HZ BOOKS
华章教育

高等学校计算机专业规划教材

离散数学及其应用

金一庆 张三元 吴江琴 方敏 编著

Discrete Mathematics and Its Applications

机械工业出版社
China Machine Press

高等学校计算机专业规划教材

离散数学及其应用

金一庆 张三元 吴江琴 方敏 编著

Discrete Mathematics
and Its Applications

机械工业出版社
China Machine Press

图书在版编目（CIP）数据

离散数学及其应用 / 金一庆等编著．—北京：机械工业出版社，2016.1
（高等学校计算机专业规划教材）

ISBN 978-7-111-52025-2

I. 离… II. 金… III. 离散数学 – 高等学校 – 教材 IV. O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 260795 号

本书建立在数学理论的基础上，主要介绍数理逻辑、集合论、组合论、图论和群论等内容，注重知识点之间的关联性，既有一定深度又深入浅出，通过大量实例和练习培养学生严谨的思维方法，通过算法编程提高学生解决实际应用问题的能力。

本书适合作为计算机及信息类相关专业本科“离散数学”课程的教材，也可作为自学读物或考研参考书。

出版发行：机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街 22 号 邮政编码：100037）

责任编辑：曲 熠	责任校对：董纪丽
印 刷：北京诚信伟业印刷有限公司	版 次：2016 年 1 月第 1 版第 1 次印刷
开 本：185mm×260mm 1/16	印 张：18.5
书 号：ISBN 978-7-111-52025-2	定 价：39.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

客服热线：(010) 88378991 88361066　　投稿热线：(010) 88379604

购书热线：(010) 68326294 88379649 68995259　　读者信箱：hzjsj@hzbook.com

前　　言

“离散数学”(discrete mathematics)是研究离散对象以及它们之间各种关系的一个数学分支，是计算机及信息类相关专业的专业基础课。把离散数学作为一门学科来研究还是近四五十年的事，这是因为随着计算机技术的发展，硬件结构和软件设计都离不开离散数学。尤其是在信息科学迅速发展的今天，离散数学的研究和应用更为重要。离散数学的内容很广，包括集合论、组合论、图论、群论、数理逻辑、概率论、算法论以及形式语言和自动机等。目前，概率论、算法分析、形式语言和自动机等已成为独立的课程，本书不包括这些内容。作为一门专业基础课，本书着重介绍数理逻辑与推理基础(命题逻辑、谓词逻辑、归纳方法)、集合论(集合、自然数集、二元关系)、组合论(离散函数、计数与生成函数)、图论(图、树)、群论(群、环、域)，以及这些理论的应用。

本书以浙江大学出版社 2009 年出版的《离散数学：计算机数学基础教程》为基础，参考了 Kenneth H. Rosen 的《Discrete Mathematics and Its Applications》[⊖]、Ricard 和 A. Brualldi 的《Introductory Combinatorics》[⊜]，以及国内出版的众多有关书籍编写而成。张三元、吴江琴老师为本书提供了很多素材(如：与整数有关的函数及其应用，字典顺序和拓扑排序，环形排列的 CP 数等)，以及贯穿各章节的例子和算法。方敏老师为本书制作了网页版习题详解。本书内容丰富，既有一定的深度又深入浅出，可作为计算机及信息类相关专业的教材或自学参考书，以及计算机专业的考研参考书。

离散数学归根结底是一门数学课，其应用要建立在数学理论的基础上。我们对看似简单的概念进行了深入讲解，指出某些常见错误，通过实例增强感性认识，同时加强知识点之间的联系，培养严谨的理性思维；引导学生开阔思路，掌握解决问题的思想方法，学会处理问题的基本技巧；加入了不少结合计算机应用的启蒙算法，为学生学以致用搭建了桥梁。

本书内容丰富，老师在授课过程中可以自己选取或删减。组合论的计数原理是本书的特色，篇幅不多，然则从球盒模型到递推关系再到生成函数，一一解决了常见的计数模型问题甚至某些难题。对教学要求较高的离散数学课程，或有组合论要求的研究生课程，利用本书的组合论部分能较快、较系统地完成教学计划。

通过多年的教学实践，学生普遍反映该课程读书容易做题难，所以，学习时一定要正确理解数学概念，从正反两方面进行推敲，要看懂例题(最好自己做，然后看解答)，多动手独立完成作业。书中例题和习题比较多，书后给出了习题答案。其中还提供一些算法，可以作为教学

⊖ 本书中文版《离散数学及其应用》(原书第 7 版)已由机械工业出版社出版，书号 978-7-111-45382-6。——编辑注

⊜ 本书中文版《组合数学》(原书第 5 版)已由机械工业出版社出版，书号 978-7-111-37787-0。——编辑注

示范，建议有高级语言(如C语言)基础的学生编程实现这些算法，以提高应用能力。网页版习题详解和算法程序示例可访问华章网站(www.hzbook.com)下载。

本书是根据作者的离散数学课讲稿改写的，不少问题已经在二十多年的授课过程中不断发现并修正，写书过程中又得到张三元、吴江琴老师的校对和指正，但还是难免出错，教学效果也有待用书教师检验，欢迎大家批评指正。

金一庆

2015年10月

目 录

第1章　数理逻辑与推理基础

逻辑学是一门研究思维形式及思维规律的科学，客观事物的规律在人的主观意识中的反映形成逻辑。以辩证法认识论进行研究的逻辑学称为辩证逻辑，以思维的形式结构及规律进行研究的逻辑学称为形式逻辑。由若干个判断推出另一个判断的思维形式就是推理，用数学方法来研究推理的规律称为数理逻辑，又称为符号逻辑。数理逻辑有严格的定义和符号体系，采用语法严谨的形式语言，论证形式比论证内容更为重要，因而，从实质上来说，数理逻辑是一种形式逻辑。数理逻辑是符合“排中律”的二值逻辑，其命题逻辑只能取“真”或“假”两个值，二者必居其一且只居其一，不得有二义性，便于用机械方法进行运算和推理。

归纳推理也是一种形式逻辑，本章将对归纳法的原理和应用进行简单介绍。

1.1　命题逻辑

1.1.1　命题及其表示法

定义 1.1.1(命题)　一句有真假意义的陈述句称为**命题**。

例如：

1）离散数学是计算机系的必修课。

2）三角形的内角和等于180°。

3）1＋101＝110。

4）凡是国旗都是红色的。

5）我正在说谎。

6）本命题是假的。

7）把门关上。

8）真是太好了！

前6句都是陈述句，1)～4)是命题，1)、2)是真的，4)是假的。5)、6)两句虽是陈述句，但无法确定真假，若说是真的，则推出结论为假，若说是假的，却又推出是真，这种自相矛盾的特殊陈述句是悖论，不是命题。除悖论外的陈述句都是命题。但我们发现，3）这个命题不能确定真假，因为当运算是二进制时，命题为真，而当运算是其他进制时，命题为假，可以根据命题的上下文来确定真假，但它并不自相矛盾，所以仍是命题。7）是祈使句，8)是感叹句，都不是陈述句，所以也不是命题。

在数理逻辑中，常用大写英文字母或数字来表示命题，如 A、B、C、A_j、B_i、[3]、[5]等。

定义 1.1.2　表示命题的符号称为**命题标识符**。表示确定命题的标识符称为**命题常量**。表示任意命题位置标志的标识符称为**命题变元**。

定义 1.1.3(原子命题)　不能分解为更简单的陈述句的命题称为**原子命题**。

用命题变元表示原子命题时，此变元为**原子变元**。

定义 1.1.4(指派和真值)　当一个原子命题变元用特定命题取代时，才可确定真假，称为对此变元进行**指派**。指派时通常不需具体命题，而是采用“真”、“假”值，“真”用“T”

表示，“假”用“F 表示”，“T”和“F”就是为原子命题赋的**真值**。

1.1.2 逻辑联结词

定义 1.1.5(逻辑联结词) 把自然语言中的“与”、“或”、“如果……则”等联结词严格定义并且符号化，形成**逻辑联结词**。

定义 1.1.6(复合命题) 由一个或几个原子命题通过联结词“运算”构成新的命题，称为**复合命题**。一个命题的运算称为一元运算或单目运算，两个命题的运算称为二元运算或双目运算。

常用逻辑联结词如下。

1) **否定**：符号为“$\neg$”，若 P 为一个命题，则“P 的否定”为一个新命题，记作“$\neg P$”，读作“非 P”。当 P 的真值为 T 时，$\neg P$ 的真值为 F，当 P 的真值为 F 时，$\neg P$ 的真值为 T。否定是唯一的单目运算，其余运算都是双目运算。

2) **合取**：符号为“$\wedge$”，若 P、Q 是两个命题，则“P 与 Q”构成一个复合命题，记作“$P\wedge Q$”。当且仅当 P、Q 真值均为 T 时，$P\wedge Q$ 的真值为 T，否则为 F。P 与 Q 的合取也称为 P 与 Q 的积。

3) **析取**：符号为“$\vee$”，若 P、Q 是两个命题，则“P 或 Q”构成一个复合命题，记作“$P\vee Q$”。P 与 Q 中只要有一个真值是 T，则 $P\vee Q$ 的真值是 T。注意，P 与 Q 的真值全是 T 时，$P\vee Q$的真值也是 T，只有当 P 与 Q 的真值全是 F 时，$P\vee Q$ 的真值才为 F。P 与 Q 的析取也称为 P 与 Q 的和。

4) **异或**：符号为“$\oplus$”，若 P、Q 是两个命题，则“P 异或 Q”构成一个复合命题，记作“$P\oplus Q$”。当 P 与 Q 的真值同为 T 或同为 F 时，$P\oplus Q$ 的真值是 F，否则为 T，也就是说，P、Q 中只有其一可为 T，而不能二者兼得。

5) **条件**：符号为“$\rightarrow$”，若 P、Q 是两个命题，则“如果 P，那么 Q”是一个复合命题，记作“$P\rightarrow Q$”，可读成“若 P，则 Q”。当且仅当 P 的真值是 T、Q 的真值是 F 时，$P\rightarrow Q$ 的真值为 F，否则 $P\rightarrow Q$ 的真值为 T。注意，当 P 的真值为 F 时，$P\rightarrow Q$ 的真值总是 T，因为条件语句的前提不成立，所以其结论无所谓真假，可认为 $P\rightarrow Q$ 为真。

6) **双条件**：符号为“$\leftrightarrow$”，若 P、Q 是两个命题，则“P 当且仅当 Q”是一个复合命题，记作“$P\leftrightarrow Q$”。当且仅当 P 与 Q 的真值相同，即同取 T 或同取 F 时，$P\leftrightarrow Q$ 的真值取 T，否则为 F。

2)～6)都是双目运算，除 5)以外，二元运算中的 P 与 Q 都是可交换的，而 5)没有可交换性，$P\rightarrow Q$ 与 $Q\rightarrow P$ 是两个完全不同的命题。

定义 1.1.7(复合命题的真值与真值表) 用联结词把具有真假值的命题联结起来得到的复合命题也具有真假值，称为该复合命题的**真值**。用表格表示各种运算得到的复合命题的真值称为**真值表**。

表 1.1.1 真值表

P	Q	$\neg P$	$P\wedge Q$	$P\vee Q$	$P\oplus Q$	$P\rightarrow Q$	$P\leftrightarrow Q$
T	T	F	T	T	F	T	T
T	F	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T	F
F	F	T	F	F	F	T	T

当 P、Q 取 T、F 的不同指派时，这些运算取 T、F 的不同排列。从广义运算的角度

来考虑，不同排列不止上述 6 种，而是共有 2^4 个，那么其余 10 种运算的含义是什么呢？把“非”运算作用于 Q 是一种单目运算；$Q \to P$ 不同于 $P \to Q$，是另一种双目运算；不管 P、Q 如何指派都规定运算结果是 T，称为全真运算，若规定结果是 F 则是全假运算；如果规定运算结果与 P 相同是一种运算，同样，与 Q 相同也是一种运算。以上运算对应表 1.1.2 中的运算 7～12。运算 13 是运算 5 $P \to Q$ 的否定的 $\neg(P \to Q)$，记作 $P \not\to Q$；运算 14 是运算 8 $Q \to P$ 的否定 $\neg(Q \to P)$，记作 $Q \not\to P$；运算 15 是运算 2 $P \wedge Q$ 的否定 $\neg(P \wedge Q)$，记作 $P \uparrow Q$(Sheffer stroke)，通常称作“与非”，读作“谢菲尔”；运算 16 是运算 3 $P \vee Q$ 的否定 $\neg(P \vee Q)$，记作 $P \downarrow Q$(Peirce arrow)，通常称作“或非”，读作“皮尔斯”。九个运算符 $\neg$、$\vee$、$\wedge$、$\oplus$、$\to$、$\not\to$、$\leftrightarrow$、$\uparrow$、$\downarrow$ 均是逻辑联结词。

表 1.1.2 真值表

P	Q	1	2	3	4	5	6	7	8
		$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \oplus Q$	$P \to Q$	$P \leftrightarrow Q$	$\neg Q$	$Q \to P$
T	T	F	T	T	F	T	T	F	T
T	F	F	F	T	T	F	F	T	T
F	T	T	F	T	T	T	F	F	F
F	F	T	F	F	F	T	T	T	T

P	Q	9	10	11	12	13	14	15	16
		T	F	P	Q	$P \not\to Q$	$Q \not\to P$	$P \uparrow Q$	$P \downarrow Q$
T	T	T	F	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	T	F	T	F	T	F
F	T	T	F	F	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	F	F	F	T	T

1.1.3 命题公式

我们已定义了命题的一元和二元运算，运算的结果也是命题，还可以进行运算，即可以用联结词对多个命题进行各种各样的运算组合。要对命题进行运算和推理，必须像数学式一样进行公式化。

定义 1.1.8(命题公式) 命题公式是按如下规则生成的字符串：

1) 原子命题变元是命题公式，也称为原子命题公式；

2) 若 A 是命题公式，则 $\neg A$ 是命题公式；

3) 若 A、B 是命题公式，则 $A \vee B$、$A \wedge B$、$A \oplus B$、$A \to B$、$A \leftrightarrow B$ 也是命题公式；

4) 有限次使用以上三条规则得到的字符串仍是命题公式。

这是一个递归的定义。运算中，单目运算优先级比双目运算高，需要优先的运算用圆括号括起，类似于代数式中的括号用法。

定义 1.1.9(成真指派与成假指派) 对一个公式，如果变元的某一组指派使公式的真值取 T，则称此组指派为此公式的**成真指派**；如果使公式的真值取 F，则称此组指派为此公式的**成假指派**。

定义 1.1.10(可满足的公式) 如果一个公式存在成真指派，则称此公式是**可满足的**。

例 1.1.1 $P \to Q$、$\neg P \vee Q$、$P \leftrightarrow Q$、$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ 和 $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$ 都是命题公式。对于 P、Q 的任一组真值指派，列出它们的真值表。

解 见表 1.1.3。

表 1.1.3 真值表

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P\to Q$	$\neg P\vee Q$	$P\leftrightarrow Q$	$(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$	$(P\to Q)\wedge(Q\to P)$
T	T	F	F	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F	F	F
F	T	T	F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T	T	T	T

从真值表可见，对 P、Q 的 $2^2=4$ 组不同的指派，表中的公式都存在成真指派，因此它们都是可满足的。从真值表还可见，$\neg P\vee Q$ 与 $P\to Q$ 在任一组指派下真值都一样，且 $P\leftrightarrow Q$、$(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$与$(P\to Q)\wedge(Q\to P)$在任一组指派下真值都一样。◀

定义 1.1.11(命题公式的等价) 给定两个命题公式 A 和 B，设 P_1，P_2，…，P_n 为 A 和 B 中的所有原子变元，若对 P_1，P_2，…，P_n 任一组真值指派，A 和 B 的真值都相同，则称 A 和 B 是**等价的**。记作 $A\Leftrightarrow B$。

我们可以得到：

$P\to Q\Leftrightarrow\neg P\vee Q$

$P\leftrightarrow Q\Leftrightarrow(P\to Q)\wedge(Q\to P)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$

例 1.1.2 证明 $P\vee(Q\wedge R)\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge(P\vee R)$(分配律)。

表 1.1.4 真值表

P	Q	R	$P\vee Q$	$P\vee R$	$(P\vee Q)\wedge(P\vee R)$	$Q\wedge R$	$P\vee(Q\wedge R)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T
T	F	T	T	T	T	F	T
T	F	F	T	T	T	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	F	T	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

证明 因为公式有 3 个变元，所以有 2^3 组指派，如表 1.1.4 所示，$(P\vee Q)\wedge(P\vee R)$与 $P\vee(Q\wedge R)$在任一组指派下真值都一样，命题得证。◀

定义 1.1.12(子公式) 如果 x 是命题公式 A 的一部分，且 x 本身也是命题公式，则 x 称为 A 的**子公式**。x 可以是原子命题公式，也可以是复合命题公式。

定义 1.1.13(代换) 给定一个公式 P，P_1，P_2，…，P_n 是 P 的子公式，如果用公式 Q_i 代替 P 中的 P_i，得到的新公式 Q 叫作公式 P 的一个**代换**或**置换**。

注意 1) 代换的完全性：P 中若出现不止一个 P_j，那么所有 P_j 必须均以 Q_j 代替。例如，在 $P\to(J\wedge P)$中，用 $R\vee S$ 代换 P，应得 $R\vee S\to(J\wedge(R\vee S))$，而不是$R\vee S\to(J\vee P)$。

2) 代换的同时性：用 Q_i、Q_j 代替 P_i、P_j 时，必须是同时的，不能有先后。例如，在 $P\to\neg Q$ 中，用 $P\vee Q$ 代换 P，用 R 代换 Q，应得$(P\vee Q)\to\neg R$，而若两个代换分先后，先代换 P，再代换 Q，就会先得$(P\vee Q)\to\neg Q$，后得$(P\vee R)\to\neg R$，与代换要求的结果不同，是$(P\vee Q)\to\neg Q$ 用 R 代换 Q 所得的结果。

很显然，代换后的公式与原公式并不一定是等价的。

定理 1.1.1 设 x 是公式 A 的子公式，且 $x\Leftrightarrow y$，如果 A 中的 x 用 y 代换得到公式 B，

则公式 B 与公式 A 等价，即 $A\Leftrightarrow B$。

定义 1.1.14(等价代换) 满足定理 1.1.1 的代换称为**等价代换**。

证明 在任一指派下，x 与 y 的真值相同，以 y 取代 x 后，没有改变原公式的真值，所以公式 B 与公式 A 在任一指派下真值相同，即 $A\Leftrightarrow B$。 ◀

公式之间的等价有三条性质，对任意公式 A、B、C：

1) 自反性：$A\Leftrightarrow A$；

2) 对称性：若 $A\Leftrightarrow B$，则 $B\Leftrightarrow A$；

3) 传递性：若 $A\Leftrightarrow B$，$B\Leftrightarrow C$，则 $A\Leftrightarrow C$。

定义 1.1.15(永真式与永假式) 若公式的所有变元的任一组指派都使公式恒为真，则称此公式为**永真式**。若公式的所有变元的任一组指派都使公式恒为假，则称此公式为**永假式**。永真式也称为重言式，**永假式**也称为矛盾式。

用 T 表示永真式，F 表示永假式，字母 T 和 F 通常不用来表示一般的命题，以免混淆。

永真式当然是可满足的，而永假式不是可满足的。

注意 $\Leftrightarrow$与$\leftrightarrow$是两个完全不同符号。$\leftrightarrow$是联结词，$A\leftrightarrow B$ 只是一个公式；$A\Leftrightarrow B$ 并不是公式，而是表示两个公式等价，$\Leftrightarrow$是等价关系符。但是，它们之间有着密切的联系。

定理 1.1.2 设 A、B 为两个命题公式，$A\Leftrightarrow B$ 当且仅当 $A\leftrightarrow B$ 是一个永真式。

证明 因为 $A\Leftrightarrow B$，所以 A 与 B 在任一组指派下有同样的真值，则 $A\leftrightarrow B$ 在任一组指派下的真值为 T，$A\leftrightarrow B$ 是永真式；反之，$A\leftrightarrow B$ 是永真式，说明 $A\leftrightarrow B$ 在任一组指派下的真值为 T，A 与 B 在任一组指派下有同样的真值，则 $A\Leftrightarrow B$。 ◀

例 1.1.3 证明$\neg(P\wedge Q)\Leftrightarrow\neg P\vee\neg Q$(德·摩根律)。

证明 从真值表 1.1.5 可以看出，在任一组指派下$\neg(P\wedge Q)$与$\neg P\vee\neg Q$ 的真值相同，因此$\neg(P\wedge Q)\Leftrightarrow\neg P\vee\neg Q$，且$\neg(P\wedge Q)\leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q)$是永真式。 ◀

表 1.1.5 真值表

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P\wedge Q$	$\neg(P\wedge Q)$	$\neg P\vee\neg Q$	$\neg(P\wedge Q)\leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q)$
T	T	F	F	T	F	F	T
T	F	F	T	F	T	T	T
F	T	T	F	F	T	T	T
F	F	T	T	F	T	T	T

定理 1.1.3 永真式的任何代换仍为永真式，永假式的任何代换仍为永假式。

这是因为永真式的真值恒为 T，与变量的指派无关，与其任意子公式的真值也无关。

例 1.1.4 $P\vee\neg P$ 是永真式，即使用永假式 $P\wedge\neg P$ 代换 $P\vee\neg P$ 中的 P，得到的$(P\wedge\neg P)\vee\neg(P\wedge\neg P)\Leftrightarrow \mathrm{F}\vee\mathrm{T}\Leftrightarrow\mathrm{T}$，还是永真式；$P\wedge\neg P$ 是永假式，即使用永真式 $P\vee\neg P$代换 $P\wedge\neg P$ 中的 P，得到的$(P\vee\neg P)\wedge\neg(P\vee\neg P)\Leftrightarrow\mathrm{T}\wedge\mathrm{F}\Leftrightarrow\mathrm{F}$，还是永假式。 ◀

可以看到，永真式、永假式并不需要等价代换，还是能得到永真式、永假式。但是若某公式的代换是永真的，则并不能保证此公式是永真的。

例 1.1.5 $P\vee Q$ 不是永真式，但若用$\neg P$ 代换 Q 得到 $P\vee\neg P$，则是永真式，当然，这两个公式并不等价。 ◀

1.1.4 命题等价定律

对于命题公式间的等价关系，可用真值表和联结词来证明，但是比较麻烦，我们可从联结词的定义出发或用真值表先证明一些等价公式，并作为命题等价定律。例如，由联结词的定义容易证明表 1.1.6 中的 E_1、E_2、E_6、E_7、E_8，我们已经用真值表证明了德·摩

根律、蕴涵式、等价式的一部分。以后可以直接用命题等价定律来证明等价式，而不必再从定义出发证明。

表 1.1.6 命题等价定律

名称	形式一	形式二
E_1. 对合律	$\neg\neg P \Leftrightarrow P$	
E_2. 幂等律	$P \vee P \Leftrightarrow P$	$P \wedge P \Leftrightarrow P$
E_3. 结合律	$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$	$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$
E_4. 交换律	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$	$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
E_5. 分配律	$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
E_6. 同一律	$P \vee \mathrm{F} \Leftrightarrow P$	$P \wedge \mathrm{T} \Leftrightarrow P$
E_7. 零一律	$P \vee \mathrm{T} \Leftrightarrow \mathrm{T}$	$P \wedge \mathrm{F} \Leftrightarrow \mathrm{F}$
E_8. 补余律	$P \vee \neg P \Leftrightarrow \mathrm{T}$	$P \wedge \neg P \Leftrightarrow \mathrm{F}$
E_9. 吸收律	$P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$	$P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$
E_{10}. 德·摩根律(D. M)	$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$	$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$
E_{11}. 逆反律	$P \to Q \Leftrightarrow \neg Q \to \neg P$	
E_{12}. 输出律	$(P \wedge Q) \to R \Leftrightarrow P \to (Q \to R)$	
E_{13}. 归谬律	$(P \to Q) \wedge (P \to \neg Q) \Leftrightarrow \neg P$	
E_{14}. 蕴涵式	$P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$	$\neg(P \to Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$
E_{15}. 等价式	$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \vee \neg Q)$	$\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow P \leftrightarrow \neg Q$

其中有些定律还可以借助于其他定律来证明。

例 1.1.6 证明等价式中 $(P \to Q) \wedge (Q \to P) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

证明 右 $\Leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee \neg P) \wedge ((P \wedge Q) \vee \neg Q)$ （分配律）

$\Leftrightarrow (P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg P) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (Q \vee \neg Q)$ （分配律）

$\Leftrightarrow \mathrm{T} \wedge (Q \vee \neg P) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge \mathrm{T}$ （补余律）

$\Leftrightarrow (Q \vee \neg P) \wedge (P \vee \neg Q)$ （同一律）

$\Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P) =$ 左 （蕴涵式） ◀

例 1.1.7 证明输出律 $(P \wedge Q) \to R \Leftrightarrow P \to (Q \to R)$。

证明 右 $\Leftrightarrow P \to (Q \to R)$

$\Leftrightarrow \neg P \vee (\neg Q \vee R)$ （蕴涵式）

$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \vee R$ （结合律）

$\Leftrightarrow \neg(P \wedge Q) \vee R$ （D. M）

$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \to R$ （蕴涵式） ◀

例 1.1.8 证明 $((P \vee Q) \wedge \neg(\neg P \wedge (\neg Q \vee \neg R))) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg R)$ 是一个永真式。

证明 此式 $\Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee (Q \wedge R))) \vee \neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee R)$

$\Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee Q) \wedge (P \vee R)) \vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$

$\Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R)) \vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$

这是 $P \vee \neg P$ 的代换，因此是永真式。 ◀

例 1.1.9 证明吸收律 $P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$。

证明 我们发现仅用定律 $E_1 \sim E_8$ 无法把左边化简成右边，可以用定理 1.1.2 证明吸收律。

$$P \vee (P \wedge Q) \leftrightarrow P \Leftrightarrow ((P \vee (P \wedge Q)) \to P) \wedge (P \to (P \vee (P \wedge Q)))$$

$$\Leftrightarrow(\neg(P\vee(P\wedge Q))\vee P)\wedge(\neg P\vee(P\vee(P\wedge Q)))$$
$$\Leftrightarrow((\neg P\wedge\neg(P\wedge Q))\vee P)\wedge(\neg P\vee P\vee(P\wedge Q))$$
$$\Leftrightarrow((\neg P\wedge(\neg P\vee\neg Q))\vee P)\wedge \mathrm{T}$$
$$\Leftrightarrow(\neg P\wedge(\neg P\vee\neg Q))\vee P$$
$$\Leftrightarrow\neg P\vee P$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{T}$$
◀

定义 1.1.16(对偶) 给定一个公式 A，若用 $\vee$ 代换 $\wedge$，用 $\wedge$ 代换 $\vee$，用 F 代换 T，用 T 代换 F，则可得到另一个公式 A^*，这两个公式**互为对偶**。联结词 $\vee$ 与 $\wedge$ 也是对偶的。

例如定律 E_2 和 E_{10} 的形式一与形式二都是对偶的。

定理 1.1.4 设 A 和 A^* 是对偶式，P_1，P_2，…，P_n 是 A 和 A^* 中的所有原子命题变元，于是有

$$\neg A(P_1, P_2, \cdots, P_n)\Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n)$$
$$A(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n)\Leftrightarrow\neg A^*(P_1, P_2, \cdots, P_n)$$

此定理由德·摩根律直接可证。

定理 1.1.5 设 P_1，P_2，…，P_n 是公式 A 和 B 中的所有原子变元，如果 $A\Leftrightarrow B$，则 $A^*\Leftrightarrow B^*$。

证明 由定理 1.1.2 可得

$$A(P_1, P_2, \cdots, P_n)\leftrightarrow B(P_1, P_2, \cdots, P_n)\Leftrightarrow \mathrm{T}$$

由定理 1.1.3，用$\neg P_i$ 代换 P_i 后得到的还是永真式

$$A(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n)\leftrightarrow B(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n)\Leftrightarrow \mathrm{T}$$

由定理 1.1.2 可得

$$A(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n)\Leftrightarrow B(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n)$$

由定理 1.1.4 可得

$$\neg A^*(P_1, P_2, \cdots, P_n)\Leftrightarrow A(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n)$$
$$B(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n)\Leftrightarrow\neg B^*(P_1, P_2, \cdots, P_n)$$

所以

$$\neg A^*(P_1, P_2, \cdots, P_n)\Leftrightarrow\neg B^*(P_1, P_2, \cdots, P_n)$$
$$A^*(P_1, P_2, \cdots, P_n)\Leftrightarrow B^*(P_1, P_2, \cdots, P_n)$$
◀

事实上，任一联结词都可用$\neg$、$\vee$、$\wedge$三种联结词代替。

$$P\uparrow Q\Leftrightarrow\neg(P\wedge Q)$$
$$P\rightarrow Q\Leftrightarrow\neg P\vee Q$$
$$P\downarrow Q\Leftrightarrow\neg(P\vee Q)$$
$$P\not\rightarrow Q\Leftrightarrow\neg(P\rightarrow Q)\Leftrightarrow\neg(\neg P\vee Q)\Leftrightarrow P\wedge\neg Q$$
$$P\leftrightarrow Q\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$$
$$P\oplus Q\Leftrightarrow\neg(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow\neg((P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P))\Leftrightarrow\neg((\neg P\vee Q)\wedge(\neg Q\vee P))$$
$$\Leftrightarrow\neg(\neg P\vee Q)\vee\neg(\neg Q\vee P)\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$$

定义 1.1.17(全功能联结词集合) 设有一联结词集合 A，如果：

1) 任何命题公式都能用 A 中联结词表达的等价式表示；

2) A 中删除任一联结词得 A'，至少存在一个命题公式不能用 A' 中联结词来表示它的等价式。

则称此集合 A 为**全功能联结词集合**。

虽然用$\neg$、$\vee$、$\wedge$可以表示任何公式的等价公式，但是由于

$$P \wedge Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)$$
$$P \vee Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q)$$

因此由定义中的条件 2)，{¬，∨，∧}不是全功能联结词集合，而{¬，∨}、{¬，∧}都是全功能集合。事实上，{↑}、{↓}也是全功能集合。

由

$$P \uparrow P \Leftrightarrow \neg(P \wedge P) \Leftrightarrow \neg P$$
$$\neg P \Leftrightarrow P \uparrow P$$
$$P \uparrow Q \Leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$$
$$(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg(P \uparrow Q) \Leftrightarrow (P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q)$$
$$(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow \neg P \uparrow \neg Q \Leftrightarrow (P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q)$$

可知{↑}是全功能的。

又由

$$P \downarrow P \Leftrightarrow \neg(P \vee P) \Leftrightarrow \neg P$$
$$\neg P \Leftrightarrow P \downarrow P$$
$$P \downarrow Q \Leftrightarrow \neg(P \vee Q)$$
$$(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg(P \downarrow Q) \Leftrightarrow (P \downarrow Q) \downarrow (P \downarrow Q)$$
$$(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q) \Leftrightarrow \neg P \downarrow \neg Q \Leftrightarrow (P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q)$$

因此，{↓}也是全功能的。

注意 ↑、↓具有交换律，但不具有结合律。否则

$$P \vee Q \Leftrightarrow (P \downarrow Q) \downarrow (P \downarrow Q)$$
$$\Leftrightarrow P \downarrow (Q \downarrow P) \downarrow Q \Leftrightarrow P \downarrow (P \downarrow Q) \downarrow Q \Leftrightarrow (P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge Q$$

有了这些联结词之间的关系及等价代换定律，对一些实际应用问题，可以列出命题公式，并按我们的需要进行化简，以达到解决问题的目的。

例 1.1.10 门电路具有逻辑运算功能，对输入一路(P)或两路电信号(P、Q)，有 9 种不一样的门电路输出，恰好对应 9 种不同的逻辑运算：¬，∧，∨，⊕，→，↛，↔，↑，↓。我们可以根据具体要求简化后进行设计。下面举一个例子。

会议室有四扇门，每扇门边上各有一个双态开关，分别为 k_1、k_2、k_3、k_4，状态“0”表示断开，“1”表示接通。会议室的灯 S，灯亮为“1”，灯灭为“0”。第一个人进会议室时把灯打开，最后一个人离开时把灯关掉，不管改动哪扇门边开关的状态，都能开关会议室的灯 S。

假设开始时，S 的状态为“0”，k_1、k_2、k_3、k_4 的状态均为“0”。第一个人进会议室时把灯打开，某个 k_i 的状态为“1”。最后一个人离开时把灯关掉，如果关的是同一个 k_i，则恢复 4 个“0”状态，如果关的是其他 3 个开关之一，则有 2 个“0”和 2 个“1”。所以 S 是“0”状态时，k_1、k_2、k_3、k_4 中有偶数个为“0”状态，如果又有人进来开了灯，必然又使 k_1、k_2、k_3、k_4 的“0”状态变成奇数个，于是有：

$$\begin{aligned}
S \Leftrightarrow\ & (\neg k_1 \wedge k_2 \wedge k_3 \wedge k_4) \vee (k_1 \wedge \neg k_2 \wedge k_3 \wedge k_4) \vee (k_1 \wedge k_2 \wedge \neg k_3 \wedge k_4) \\
& \vee (k_1 \wedge k_2 \wedge k_3 \wedge \neg k_4) \vee (k_1 \wedge \neg k_2 \wedge \neg k_3 \wedge \neg k_4) \\
& \vee (\neg k_1 \wedge k_2 \wedge \neg k_3 \wedge \neg k_4) \\
& \vee (\neg k_1 \wedge \neg k_2 \wedge k_3 \wedge \neg k_4) \vee (\neg k_1 \wedge \neg k_2 \wedge \neg k_3 \wedge k_4) \\
\Leftrightarrow\ & (((\neg k_1 \wedge k_2) \vee (k_1 \wedge \neg k_2)) \wedge (k_3 \wedge k_4)) \vee ((k_1 \wedge k_2) \\
& \wedge ((\neg k_3 \wedge k_4) \vee (k_3 \wedge \neg k_4))) \vee (((\neg k_1 \wedge k_2) \vee (k_1 \wedge \neg k_2)) \\
& \wedge (\neg k_3 \wedge \neg k_4)) \vee ((\neg k_1 \wedge \neg k_2) \wedge ((\neg k_3 \wedge k_4) \vee (k_3 \wedge \neg k_4))) \\
\Leftrightarrow\ & ((k_1 \oplus k_2) \wedge (k_3 \wedge k_4)) \vee ((k_1 \wedge k_2) \wedge (k_3 \oplus k_4))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\vee((k_1 \oplus k_2) \wedge (\neg k_3 \wedge \neg k_4)) \vee ((\neg k_1 \wedge \neg k_2) \wedge (k_3 \oplus k_4))\\
\Leftrightarrow&((k_1 \oplus k_2) \wedge ((k_3 \wedge k_4) \vee (\neg k_3 \wedge \neg k_4)))\\
&\vee(((k_1 \wedge k_2) \vee (\neg k_1 \wedge \neg k_2)) \wedge (k_3 \oplus k_4))\\
\Leftrightarrow&((k_1 \oplus k_2) \wedge (k_3 \leftrightarrow k_4)) \vee ((k_1 \leftrightarrow k_2) \wedge (k_3 \oplus k_4))\\
\Leftrightarrow&((k_1 \oplus k_2) \wedge \neg(k_3 \oplus k_4)) \vee (\neg(k_1 \oplus k_2) \wedge (k_3 \oplus k_4))\\
\Leftrightarrow&(k_1 \oplus k_2) \oplus (k_3 \oplus k_4)
\end{aligned}$$

因此用三个异或门便可实现该电路，如图 1.1.1 所示。

1.1.5 命题公式的范式

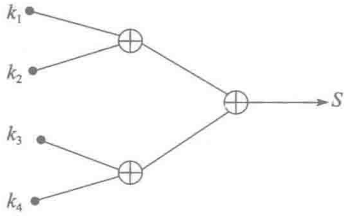

图 1.1.1 例 1.1.10 实现方式

虽然对给定公式总可以用真值表来判定公式是永真、永假，或存在哪些成真指派，但是当公式较复杂时，用真值表就比较麻烦，能否想办法把公式化成某种易判别的形式，以便于对公式进行判定。

定义 1.1.18（基本积与基本和） 命题变元或命题变元的否定之积（合取）称为**基本积**，命题变元或命题变元的否定之和（析取）称为**基本和**。

例如：$P \wedge \neg Q \wedge R \wedge \neg R$，$P \wedge \neg R$，$\neg P \wedge \neg Q \wedge R$ 都是基本积；$P \vee Q \vee \neg R \vee \neg Q$，$Q \vee \neg R$，$P \vee \neg Q \vee \neg R$ 都是基本和。

容易用交换律和结合律进行证明：当且仅当基本积中含一对互为否定的因子时，基本积是永假式；当且仅当基本和中含一对互为否定的因子时，基本和是永真式。

例如：$P \wedge \neg Q \wedge R \wedge Q \Leftrightarrow \mathrm{F}$，$P \vee Q \vee \neg R \vee R \Leftrightarrow \mathrm{T}$。

定义 1.1.19（析取范式与合取范式） 如果公式 A 与一个由基本积之和组成的公式等价，即

$$A \Leftrightarrow A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee \cdots \vee A_n \quad (n \geqslant 1)$$

则称 $A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee \cdots \vee A_n$ 为 A 的**析取范式**，其中 A_1，A_2，…，A_n 是一些命题变元的基本积。

如果公式 A 与一个由基本和之积组成的公式等价，即

$$A \Leftrightarrow A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \cdots \wedge A_n \quad (n \geqslant 1)$$

则称 $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \cdots \wedge A_n$ 为 A 的**合取范式**，其中 A_1，A_2，…，A_n 是一些命题变元的基本和。

例如，$\neg P \vee (P \wedge \neg Q \wedge R)$是析取范式，$\neg P \wedge (\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q \vee R)$是合取范式。$P \wedge \neg Q \wedge R$ 可以看成析取范式，因为其中只有一个基本积；又可以看成合取范式，因为它是三个基本和的合取，每个基本和中只有一个变元。

事实上，任何一个公式都能化成合取范式和析取范式，一般步骤如下：

1）将公式中所有联结词利用等价关系化成用 $\wedge$、$\vee$、$\neg$表示的形式。

2）利用德·摩根律将否定符号移到命题变元之前，利用对合律消除重叠在一起的否定符。

3）利用交换律、分配律、结合律把公式化归为析取范式或合取范式。

例 1.1.11 求$(P \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow S$ 的合取范式。

解

$$\begin{aligned}
(P \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow S &\Leftrightarrow (P \wedge (\neg Q \vee R)) \rightarrow S\\
&\Leftrightarrow \neg(P \wedge (\neg Q \vee R)) \vee S \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg(\neg Q \vee R)) \vee S\\
&\Leftrightarrow (\neg P \vee (Q \wedge \neg R)) \vee S \Leftrightarrow \neg P \vee (Q \wedge \neg R) \vee S\\
&\Leftrightarrow \neg P \vee S \vee (Q \wedge \neg R) \Leftrightarrow (\neg P \vee S) \vee (Q \wedge \neg R)\\
&\Leftrightarrow ((\neg P \vee S) \vee Q) \wedge ((\neg P \vee S) \vee \neg R)\\
&\Leftrightarrow (\neg P \vee S \vee Q) \wedge (\neg P \vee S \vee \neg R)
\end{aligned}$$

例 1.1.12 判断$\neg(P\vee R)\vee\neg(Q\wedge\neg R)\vee P$的真假。

$$\begin{aligned}&\neg(P\vee R)\vee\neg(Q\wedge\neg R)\vee P\\ \Leftrightarrow&(\neg P\wedge\neg R)\vee(\neg Q\vee R)\vee P\\ \Leftrightarrow&(\neg P\wedge\neg R)\vee\neg Q\vee R\vee P \qquad \text{(析取范式)}\\ \Leftrightarrow&(\neg P\vee\neg Q\vee R\vee P)\wedge(\neg R\vee\neg Q\vee R\vee P) \qquad \text{(合取范式)}\\ \Leftrightarrow&\mathrm{T}\wedge\mathrm{T}\Leftrightarrow\mathrm{T}\end{aligned}$$

因此该式是永真式。 ◀

例 1.1.13 求$P\leftrightarrow(P\wedge Q)$的析取范式。

解 1) 由于$P\leftrightarrow Q\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(\neg P\vee\neg Q)$，所以

$$\begin{aligned}P\leftrightarrow(P\wedge Q)&\Leftrightarrow(P\wedge P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg(P\wedge Q))\\&\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge(\neg P\vee\neg Q))\\&\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg P)\vee(\neg P\wedge\neg Q) \quad (*)\\&\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee\neg P\vee(\neg P\wedge\neg Q)\\&\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee\neg P \quad \text{(吸收律)}\end{aligned}$$

2) 由于$P\leftrightarrow Q\Leftrightarrow(P\to Q)\wedge(Q\to P)$，所以

$$\begin{aligned}P\leftrightarrow(P\wedge Q)&\Leftrightarrow(P\to(P\wedge Q))\wedge((P\wedge Q)\to P)\\&\Leftrightarrow(\neg P\vee(P\wedge Q))\wedge(\neg(P\wedge Q)\vee P)\\&\Leftrightarrow(\neg P\vee P)\wedge(\neg P\vee Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee P) \quad (*)\\&\Leftrightarrow\mathrm{T}\wedge(\neg P\vee Q)\wedge\mathrm{T} \quad (**)\\&\Leftrightarrow\neg P\vee Q\end{aligned}$$
◀

事实上，1)中的(*)已是析取范式，最后求出的式子也是析取范式；2)中的(**)已是合取范式，最后求出的式子可以看成析取范式，也可以看成合取范式。因而析取范式的形式并不唯一，但总能化成相同的形式。如：

$$\begin{aligned}(P\wedge Q)\vee\neg P&\Leftrightarrow(P\vee\neg P)\wedge(Q\vee\neg P)\\&\Leftrightarrow\mathrm{T}\wedge(Q\vee\neg P)\Leftrightarrow Q\vee\neg P\Leftrightarrow\neg P\vee Q\end{aligned}$$

定义 1.1.20(最简析取范式与最简合取范式) 如果析取范式中不存在相同的基本积，且每个基本积中没有相同的变元存在，则称该析取范式为**最简析取范式**。

如果合取范式中不存在相同的基本和，且每个基本和中没有相同的变元存在，则称该合取范式为**最简合取范式**。

例 1.1.13 中 1)的(*)式不是最简析取范式，因为基本积$(\neg P\wedge\neg P)$里有两个变元P；2)的(*)式不是最简合取范式，因为基本积$(\neg P\wedge P)$、$(\neg P\vee\neg Q\vee P)$里都有两个变元P；2)的(**)式也不是最简合取范式，它有 2 个相同的基本和。而 1)的最后两个式子都是最简析取范式；2)的最后一个式子既是最简析取范式也是最简合取范式。

可以由下面步骤把析取范式(合取范式)化为最简析取范式(最简合取范式)：

1) 除去析取范式中的恒假基本积(合取范式中恒真基本和)，即含$P\wedge\neg P$的基本积(含$P\vee\neg P$的基本和)。

2) 用幂等律化简$P\wedge P$和$P\vee P$，使得每一基本项中每个变元只出现一次。

3) 删除析取范式中相同的基本积，只留一项基本积；删除合取范式中相同的基本和，只留一项基本和。

例 1.1.14 求$((P\vee Q)\to R)\to P$的最简析取范式与最简合取范式。

解

$$\begin{aligned}((P\vee Q)\to R)\to P&\Leftrightarrow\neg(\neg(P\vee Q)\vee R)\vee P\\&\Leftrightarrow((P\vee Q)\wedge\neg R)\vee P\Leftrightarrow(P\wedge\neg R)\vee(Q\wedge\neg R)\vee P \quad (*)\\&\Leftrightarrow(P\vee Q\vee P)\wedge(\neg R\vee P) \quad (**)\end{aligned}$$