7 所示，设 AB 是圆 O 的直径，C 点在圆周上，要证 $\angle ACB=\dfrac{\pi}{2}$，只要证明 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ 即可. 而

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}&=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC})\\&=(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{AO})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{AO})\\&=|\overrightarrow{OC}|^2-|\overrightarrow{AO}|^2=0,\end{aligned}$$

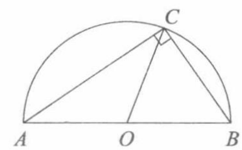


图 8－7

所以 $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$，即 $\angle ACB=\dfrac{\pi}{2}$.

9. 已知向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$，计算：

(1) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$；　(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；　(3) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$.

【解析】(1) 由题意知 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(2,-3,1)\cdot(1,-1,3)=8$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=(2,-3,1)\cdot(1,-2,0)=8$，

故
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}&=8(1,-2,0)-8(1,-1,3)=(0,-8,-24)\\&=-8\boldsymbol{j}-24\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

(2) 由题意知
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k},$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&-4&4\\2&-3&3\end{vmatrix}=-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}.$$

(3) 由题意知
$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}2&-3&1\\1&-1&3\\1&-2&0\end{vmatrix}=2.$$

10. 已知 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，求 $\triangle OAB$ 的面积.

【解析】由向量积的几何意义知：$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 为以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积，得 $\triangle OAB$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|$，

而
$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}=-3\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},$$
可得$|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|=\sqrt{19}$,所以$\triangle OAB$的面积$=\dfrac{\sqrt{19}}{2}$.

*11. 已知$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,$\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$,试利用行列式的性质证明:
$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}.$$

【证明】 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$
$$=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=-\begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}.$$

12. 试用向量证明不等式:
$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\geqslant|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|,$$
其中a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3为任意实数,并指出等号成立的条件.

【证明】 设向量$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$,$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$.

由$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$知,$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$,从而
$$|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2},$$
当a_1,a_2,a_3与b_1,b_2,b_3成比例,即$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$时,上述等式成立.

习题 8-3　平面及其方程

1. 求过点$(3,0,-1)$且与平面$3x-7y+5z-12=0$平行的平面方程.

【解析】 所求平面的法向量为$\boldsymbol{n}=(3,-7,5)$,又因为所求平面过点$(3,0,-1)$,所以由点法式方程,得
$$3(x-3)-7y+5(z+1)=0,$$
即所求平面方程为
$$3x-7y+5z-4=0.$$

2. 求过点$M_0(2,9,-6)$且与连接坐标原点及点M_0的线段OM_0垂直的平面方程.

【解析】 由题意知$\overrightarrow{OM_0}=(2,9,-6)$.所求平面与$\overrightarrow{OM_0}$垂直,可取$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{OM_0}$,设所求平面方程为
$$2x+9y-6z+D=0.$$
将点$M_0(2,9,-6)$代入上式,得$D=-121$.故所求平面方程为
$$2x+9y-6z-121=0.$$

3. 求过$M_1(1,1,-1)$、$M_2(-2,-2,2)$和$M_3(1,-1,2)$三点的平面方程.

【解析】 这三点分别为M_1、M_2、M_3,则$\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}$就是该平面的一个法向量,而
$$\overrightarrow{M_1M_2}=(-3,-3,3),\overrightarrow{M_1M_3}=(0,-2,3),$$
$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -3 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}=(-3,9,6).$$
于是此平面的方程为$-3(x-1)+9(y-1)+6(z+1)=0$,即$x-3y-2z=0$.

4. 指出下列各平面的特殊位置，并画出各平面：

(1) $x=0$；

(2) $3y-1=0$；

(3) $2x-3y-6=0$；

(4) $x-\sqrt{3}y=0$；

(5) $y+z=1$；

(6) $x-2z=0$；

(7) $6x+5y-z=0$.

【解析】(1)～(7)的平面分别如图 8－8(1)～(7)所示.

(1) $x=0$ 表示 yOz 坐标面.

(2) $3y-1=0$ 表示过点 $\left(0,\frac{1}{3},0\right)$ 与 y 轴垂直的平面.

(3) $2x-3y-6=0$ 表示与 z 轴平行的平面.

(4) $x-\sqrt{3}y=0$ 表示过 z 轴的平面.

(5) $y+z=1$ 表示平行于 x 轴的平面.

(6) $x-2z=0$ 表示过 y 轴的平面.

(7) $6x+5y-z=0$ 表示过原点的平面.

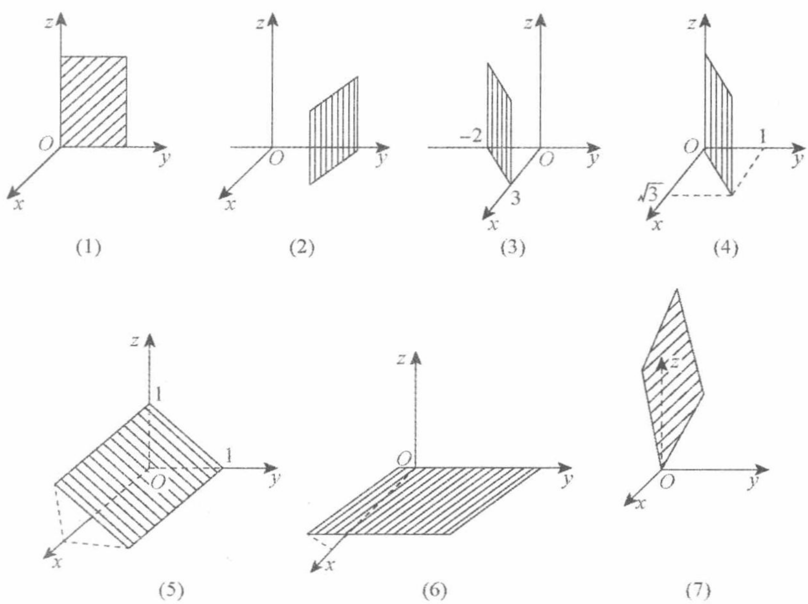


图 8－8

5. 求平面 $2x-2y+z+5=0$ 与各坐标面的夹角的余弦.

【解析】所给平面的法线向量为 $\boldsymbol{n}=(2,-2,1)$，设该平面与 xOy 面，xOz 面，yOz 面的夹角分别为 $\theta_z,\theta_y,\theta_x$. 注意到 xOy 面、xOz 面、yOz 面的法向量依次为 $\boldsymbol{k}=(0,0,1)$，$\boldsymbol{j}=(0,1,0)$，$\boldsymbol{i}=(1,0,0)$，于是

$$\cos\theta_z=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{2\times0+(-2)\times0+1\times1}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{1}{3},$$

$$\cos\theta_y=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{j}}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{2\times0+(-2)\times1+1\times0}{3}=-\frac{2}{3},$$

$$\cos\theta_x=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{i}}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{2\times1+(-2)\times0+1\times0}{3}=\frac{2}{3},$$

即为所给平面分别与 xOy 面,xOz 面和 yOz 面的夹角的余弦.

6. 一平面过点(1,0,-1)且平行于向量 $\boldsymbol{a}=(2,1,1)$ 和 $\boldsymbol{b}=(1,-1,0)$,试求该平面方程.

【解析】 设所求平面法向量为 $\boldsymbol{n}$,由题意知 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{b}$,所以 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

$$\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&1&1\\1&-1&0\end{vmatrix}=(1,1,-3),$$

又该平面过(1,0,-1),所以由点法式方程得

$$(x-1)+(y-0)-3(z+1)=0,$$

即
$$x+y-3z-4=0.$$

7. 求三平面 $x+3y+z=1,2x-y-z=0,-x+2y+2z=3$ 的交点.

【解析】 联立三平面方程

$$\begin{cases}x+3y+z=1,\\2x-y-z=0,\\-x+2y+2z=3,\end{cases}$$

解此方程组得 $x=1,y=-1,z=3$. 故所求交点为(1,-1,3).

8. 分别按下列条件求平面方程:

(1)平行于 xOz 面且经过点(2,-5,3);

(2)通过 z 轴和点(-3,1,-2);

(3)平行于 x 轴且经过两点(4,0,-2)和(5,1,7).

【解析】(1)所求平面平行于 xOz 面,故其单位法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,1,0)$,又该平面经过点(2,-5,3),所以由点法式方程,得 $1\cdot[y-(-5)]=0$,即 $y+5=0$.

(2)所求平面过 z 轴,故设所求平面方程为 $Ax+By=0$. 将点(-3,1,-2)代入,得

$$-3A+B=0,\text{即 } B=3A,$$

因此,所求平面方程为

$$Ax+3Ay=0,\text{即 } x+3y=0.$$

(3)设 $P(x,y,z)$ 为此面上任一点,点(4,0,-2)和(5,1,7)分别用 A,B 表示,则 $\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB},\boldsymbol{i}$ 共面,

$[\overrightarrow{AP}\,\overrightarrow{AB}\boldsymbol{i}]=0$,即 $\begin{vmatrix}x-4&y&z+2\\1&1&9\\1&0&0\end{vmatrix}=0$,故所求平面方程为

$$9y-z-2=0.$$

9. 求点(1,2,1)到平面 $x+2y+2z-10=0$ 的距离.

【解析】 利用点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离公式

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$=\frac{|1+2\times2+2\times1-10|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{|-3|}{3}=1.$$

习题 8－4　空间直线及其方程

1. 求过点$(4,-1,3)$且平行于直线$\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{5}$的直线方程.

【解析】所求直线与已知直线平行，故所求直线的方向向量$\boldsymbol{s}=(2,1,5)$，直线方程即为

$$\frac{x-4}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{5}.$$

2. 求过两点$M_1(3,-2,1)$和$M_2(-1,0,2)$的直线方程.

【解析】所求直线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=\overrightarrow{M_1M_2}=(-4,2,1),$$

于是所求直线方程为

$$\frac{x-3}{-4}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1}.$$

3. 用对称式方程及参数方程表示直线

$$\begin{cases}x-y+z=1,\\2x+y+z=4.\end{cases}$$

【解析】该直线的方向向量与两个平面的法向量$\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2$都垂直.
所以直线的方向向量$\boldsymbol{s}$可取为

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-1&1\\2&1&1\end{vmatrix}=(-2,1,3).$$

在$\begin{cases}x-y+z=1,\\2x+y+z=4\end{cases}$中，令$x=1$，得$\begin{cases}-y+z=0,\\y+z=2,\end{cases}$解得$y=1,z=1$，即$(1,1,1)$为所求直线上一点.所以所求直线的方程为

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{3}.$$

在上式中令比值为t，得直线的参数方程为$\begin{cases}x=1-2t,\\y=t+1,\\z=3t+1.\end{cases}$

4. 求过点$(2,0,-3)$且与直线

$$\begin{cases}x-2y+4z-7=0,\\3x+5y-2z+1=0\end{cases}$$

垂直的平面方程.

【解析】直线的方向向量为$\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-2&4\\3&5&-2\end{vmatrix}=-16\boldsymbol{i}+14\boldsymbol{j}+11\boldsymbol{k}.$

取平面法向量为$(-16,14,11)$，故所求平面方程为$-16(x-2)+14y+11(z+3)=0$.

5. 求直线$\begin{cases}5x-3y+3z-9=0,\\3x-2y+z-1=0\end{cases}$与直线$\begin{cases}2x+2y-z+23=0,\\3x+8y+z-18=0\end{cases}$的夹角的余弦.