北大燕园

2017年 李正元·范培华

考研数学⑥

# 数学

数学三

# 历年试题解析


主编 北京大学 李正元
北京大学 尤承业
北京大学 范培华



中国政法大学出版社

北大燕园

2017年李正元·范培华考研数学⑥

# 数学

数学三

# 历年试题解析

主编 北京大学 李正元
北京大学 尤承业
北京大学 范培华

中国政法大学出版社
2016·北京

**图书在版编目(CIP)数据**

李正元·范培华考研数学数学历年试题解析. 数学三/李正元,尤承业,范培华主编. —北京:中国政法大学出版社,2016.1

ISBN 978-7-5620-6477-0

Ⅰ.①李… Ⅱ.①李… ②尤… ③范… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-题解 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第280935号

---

出 版 者　中国政法大学出版社
地　　址　北京市海淀区西土城路25号
邮寄地址　北京100088信箱8034分箱　邮编100088
网　　址　http://www.cuplpress.com(网络实名:中国政法大学出版社)
电　　话　010-58908285(总编室)　58908433(编辑部)　58908334(邮购部)
承　　印　北京朝阳印刷厂有限责任公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　23.75
字　　数　650千字
版　　次　2016年1月第1版
印　　次　2016年1月第1次印刷
定　　价　45.00元

# 前　言

## （一）

对于数学考试而言，试卷本身就是一份量表，它是《数学考试大纲》规定的考试内容和考试要求的具体体现。全国硕士研究生数学招生考试统考试题是广大数学教师及参加命题的专家、教授智慧和劳动的结晶，是一份宝贵的资料。每一道试题，既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力和水平的要求，又蕴涵着命题的指导思想、基本原则和趋势，因此，对照《数学考试大纲》分析、研究这些试题不仅可以展示出统考以来数学考试的全貌，便于广大考生了解有关试题和信息，从中发现规律，归纳出每部分内容的重点、难点及常考的题型，进一步把握考试的特点及命题的思路和规律，而且通过反复做历年试题，发现问题，找出差距，以便广大考生能及时查漏补缺，通过研究历年试题，也便于广大考生明确复习方向，从而从容应考，轻取高分。

## （二）

本书汇集了2002年~2016年全国硕士研究生招生统考数学三试题，而且对所有试题均给出了详细解答，并尽量做到一题多解。有很多试题的解法是我们几位编者从事教学和考研辅导研究总结出来的，具有独到之处。其中有些试题的解法比标准答案的解法更简捷、更省时省力。本书在对历年考研数学试题逐题解答的基础上，每题都给出了分析或评注，不仅对每题所考知识点或难点进行了分析，而且对各种题型的解法进行了归纳总结，使考生能举一反三，触类旁通；同时通过具体试题，指出了考生在解题过程中出现的有关问题和典型错误，并点评错因，提醒考生引以为戒。

本书把历年考研数学三试题依据考试大纲的顺序，按试题考查内容分章，这样与考生复习数学的顺序保持一致，便于考生系统复习使用。每章按以下内容编写：

**编者按**——总体说明历年试题在本章所考查的重要知识点、常考题型及所占总分比例，便于考生在宏观上把握重点。

**题型分类解析**——将历年同一内容的试题归纳在一起，并进行详细解答。这样便于考生复习该部分内容时了解到：该内容考过什么样的题目，是从哪个角度来命制题的，并常与哪些知识点联系起来命题等等，从而能让广大考生掌握考研数学试题的广度和深度，并

在复习时能明确目标，做到心中有数。同时把历年同一内容的试题放在一起，能让广大考生抓住近几年考题与往年考题的某种特殊联系（类似或雷同），并且能清楚地查出哪些知识点还未命题考查。另外，为了帮助考数学三的考生更全更好地了解相关内容的命题情况，**本书精选了数学一、二及原数学四相关内容的典型考题（含解答），同时也精选了2001年（含）以前数学三相关内容的典型考题（含解答）**，供将要备考数学三的考生参考并复习之用。因此本书这种独特编排体例有助于广大考生科学备考。

**综述**——每种题型后都归纳总结该题型解题思路、方法和技巧，并举例说明。

## （三）

本书给准备报考研究生的考生提供了锻炼自己解题能力和测验自己数学水平的机会。编者建议准备报考研究生的考生在阅读本书时，应先看《数学考试大纲》，以便明确考试的有关要求，接着去认真阅读有关教材和参考书（推荐考生认真阅读由中国政法大学出版社出版的**《考研数学复习全书（数学三）》**，该书对考试大纲中所要求的基本概念、基本公式、基本定理讲解详细，各类题型的解题思路、方法和技巧归纳到位，与考研命题思路较吻合），复习完后，再来看本书的试题，以检验自己的水平。在看本书试题时，应该先自己动手做题，然后将自己所得的结果与本书的解法加以比较，看哪些自己做对了，哪些自己做错了，为什么会做错，可以与你的同学、同事和老师研讨。建议考生把本书中的全部试题做2～3遍，直到对所有的题目一见到就能够熟练地、正确地解答出来的程度。

本书在编写、编辑和出版过程中，尽管我们抱着对广大考生认真负责的精神，高质量、严要求，但由于时间紧、任务重，加上我们水平有限，难免有许多不足、不尽人意之处。敬请广大读者和专家同行不吝赐教、批评指正。

祝广大考生复习顺利，考研成功！

编者

2016年1月

# 目 录

## 第一篇 2016 年考研数学三试题及答案与解析



## 第二篇 2002 ~ 2015 年考研数学三试题



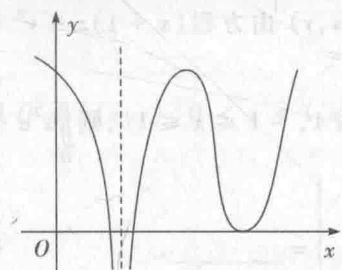
## 第三篇 2002 ~ 2015 年考研数学三试题分类解析

# 第一篇　2016年考研数学三试题及答案与解析

## 2016年考研数学三试题

一、选择题:1 ~ 8小题,每小题4分,共32分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,其导函数的图形如图所示,则




(A)　函数 $f(x)$ 有2个极值点,曲线 $y=f(x)$ 有2个拐点.

(B)　函数 $f(x)$ 有2个极值点,曲线 $y=f(x)$ 有3个拐点.

(C)　函数 $f(x)$ 有3个极值点,曲线 $y=f(x)$ 有1个拐点.

(D)　函数 $f(x)$ 有3个极值点,曲线 $y=f(x)$ 有2个拐点.　【　】

(2) 已知函数 $f(x,y)=\dfrac{e^x}{x-y}$,则

(A) $f'_x-f'_y=0$.　　(B) $f'_x+f'_y=0$.

(C) $f'_x-f'_y=f$.　　(D) $f'_x+f'_y=f$.　【　】

(3) 设 $J_i=\iint\limits_{D_i}\sqrt[3]{x-y}\,dxdy\,(i=1,2,3)$,其中 $D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$,$D_2=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant\sqrt{x}\}$,$D_3=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,x^2\leqslant y\leqslant 1\}$ 则

(A) $J_1<J_2<J_3$.　　(B) $J_3<J_1<J_2$.

(C) $J_2<J_3<J_1$.　　(D) $J_2<J_1<J_3$.　【　】

(4) 级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)$ ($k$ 为常数)

(A)　绝对收敛.　　(B)　条件收敛.

(C)　发散.　　(D)　收敛性与 $k$ 有关.　【　】

(5) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵,且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,则下列结论错误的是

(A)　$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似.　　(B)　$\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

(C)　$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似.　　(D)　$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.　【　】

(6) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$ 的正、负惯性指数分别为1,2,则

(A)　$a>1$.　　(B)　$a<-2$.

(C)　$-2<a<1$.　　(D)　$a=1$ 或 $a=-2$.　【　】

(7) 设 $A,B$ 为两个随机事件,且 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$,如果 $P(A|B) = 1$,则

(A) $P(\bar{B}|\bar{A}) = 1$.　　(B) $P(A|\bar{B}) = 0$.

(C) $P(A \cup B) = 1$.　　(D) $P(B|A) = 1$.　　【　】

(8) 设随机变量 $X$ 与 $Y$ 相互独立,且 $X \sim N(1,2), Y \sim N(1,4)$,则 $D(XY) =$

(A) 6.　　(B) 8.　　(C) 14.　　(D) 15.　　【　】

二、填空题:9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + f(x)\sin 2x} - 1}{e^{3x} - 1} = 2$,则 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) =$ ______.

(10) 极限 $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n^2}\left(\sin\dfrac{1}{n} + 2\sin\dfrac{2}{n} + \cdots + n\sin\dfrac{n}{n}\right) =$ ______.

(11) 设函数 $f(u,v)$ 可微, $z = z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z - y^2 = x^2 f(x-z,y)$ 确定,则 $dz|_{(0,1)} =$ ______.

(12) 设 $D = \{(x,y) \mid |x| \leqslant y \leqslant 1, -1 \leqslant x \leqslant 1\}$,则 $\iint\limits_D x^2 e^{-y^2} dxdy =$ ______.

(13) 行列式 $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} =$ ______.

(14) 设袋中有红、白、黑球各 1 个,从中有放回地取球,每次取 1 个,直到三种颜色的球都取到时停止,则取球次数恰好为 4 的概率为______.

三、解答题:15 ~ 23 小题,共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x \to 0} (\cos 2x + 2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$.

(16)(本题满分 10 分)

设某商品最大需求量为1200 件,该商品的需求函数 $Q = Q(p)$,需求弹性 $\eta = \dfrac{P}{120 - P}(\eta > 0)$, $P$ 为单元价(万元).

(Ⅰ) 求需求函数的表达式.

(Ⅱ) 求 $P = 100$ 万元时的边际收益,并说明其经济意义.

(17)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x) = \int_0^1 |t^2 - x^2| dt (x > 0)$,求 $f'(x)$ 并求 $f(x)$ 的最小值.

(18)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 连续,且满足 $\int_0^x f(x-t)dt = \int_0^x (x-t)f(t)dt + e^{-x} - 1$,求 $f(x)$.

(19)(本题满分10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$ 的收敛域及和函数.

(20)(本题满分 11 分)

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1-a\\1&0&a\\a+1&1&a+1\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}0\\1\\2a-2\end{pmatrix}$ 且方程组 $Ax=\beta$ 无解，

（Ⅰ）求 $a$ 的值；

（Ⅱ）求方程组 $A^{\mathrm{T}}Ax=A^{\mathrm{T}}\beta$ 的通解.

(21)(**本题满分 11 分**)

已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

（Ⅰ）求 $A^{99}$.

（Ⅱ）设 3 阶矩阵 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 满足 $B^2=BA$. 记 $B^{100}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，将 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 分别表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合.

(22)(**本题满分 11 分**)

设二维随机变量 $(X,Y)$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid 0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\}$ 上服从均匀分布，令 $U=\begin{cases}1, & X\leqslant Y,\\0, & X>Y.\end{cases}$

（Ⅰ）写出 $(X,Y)$ 的概率密度；

（Ⅱ）问 $U$ 与 $X$ 是否相互独立？并说明理由；

（Ⅲ）求 $Z=U+X$ 的分布函数 $F(z)$.

(23)(**本题满分 11 分**)

设总体 $X$ 的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{\theta^3}, & 0<x<\theta,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$ 其中 $\theta\in(0,+\infty)$ 为未知参数，$X_1,X_2,X_3$ 为来自总体 $X$ 的简单随机样本，令 $T=\max(X_1,X_2,X_3)$.

（Ⅰ）求 $T$ 的概率密度；

（Ⅱ）确定 $a$，使得 $E(aT)=\theta$.

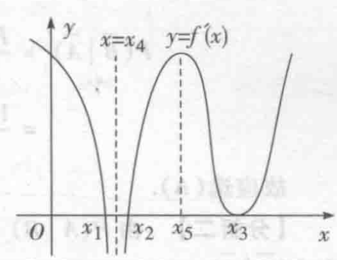
# 2016 年考研数学三试题答案与解析

## 一、选择题

(1)【**分析**】 导函数 $f'(x)$ 有三个零点 $x_1,x_2,x_3$，只有 $x_1,x_2$ 两侧导数异号，$x_1,x_2$ 是极值点. $x_3$ 不是极值点. 另还有一个导数不存在的点 $x=x_4$，它的两侧导数不变号，故不是极值点. 总共只有 2 个极值点.

导函数 $f'(x)$ 的升降性分界点只有 $x_4,x_5,x_3$（其中 $x=x_4$ 处 $f'(x)$，$f''(x)$ 不存在），它们是拐点，即有三个拐点.

因此选(B).



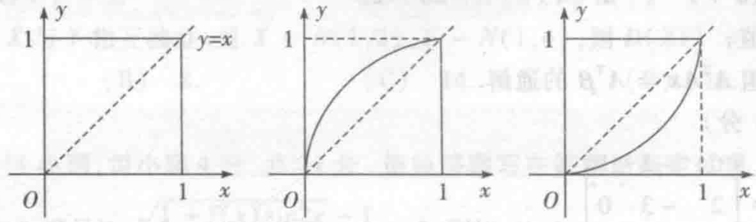

(2)【**分析**】 先求出

$$f'_x=\frac{\mathrm{e}^x(x-y)-\mathrm{e}^x}{(x-y)^2},\quad f'_y=\frac{\mathrm{e}^x}{(x-y)^2}$$

于是
$$f'_x+f'_y=\frac{\mathrm{e}^x(x-y)}{(x-y)^2}=\frac{\mathrm{e}^x}{x-y}=f$$

选(D).

(3)【分析】 画出 $D_i$ 的图形如下图，先比较 $J_1$ 与 $J_2$，在 $J_1 - J_2$ 的积分区域上，$y > x$，被积函数 $\sqrt[3]{x-y} < 0$，所以 $J_1 - J_2 < 0, J_1 < J_2$. 再比较 $J_1$ 与 $J_3$.




$D_1$ $D_2$ $D_3$

由于在 $J_1 - J_3$ 的积分区域上，$x > y$，被积函数 $\sqrt[3]{x-y} > 0$，所以 $J_1 - J_3 > 0, J_1 > J_3$.

综上有 $J_3 < J_1 < J_2$. 故应选(B).

(4)【分析】 由于

$$\left|\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$$

$$< \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

由 $p$ 级数的敛散性可知，原级数绝对收敛，故选(A).

(5)【分析】 用排除法.

设可逆矩阵 $P$，使得 $P^{-1}AP = B$，则两边取逆得 $P^{-1}A^{-1}P = B^{-1}$，(B) 正确.

两边转置得 $(P^{\mathrm{T}})A^{\mathrm{T}}(P^{\mathrm{T}})^{-1} = B^{\mathrm{T}}$，(A) 正确.

于是 $P^{-1}(A + A^{-1})P = P^{-1}AP + P^{-1}A^{-1}P = B + B^{-1}$，(D) 正确. 故(A)，(B)，(D) 都排除，选(C).

(6)【分析】 $f$ 的正、负惯性指数分别为 1，2，即 $f$ 的矩阵 $A$ 的特征值中 1 个正，2 个负.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

求出 $A$ 的特征值为 $a-1, a-1, a+2$. 于是特征值 1 正 2 负的充分必要条件为 $-2 < a < 1$. 选(C).

(7)【分析一】 由 $1 = P(A \mid B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$，得 $P(AB) = P(B)$.

$$P(\overline{B} \mid \overline{A}) = \frac{P(\overline{BA})}{P(\overline{A})} = \frac{P(\overline{A \cup B})}{P(\overline{A})} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(A)}$$

$$= \frac{1 - P(A) - P(B) + P(AB)}{1 - P(A)} = \frac{1 - P(A) - P(B) + P(B)}{1 - P(A)} = 1.$$

故应选(A).

【分析二】 由 $P(A \mid B) = 1$，可知在事件 $B$ 发生条件下，事件 $A$ 必定发生，故有 $A \supseteq B, \overline{B} \supseteq \overline{A}$. 从而有 $P(\overline{B} \mid \overline{A}) = 1$.

所以应选(A).

(8)【分析】 $X \sim N(1,2), Y \sim N(1,4)$，由 $X, Y$ 独立，可知 $X^2$ 与 $Y^2$ 也独立. 且

$$EX = EY = 1, DX = 2, DY = 4$$

故 $$D(XY) = E(XY)^2 - (EXY)^2 = EX^2Y^2 - (EXEY)^2$$

$$= EX^2 \cdot EY^2 - 1 = [DX + (EX)^2][DY + (EY)^2] - 1 = 14$$

所以应选(C).

## 二、填空题

(9)【分析】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin2x}-1}{e^{3x}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}f(x)\sin2x}{3x}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to0}f(x)=2.$

所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=6.$

(10)【分析】 极限

$$I\xlongequal{\text{记}}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sin\frac{1}{n}+2\sin\frac{2}{n}+\cdots+n\sin\frac{n}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\sin\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n}{n}\sin\frac{n}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\sin\frac{i}{n}\right)\xlongequal{f(x)=x\sin x}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}$$

$\sum\limits_{i=1}^{n}f\left(\dfrac{i}{n}\right)\dfrac{1}{n}$ 是 $f(x)=x\sin x$ 在 $[0,1]$ 区间上的一个积分和,由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可积,于是

$$I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\sin x\mathrm{d}x=-\int_0^1 x\mathrm{d}\cos x$$

$$=-x\cos x\Big|_0^1+\int_0^1\cos x\mathrm{d}x=-\cos1+\sin x\Big|_0^1$$

$$=\sin1-\cos1.$$

(11)【分析】 将 $x=0,y=1$ 代入原方程得

$z-1=0$,即 $z(0,1)=1$.

【分析一】 将方程两边求全微分得

$$(x+1)\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}y=2xf(x-z,y)\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}f(x-z,y)$$

令 $x=0,y=1,z=1$ 得

$$\mathrm{d}z+\mathrm{d}x-2\mathrm{d}y=0$$

即 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=-\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y$

【分析二】 在(0,1)点先求出 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

将方程两边对 $x$ 求导得

$$z+(x+1)\frac{\partial z}{\partial x}=2xf(x-z,y)+x^2\frac{\partial}{\partial x}f(x-z,y)$$

令 $x=0,y=1,z=1$ 得

$$1+\frac{\partial z}{\partial x}=0,\text{即}\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,1)}=-1$$

将方程两边对 $y$ 求导得

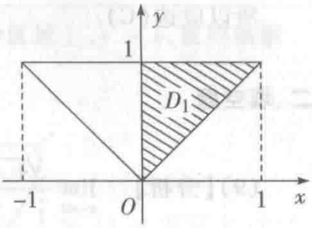
$$(x+1)\frac{\partial z}{\partial y}-2y=x^2\frac{\partial}{\partial y}f(x-z,y)$$

令 $x=0,y=1,z=1$ 得

$$\frac{\partial z}{\partial y}-2=0,\quad\text{即}\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,1)}=2$$

因此 $dz\big|_{(0,1)}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,1)}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,1)}\mathrm{d}y=-\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y.$

(12)【分析】 $\iint\limits_{D} x^2 e^{-y^2}\,dxdy = 2\iint\limits_{D_1} x^2 e^{-y^2}\,dxdy$




$$= 2\int_0^1 dy\int_0^y x^2 e^{-y^2}\,dx = \frac{2}{3}\int_0^1 y^3 e^{-y^2}\,dy$$

$$= -\frac{1}{3}\int_0^1 y^2\,d\,e^{-y^2}$$

$$= -\frac{1}{3}\left(y^2 e^{-y^2}\Big|_0^1 - \int_0^1 e^{-y^2}\,dy^2\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\left(e^{-1} + e^{-y^2}\Big|_0^1\right) = -\frac{1}{3}(2e^{-1} - 1) = \frac{1}{3}(1 - 2e^{-1}).$$

---

(13)【分析】 $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} + 4$

$$= \lambda\left[\lambda\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} + 3\right] + 4$$

$$= \lambda[\lambda(\lambda^2 + \lambda + 2) + 3] + 4$$

$$= \lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4.$$

---

(14)【分析】 基本事件总数 $N = 3^4 = 81$. 所求事件表明前三次出现了两种颜色,第四次才出现了第三种颜色. 所含基本事件数为 $C_3^2(2^3 - 2) = 18$.

概率 $p = \frac{18}{81} = \frac{2}{9}$,所以应填$\frac{2}{9}$.

> **评注** $C_3^2$ 表示在三种颜色中任取两种的取法共有 $C_3^2$ 种.
>
> $2^3$ 表示两种颜色在三次排列中共有$2^3$ 种排法,减去2是因为要去掉两种在三次取到的颜色全一样. 此外,该题也可以用对立事件来作.

## 三、解答题

(15)【分析】 $I = \lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x + 2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$

这是指数型的未定式极限,转化为

$$I = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^4}\ln(\cos 2x + 2x\sin x)}$$

归结为求 $J = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\ln(\cos 2x + 2x\sin x)$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\ln[1 + (\cos 2x - 1 + 2x\sin x)]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}(\cos 2x - 1 + 2x\sin x)$$

【分析一】 用洛必达法则求$\frac{0}{0}$型极限 $J$.

$$J = \lim_{x\to 0}\frac{1}{4x^3}(-2\sin 2x + 2\sin x + 2x\cos x)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{12x^2}(-4\cos 2x + 4\cos x - 2x\sin x)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{24x}(8\sin 2x - 4\sin x) - \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{6x}$$

$$= \frac{8}{12} - \frac{2}{12} - \frac{2}{12} = \frac{1}{3},$$

$$I = e^{\frac{1}{3}}$$

【分析二】 用泰勒公式

由 $$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$$

得 $$\cos 2x - 1 = -\frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{24}(2x)^4 = -2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$$

$$2x\sin x = 2x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)$$

于是 $$\cos 2x - 1 + 2x\sin x = \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)$$

因此 $$J = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \frac{1}{3},$$

$$I = e^{\frac{1}{3}}.$$

(16)【解】 （Ⅰ）因需求弹性定义 $\frac{p}{Q}\frac{dQ}{dp} < 0$，而题设 $\eta = \frac{p}{120 - p} > 0$.

故 $\frac{p}{Q}\frac{dQ}{dp} = -\eta$，即 $\frac{p}{Q}\frac{dQ}{dp} = \frac{p}{p - 120}$

得 $\frac{dQ}{Q} = \frac{dp}{p - 120}$，等式两边积分，得 $Q = c(p - 120)$. 又该商品的最大需求量为1200，即当 $p = 0$ 时，$Q = 1200$，由此可知 $c = -10$.

所以需求函数表达式为 $Q = 10(120 - p)$.

（Ⅱ）收益函数 $R(p) = pQ = 10p(120 - p)$

边际收益 $R'(p) = 1200 - 20p$

当 $p = 100$ 时，$R'(100) = -800$.

其经济意义是当价格为100万元时，再增加一个单位价格，收益将减少800万元.

(17)【分析与求解】 先求出 $f(x)$.

$0 < x \leqslant 1$ 时，

$$f(x) = \int_0^x (x^2 - t^2)\,dt + \int_x^1 (t^2 - x^2)\,dt$$

$$= x^3 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}t^3 \Big|_x^1 - x^2(1 - x) = \frac{4}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}$$

$x > 1$ 时，

$$f(x) = \int_0^1 (x^2 - t^2)\,dt = x^2 - \frac{1}{3}$$

于是 $$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3} & (0 < x \leqslant 1) \\ x^2 - \frac{1}{3} & (x \geqslant 1) \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}2x(2x-1) & (0<x\leqslant 1)\\ 2x & (x\geqslant 1)\end{cases}\quad\begin{cases}<0 & \left(0<x<\dfrac{1}{2}\right)\\ =0 & \left(x=\dfrac{1}{2}\right)\\ >0 & \left(x>\dfrac{1}{2}\right)\end{cases}$$

因此，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$ 为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 的最小值.

---

(18)【解】 $\int_0^x f(x-t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-x}-1$

对等式左边积分作变量替换

$$\int_0^x f(x-t)\,\mathrm{d}t\xlongequal{x-t=u}\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$$

从而有 $$\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u=x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-x}-1$$

等式两边对 $x$ 求导

$$f(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+xf(x)-xf(x)-\mathrm{e}^{-x}$$

$$\Rightarrow\qquad f(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-\mathrm{e}^{-x}$$

两边再对 $x$ 求导并在上式中令 $x=0$，得微分方程初值问题

$$f'(x)-f(x)=\mathrm{e}^{-x},f(0)=-1.$$

解之，得 $f(x)=\mathrm{e}^{\int \mathrm{d}x}\left(c+\int \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x\right)=c\mathrm{e}^{x}-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}$

由 $f(0)=-1$，得 $c=-\dfrac{1}{2}$

所以 $f(x)=-\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x})$.

---

(19)【解】 设 $u_n(x)=\dfrac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$

则 $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2(n+1)+2}}{(n+2)(2n+3)}\cdot\frac{(n+1)(2n+1)}{x^{2n+2}}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{(n+2)(2n+3)}|x|^2=|x|^2$$

当 $|x|<1$ 时，幂级数绝对收敛，当 $|x|>1$ 时幂级数发散，收敛半径 $R=1$.

当 $x=\pm 1$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(\pm 1)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)(2n+1)}$ 收敛，所以收敛域为 $[-1,1]$.

设 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)(2n+1)}$，$x\in[-1,1]$.

当 $x\in(-1,1)$ 时

$$S''(x)=\left(2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)(2n+1)}\right)''=2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)(2n+1)}\right)''$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{2}{1-x^2}$$

$$S'(x)=2\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}+s'(0)=\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

$$s(x)=\int_0^x \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|dt+s(0)=\int_0^x \ln|1+t|\,dt-\int_0^x \ln|1-t|\,dt$$

$$=t\ln|1+t|\Big|_0^x-\int_0^x \frac{t}{1+t}dt-t\ln|1-t|\Big|_0^x-\int_0^x \frac{t}{1-t}dt$$

$$=x\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\int_0^x \frac{1+t-1}{1+t}dt+\int_0^x \frac{1-t-1}{1-t}dt$$

$$=x\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+\ln|1+x|+\ln|1-x|=x\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+\ln|1-x^2|$$

当 $x=1$ 时，

$$s(1)=\lim_{x\to1^-}\left(x\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+\ln|1-x^2|\right)=\lim_{x\to1^-}(x\ln|1+x|-x\ln|1-x|+\ln|(1+x)|+\ln|1-x|)$$

$$=\lim_{x\to1^-}(x+1)\ln|1+x|+\lim_{x\to1^-}(1-x)\ln|1-x|=2\ln2.$$

同样的计算过程，可得

$$s(-1)=\lim_{x\to-1^+}\left(x\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+\ln|1-x^2|\right)=2\ln2.$$

所以 $$s(x)=\begin{cases}x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\ln(1-x^2), & x\in(-1,1)\\ 2\ln2, & x=\pm1.\end{cases}$$

**评注** 该题要求幂级数的收敛域与和函数，更简单的方法是先求和函数，由于和函数在 $(-R,+R)$ 内可导，并且有逐项求导公式

$$s'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

求导后的幂级数收敛半径仍为 $R$. 另外，逐项积分也不改变幂级数的收敛半径. 当我们得到和函数时，也就容易得到收敛半径. 如该题求出了 $s(x)$，其收敛半径 $R=1$，再加上端点，就得到了收敛域了.

---

(20)【解】（Ⅰ）用初等行变换把 $Ax=\beta$ 的增广矩阵化简：

$$(A,\beta)=\begin{pmatrix}1&1&1-a&0\\1&0&a&1\\a+1&1&a+1&2a-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1-a&0\\0&-1&2a-1&1\\0&-a&a^2+a&2a-2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1-a&0\\0&-1&2a-1&1\\0&0&2a-a^2&a-2\end{pmatrix}$$

则当 $a=0$ 时，$r(A)=2$，$r(A,B)=3$，$Ax=\beta$ 无解.

（Ⅱ）$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$

$$A^TA=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}$$

$$A^T\beta=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\end{pmatrix}$$

$$(A^TA,A^T\beta)=\begin{pmatrix}3&2&2&-1\\2&2&2&-2\\2&2&2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\1&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

得 $A^TAX=A^T\beta$ 的同解方程组

$$\begin{cases}x_1=1,\\x_2+x_3=-2.\end{cases}$$

解得通解为 $\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$，$c$ 任意.

(21)【解】（Ⅰ）先把 $A$ 相似对角化，再用来求 $A^{99}$.

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-1\\-2&\lambda+3&0\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda^2+3\lambda+2)=\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)$$

得 $A$ 的特征值为 $0,-1,-2$.

求出 $A$ 的以 0 为特征值的一个特征向量 $\eta_1=\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$

以 $-1$ 为特征值的一个特征向量 $\eta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

以 $-2$ 为特征值的一个特征向量 $\eta_3=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$.

令 $P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$

$$P^{-1}A^{99}P=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}^{99}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2^{99}\end{pmatrix}$$

$$A^{99}=P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2^{99}\end{pmatrix}P^{-1}$$

求 $P^{-1}$：$(P,E)=\begin{pmatrix}3&1&1&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&0&0&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&\frac{1}{2}\\0&1&0&2&-1&-2\\0&0&1&-1&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\2&-1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$