中学数学命题教学概论

ZHONGXUESHUXUE
MINGTIJIAOXUEGAIUN

韩殿发 李雨润 编著

黑龙江教育出版社

中学数学命题教学概论

韩殿发　李雨润　编著

黑 龙 江 教 育 出 版 社

1995 年 · 哈尔滨

(黑)新登字第 5 号

中学数学命题教学概论

韩殿发　李雨润　编著

责任编辑:贾海涛
封面设计:刘　强
责任校对:张　波

黑龙江教育出版社出版(哈尔滨市南岗区花园街 158 号)
黑龙江省教育委员会印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行
开本 787×1092 毫米 1/32·印张 5.875·字数 120 千
1995 年 6 月第 1 版·1995 年 6 月第 1 次印刷
印数:1－3 000

ISBN 7－5316－2581－4/G·1983　定价:4.00 元

前　言

任何一个数学教师，在教学中都不会忽视对学生进行解答习题的训练，学生当然也不会对其轻易唾弃，但是往往收效与其所付出的劳动并不相称，其中由于忽视对命题的结构、条件与结论之间联系的深入探讨而失败者也不乏其人。虽然中学教材对这部分内容有专门章节做过介绍，并且教学中也时时离不开命题，由于整个教学计划的要求和安排的限制，教学时不能对命题的有关内容作充分的讲授，况且，中学教材所涉及的知识面既宽又广，可谓之浩翰大海，要做到对每一知识都能深入细致地讲解是不客观的，也没有必要。

目前已出版的有关逻辑知识的小册子已不下数十种，其严谨的逻辑体系及丰富的内容，吸引了很多读者，特别是推动了中学生的课外阅读。但这些小册子大多都是深入到逻辑代数中去研究的。由于中学生对“逻辑”没有足够的理解，拿起书来翻翻后随之放下的人也不在少数。即使高中学生选学了这部分内容，但也不习惯这些逻辑运算符号，并且与命题挂不上号而弃之者也不为少见。命题是属于逻辑范畴的，我们编写的这本小册子，既不准备对“逻辑”追本朔源而开古玩店，也不想在逻辑运算上故弄玄虚而贩卖万花筒，更不打

算追逐逻辑与集合的密切关系到“太空”中遨游，本书力图深入浅出地以逻辑知识为模式，围绕中学数学教学中命题的一些基础知识，做些普及性的介绍，藉以提高学生对命题的结构、命题的条件与结论间的相互关系的理解，促使对命题的论证能力的提高。

我们觉得写出这点东西，应该与现实数学教学实际更接近些，力求短小精悍，不旁征博引。由于水平所限，唯恐事与愿违，能得到读者的理解，便可以心安理得了。当然，缺点错误在所难免，恳切希望读者批评指正。

作　者

1995年1月

目　　录

第一章　命　　题

随着教学研究的不断深入，广大中学数学教师和学生正极力摆脱和扭转“题海战术”给数学教学所造成的“困境”，不断探索解题规律，促使数学教学逐步收到事半功倍的效益．

解题固然是一种实践技能，但在解题过程的始终都时时刻刻离不开数学概念、定义、公理、定理、法则、公式等，而这些概念、定义、公理、定理、法则、公式等都是以命题形式给出的，因此，对数学命题的研究与探讨，是探究解题规律的需要．

我们都知道，数学是研究空间形式与数量关系的科学．数学教学的每一时刻，都与计算和推理相关联．而计算与推理的每一步骤或过程的展开与结束，究其实质无非是从一个判断引出或转换到另一个判断，即从一个命题演化到另一个命题的过程．可见，数学教学的每时每刻都离不开命题，如果离开了命题，所有的数学思维活动也就无法进行了，因而，也就离开了数学教学．

第一节　命　　题

我们都知道，人们的思维活动能够得以正常开展，并能完整地表达出某一事物的本质属性，是由于反映这一客观事

物的概念与其他概念相联系的结果．例如，我们只说“对顶角”，人们只能理解其本质属性——“一个角的两边也分别是另一角的两边的反向延长线”，并不能知道其他属性．可是，如果我们说“对顶角相等”，这便肯定了“对顶角”的一个重要性质——“对顶角相等”，这个肯定是由于“对顶角”和“相等”这两个概念相联系的结果．概念间这种联系就是靠判断来实现的．所谓判断就是对客观事物有所肯定或否定的思维形式．

数学的判断通常称之为命题．判断是用语句表现的．把一个判断用语言、式子、符号等表示出来，就是一个命题．初中几何第一册对命题的表达也是“判断一件事情的语句，叫做命题”，可见视一语句是否构成为命题，其关键是语句本身是否为可判断真伪的语句．判断有真有假，因而，一个命题也有真有假．若一个命题正确，则称为真命题（或命题成立）；若一个命题错误，则称为假命题（或命题不成立），因此说，一个命题并不是一般的语句，而是可决定真假的语句，并且真假不能兼有，二者必居其一．

例如，下列语句都是命题．

（1）2是偶数；

（2）对顶角相等；

（3）$2\times2=5$；

（4）明天下雨；

（5）2000年我国工农业年总产值可达到二万八仟亿元；

（6）其他星球上有人类存在．

其中（1）、（2）、（3）可以立即做出判断，即（1）、（2）

是真命题，(3) 是假命题．而 (4)、(5)、(6) 因受时间的限制，不能立即做出判断，但到一定时间是会做出其判断来的．对(4)的判断，由明天的实际情况判定，若下雨，命题为真；若不下雨命题为假．命题 (5) 可在 10 年后根据工农业的实际产值判断出真假；命题 (6) 虽然在一定时间内很难做出判断，但其客观存在的实质是真假二者必居其一的．可见，一个命题只能给人们提出某一个判断、某一个因果关系，至于这个判断是否正确，这个因果关系是否表述了某种客观规律性等等，并不是命题本身所能解决的．但是，数学中浩如烟海的题目，无一不是由一个完整的命题加上相应的指令构成的．因此，在教学实践中，单纯追求"解题"，而忽视对命题的剖析与探究，定会导致解题教学的失败，把学生的学习引向歧途．

为了研究命题的方便，常把命题用大写英文字母表示．本文内出现的大写英文字母 A、B、C、……等都可视为一个命题．但每个字母，并不能表明命题的具体内容和结构，更不能表明其真假．欲使一个字母能表明某一命题的具体内容，只能是将命题完整地写出来．

例如，A："$a=0$"；

B："$b=0$"；

C："$a=0$ 或 $b=0$"；

D："$a=0$ 且 $b=0$"．

这样，A、B、C、D 就都表明了各自命题的具体内容了．像 A、B 这样仅仅表示一种内容、一件事理、不能再细分的命题，称为简单命题．而命题 C、D 分别是由命题 A、命题 B 通

过连结词“或”、“且”组合而成的命题，我们称这种由简单命题组合而成的命题为复合命题.

〔**例 1**〕下列各命题，哪些命题是复合命题？

(1) m 不是偶数；

(2) 若 $\alpha=\beta$，则 $\sin\alpha=\sin\beta$；

(3) 平行四边形的对边相等；

(4) 对于任何的实数 x，$2x^2-3x+4>0$.

解 (1) m 不是偶数是由命题“m 是偶数”，通过否定词“不”组合而成，因此，该命题是复合命题；

(2) 此命题是由命题“$\alpha=\beta$”及“$\sin\alpha=\sin\beta$”通过连结词“若…，则…”组合而成，所以是复合命题；

(3)“平行四边形的对边相等”是命题”若一个四边形是平行四边形，则这个四边形的对边相等”的缩写. 而这个命题是由命题“一个四边形是平行四边形”及“这个四边形的对边相等”组合而成的，是复合命题，因而命题“平行四边形的对边相等”是复合命题.

(4) 此命题是由“x 是实数”及“$2x^2-3x+4>0$”通过连结词“对于任何的……”组合而成，是复合命题.

在教学中虽然不强调简单命题与复合命题的区别，但在剖析命题结构时，必然要涉及命题是否能分解成若干个独立的命题，其中连结词是很关键的，对于连结词的作用在后文中要做专门介绍.

第二节　条件命题

在数学教学中所研究的命题，通常是由两部分组成的，一部分是命题的“条件”，（或称题设），另一部分是命题的“结论”（或称“题断”），这两部分由连结词“若 …，则 …”（或“如果 …，那么 …”）组合而成，其中“若 …”（或“如果 …”）是冠以“条件”之前；而“则 …”（或“那么 …”），则置于“结论”（或题断）之前．

如果一个命题由两个命题 A、B，通过连结词“若 …，则 …”（或“如果 …，那么 …”）组合而成，即命题“若 A、则 B”（或“如果 A，那么 B”），这样的命题称为条件命题．很显然，命题 A 称为“条件”，命题 B 称为“结论”．这里的命题 A、B 可以是简单命题，也可以是复合命题，在论证中要仔细剖析．

几何学中的命题，常把条件命题中的连结词“若 …，则 …”略去，简缩成一个陈述句．其表述虽然简炼；但并不会发生歧议．例如，命题“对顶角相等”就是命题“若二角是对顶角，则此二角相等”，略去连结词“若 …，则 …”缩写成的陈述句，其含意是明确的．因为命题“对顶角相等”所指对象“对顶角”的本身，就含有两个角之意，即符合“一个角的两边分别是另一个角的两边的反向延长线”的两个角叫对顶角．因而在表述时没有必要重复写出“对顶角”本身所蕴含的“二角”．当然连结词也就没有保留的价值了．但不该省略的连结词，一定不要省略，如果省略，就会发生混乱．例如，命题：“如果

$f(x)=e^x$，那么$f(x)\cdot f(y)=f(x+y)$”. 若省略连结词“如果…，那么…”，变成“$f(x)=e^x$，$f(x)\cdot f(y)=f(x+y)$”后，使人不解其意，没有目标，无法研究．

为了研究命题的方便，我们约定：条件命题“若A，则B”记作“$A\rightarrow B$”，其真假由命题A、B的真假决定．如果命题“$A\rightarrow B$”，在条件A为真的情况下，能推出B真，我们就说命题“若A，则B”真，记作“$A\Rightarrow B$”，读作“若A，则B”真，或读作“由A推出B”. 若在A真的条件下，推不出B真，这时就说，“若A，则B”假，记作“$A\nRightarrow B$”. 在中学数学教学中，任何一个命题的“条件”都是真的、准确无误的，绝不允许以任何借口或方式使用虚假的“条件”或自相矛盾的“条件”，否则会使论证陷入混乱之中，白白浪费时间．

例如，一个大家熟知且遗误二十余年之久的题目：“已知$a>0$，$4a^2+9b^2=4ab$，求证：$\lg\frac{2a+3b}{4}=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$.”

这个命题的条件$a>0$与$4a^2+9b^2=4ab$就自相矛盾．事实上，由条件$4a^2+9b^2=4ab$配方得出

$(2a-b)^2+8b^2=0$

在实数范围内，只能是

$2a-b=0$　且$b=0$，

从而得$a=b=0$，这与$a>0$是不相容的，其结论也必定是错误的，因而推证是没有意义的．当然条件自相矛盾，是命题的编拟者考虑不周所致．命题编拟者只注意到使结论成立的条件$a>0$，（当然$b>0$），万万没想到若使条件$4a^2+9b^2=4ab$成立，a、b的值不可能$a>0$，$b>0$.

再如，数的乘方性质："若 $a = b$，则 $a^n = b^n$"．此命题的真实性必须以 $a = b$ 是真为前提，否则结论就不唯一，真假也不定．请看：

若 $2 = -2$，(假)

于是 $2^2 = (-2)^2$，即 $4 = 4$(真)；

同样 $2^3 = (-2)^3$，即 $8 = -8$(假)．

这样，由 $2 = -2$ 这一虚假命题出发，就可以推出一系列结论，有真有假，没有定论，使我们无法论证，因此，要时刻注意命题条件的真实性．在教学中，我们约定，一个命题的条件为假，此命题即为假命题．这种命题我们不予研究．

第三节　命题与概念

中学数学的每一个命题都与数学概念紧密相连．概念是反映客观事物的共同的本质属性的思维形式．概念所指对象的全体称为概念的外延，例如："四边形"这一概念所指对象包含着一切类别的四边形，即四边形类所指的梯形、等腰梯形、直角梯形、平行四边形、矩形、菱形、正方形等等．概念所含对象的一切共同本质属性的总和称为概念的内涵．如"矩形"这一概念内涵包含着三个本质属性：(1) 四边形；(2) 两组对边互相平行；(3) 有一个内角是直角．

概念的外延与内涵是互相关联的．因为某一概念所涉及的对象越多，它们之间的共同属性就会越少；所涉及的对象越少，它们的共同属性就会越多，因此，概念的外延越大，内涵就

会越小，概念的外延越小，内涵就越大．例如，把“四边形”的外延缩小为“平行四边形”，其内涵都增加了“两组对边平行”的性质，这一性质对一般四边形来说是不具备的．再如把“矩形”的内涵增加一个“对角线互相垂直”的性质，其外延就会减少为“正方形”，这一性质是“矩形”所不具备的．

理解和掌握数学概念是整个数学教学的重要环节，是数学命题构成的基础．因此，在教学中要抓住事物的本质、事物的全体、事物的内部联系，剖析概念的外延与内涵，使命题教学落到实处．

中学数学的概念，除了少数几个概念，例如，点、线、面、整体、部分、集合等外，大部分概念都是通过下定义的方法描述其本质属性的．所谓给一个概念下定义，就是揭示概念所指对象的本质属性，并把这些对象和其他与之相似的对象区别开来的一种方法．数学定义都是判断性语句，因此数学定义都是命题．例如，“直径是通过圆心的弦”，“弦是连结圆上任意两点的线段”，“线段是直线上两点间的部分”等都是定义．而“直线”是没有定义的概念，但也给出了一种形象的描述．

数学中的公理，是不加证明而被承认真实的命题．“公理”虽不用加以证明，但它却是可靠的．任何一个公理，都是人们在社会生产实践中，对客观事物规律的概括和总结．因此，在论证中合理使用公理，不会发生谬误，但也绝不可自造公理，公理在一个学科中是自成体系的．

数学中的定理，是经过证明而被承认真实的命题，但在数学中有许多定理在证明其他定理时，很少用到，一般地都是把它们列入习题中，加上“求证”或“证明”的指令后，变为证明

题．有些定理虽没有在教材正文中列出，但在课后用黑体字排出的证明题，可做为定理使用．

此外，数学中的公式、法则等也都是命题．

练　习　一

1. 下列各句或符号是否是命题，并说明理由．

(1)　1 是偶数；

(2)　a、b 异号；

(3)　线段 AB 太长；

(4)　有理数大于零；

(5)　$2>5$；

(6)　$|a|=a$ 不一定成立；

(7)　含有未知数的等式叫方程；

(8)　过三点能确定三个圆；

(9)　过不在同一直线上三点可以确定三个圆；

(10)　任何数除以零时，都等于零；

(11)　数 a 具有某种性质；

(12)　空集合元素的个数是零；

(13)　C_m^m；

(14)　$2\in Q$；

(15)　原点是复平面内直角坐标系实轴与虚轴的公共点．

2. 把下列各命题改写成"若……则……"的语式表述的条件命题．

(1)　两个数的和大于其中任何一个数；

(2) $\sqrt{2}$ 是无理数；

(3) 两个底角相等的梯形是等腰梯形；

(4) 对角之和相等的四边形有一个外接圆；

3. 把下列各条件命题，略去关联词语“如果……，那么……”，改成一个缩写命题．

(1) 如果两条直线都和第三条直线垂直，那么这两条直线平行；

(2) 如果两个图形关于某直线对称，那么对应点的连线被对称轴垂直平分；

(3) 如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同，那么这两个角相等；

(4) 如果两个平行平面同时和第三个平面相交，那么它们的交线平行；

(5) 如果 $f(x)$ 是正弦函数，则 $f(x)$ 的最小正周期是 2π；

(6) 如果 α 是偶数，则 α 能被 2 整除．

4. 指出下列各数概念的外延和内涵：

(1) 三角形　　(2) 平行四边形

(3) 方　程　　(4) 有理数