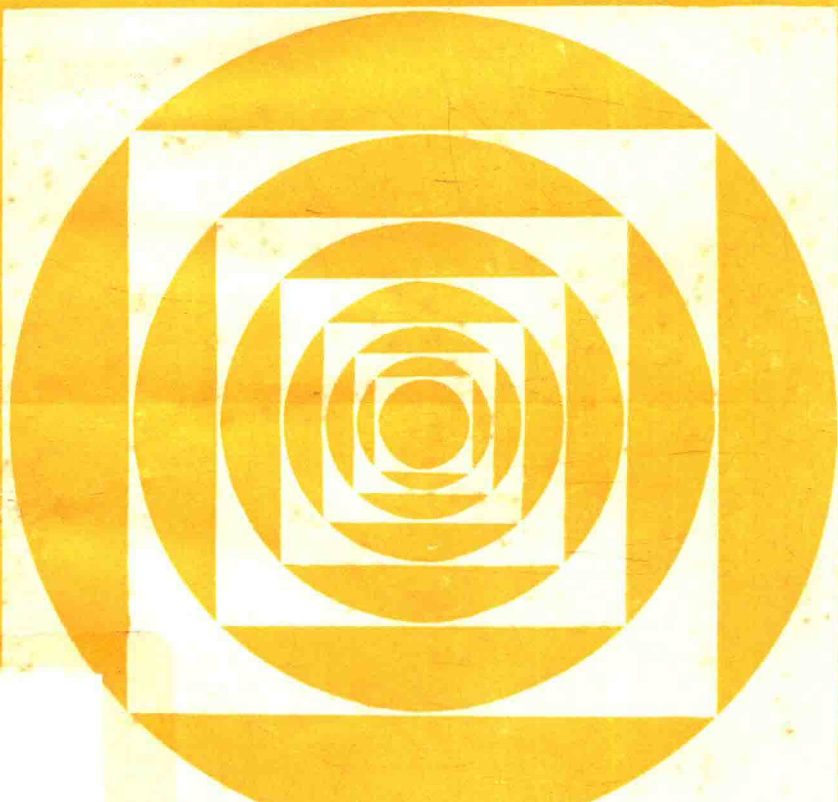
学教师进修教材

代数与初等函数

下册

上海教育出版社



小学教师进修教材

代数与初等函数

（下　册）

上海市小学教师进修教材编写组编

上海教育出版社

小学教师进修教材
代数与初等函数
（下　册）
上海市小学教师进修教材编写组编
上海教育出版社出版
（上海永福路 123 号）
新华书店上海发行所发行　上海市印刷四厂印刷
开本 787×1092 1/32　印张 6.75　字数 150,000
1984 年 6 月第 1 版　1986 年 6 月第 3 次印刷
印数 204,701—277,200 本
统一书号：7150·3184　　定价：0.79 元

目　　录

第六章　数列和数学归纳法

前面我们学习了几种重要的函数，它们的定义域一般都是实数集或实数集的真子集，并且自变量在定义域内都是连续变化的．在这一章里，我们将学习数列和数学归纳法．而数列可以看作是一个定义域为自然数集或它的真子集 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的函数，当自变量从小到大依次取自然数时相应的一系列函数值．而且，数列又是学习数列极限的基础．

数学归纳法是数学里的一种非常重要的证明方法，许多与自然数有关的命题的证明都要用到这种方法．

本章主要学习数列的概念，等差数列、等比数列以及数列的极限，同时还学习数学归纳法及其应用．

一　数　列

6.1　数列的概念

1．数列的定义

我们先看下面的一些例子：

(1) 把自然数从1起依次排列起来，得到一列数：

$1, 2, 3, \cdots, n, \cdots;$

(2) 某厂堆放的油桶，最下一层是13个，每往上一层少1个，共堆放了七层(图 6-1)．把自上而下各层的油桶个数排成一列数：

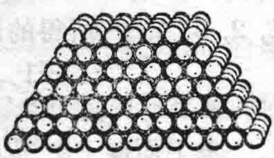


图　6-1

$$7, 8, 9, 10, 11, 12, 13;$$

(3) 正 n 边形每一个内角是 $\frac{(n-2)\pi}{n}$ 弧度，依次计算正三角形、正四边形、正五边形、…、正 n 边形、…的每一个内角的弧度数，得到一列数：

$$\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{5}, \cdots, \frac{(n-2)\pi}{n}, \cdots;$$

(4) 把自然数 1, 2, 3, 4, …, n, … 的倒数依次排列起来，得到一列数：

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots;$$

(5) 把 $\sqrt{2}$ 的不足近似值，按照精确到 0.1, 0.01, 0.001, … 的顺序排列起来，得到一列数：

$$1.4, 1.41, 1.414, \cdots;$$

(6) 把 $-\frac{1}{2}$ 的 1 次幂, 2 次幂, 3 次幂, 4 次幂, … 依次排列起来，得到一列数：

$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots;$$

(7) 在函数 $f(n)=n^2-(n+1)(n-1)$ 里，自变量 n 依次取自然数 1, 2, 3, 4, … 所得的函数值排成一列数：

$$1, 1, 1, 1, \cdots;$$

(8) 在函数 $f(n)=\frac{1}{n(n+1)}$ 里，自变量 n 依次取自然数 1, 2, 3, 4, … 所得的函数值排成一列数：

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \cdots.$$

象上面例子中，按照一定次序排列着的一列数，叫做**数列**.

在一个数列里，每一个确定的位置上都有一个确定的数.

例如，在上面的数列(1)里，第一个位置上的数是1，第二个位置上的数是2，…；在数列(2)里，第一个位置上的数是7，第二个位置上的数是8，…．因此，我们可以把一个数列里的数看作以它所在位置的序数为自变量的函数．这个函数的自变量可取值是1，2，3，…，而对应的函数值就是数列里的各个数．

2．数列的项

数列里的一个数叫做这个数列的**一项**；在第一个位置上的数叫做第1项(或首项)，第二个位置上的数叫做第2项，…，一般地说，在第n个位置上的数叫做**第n项**．数列里的第n项也叫做数列的**通项**，通常用符号a_n表示，例如，前面的数列(4)里，$a_1=1$，$a_2=\frac{1}{2}$，$a_3=\frac{1}{3}$，$a_4=\frac{1}{4}$．

这样，数列的一般形式可以写作

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots.$$

第n项是a_n的数列可以简单地记作$\{a_n\}$．例如，前面的数列(4)可以记作$\left\{a_n=\frac{1}{n}\right\}$，数列(7)可以记作

$$\{a_n=n^2-(n+1)(n-1)\}.$$

3．数列的通项公式

如果一个数列的第n项a_n与n之间的函数关系可以用一个式子来表示，那么这个式子叫做这个数列的**通项公式**．例如，前面的数列(3)的通项公式是$a_n=\frac{(n-2)\pi}{n}$；数列(4)的通项公式是$a_n=\frac{1}{n}$．但必须注意，不是每一个数列都有通项公式的．例如，前面的数列(5)就没有通项公式．

如果知道了一个数列的通项公式，那么用某一个自然数

代替公式里的n，就可以求出这个数列的某一项，因此，知道了数列的通项公式，就可以知道数列的每一项。

例 1 已知下列数列，试写出各数列的前 6 项。

(1) $\{a_n=n^2\}$； (2) $\left\{a_n=\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$；

(3) $\left\{a_n=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right\}$.

解 依次用自然数 1, 2, 3, 4, 5, 6 分别代替三个数列的通项公式里的n，得

(1) 数列 $\{a_n=n^2\}$ 的前 6 项是

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36.$$

(2) 数列 $\left\{a_n=\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$ 的前 6 项是

$$-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{5},\ \frac{1}{6}.$$

(3) 数列 $\left\{a_n=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right\}$ 的前 6 项是

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{12},\ \frac{1}{20},\ \frac{1}{30},\ \frac{1}{42}.$$

例 2 设一个数列的前几项是

(1) $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11$；

(2) $\dfrac{2^2-1}{2},\ \dfrac{3^2-1}{3},\ \dfrac{4^2-1}{4},\ \dfrac{5^2-1}{5},\ \dfrac{6^2-1}{6},\ \dfrac{7^2-1}{7}$；

(3) $1\times2,\ -2\times3,\ 3\times4,\ -4\times5,\ 5\times6,\ -6\times7$；

写出这些数列的通项公式.

解 (1) 这个数列里的每个数都等于项数的 2 倍减去 1 所得的差，所以它的通项公式是 $a_n=2n-1$.

(2) 这个数列里的每个数，它的分母都等于项数加上 1 所得的和，分子都是分母的平方减去 1，所以它的通项公式是

$$a_n=\frac{(n+1)^2-1}{n+1}=\frac{n(n+2)}{n+1}.$$

(3) 这个数列 $1\times2, -2\times3, 3\times4, -4\times5, 5\times6, -6\times7$ 里每个数的绝对值都等于项数与项数加上 1 的积，而奇数项为正，偶数项为负，所以它的通项公式是

$$a_n=(-1)^{n+1}n(n+1).$$

注意：一个数列如果有通项公式，那么它的通项公式不是唯一的，通常只需求出一个满足条件的最简单的公式.

4. 数列的图象

数列可以看作是自变量为自然数的函数. 所以，象作一般的函数图象那样，我们也可以利用直角坐标系把一个数列用图象表示出来. 例如，要作出前面的数列(2)的图象，可以

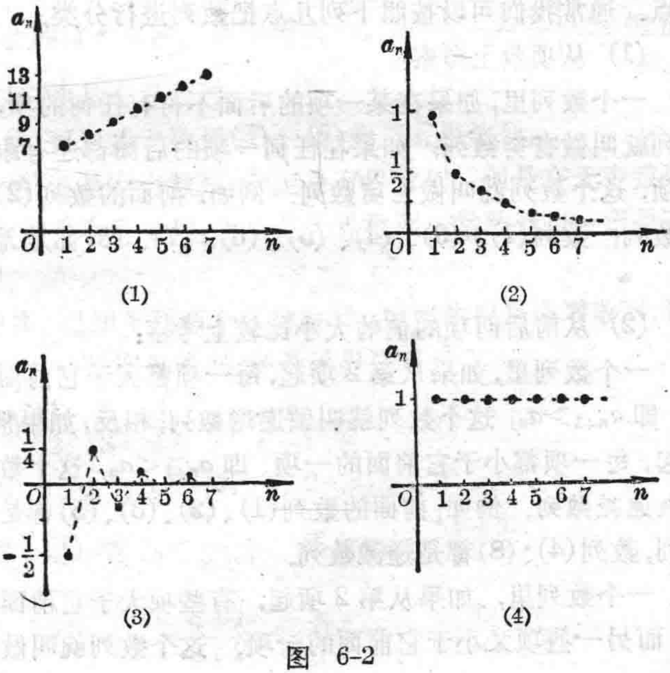


图 6-2

用直角坐标系的横轴作为表示数列的项数 n 的轴，用纵轴作为表示数列各项的值 a_n 的轴，这样就得到七个分散着的点[图 6-2(1)]，这就是数列(2)的图象．用同样方法也可以作出前面的数列(4)、(6)、(7)的图象[图 6-2(2)、(3)、(4)]．

必须注意，因为 n 是一个一个分散着的数，所以数列的图象是一群分散的孤立的点的集合．

但有时为了便于从图中观察数列的变化趋势，也可以用虚的折线把这些孤立的点顺次地连接起来，如图 6-2 所示．

注意：作数列的图象时，在 n 轴和 a_n 轴上所取的单位长度不一定相同．

5．数列的分类

观察前面的八个数列，可以看到，这些数列各具有不同的特点．通常我们可以按照下列几点把数列进行分类．

(1) 从项数上考察：

一个数列里，如果在某一项的后面不再有任何的项，这个数列就叫做**有穷数列**；如果在任何一项的后面都还有跟随着的项，这个数列就叫做**无穷数列**．例如，前面的数列(2)是有穷数列；数列(1)、(3)、(4)、(5)、(6)、(7)、(8)都是无穷数列．

(2) 从前后两项的值的大小比较上考察：

一个数列里，如果从第 2 项起，每一项都大于它前面的一项，即 $a_{n+1}>a_n$，这个数列就叫做**递增数列**；相反，如果从第 2 项起，每一项都小于它前面的一项，即 $a_{n+1}<a_n$，这个数列就叫做**递减数列**．例如，前面的数列(1)、(2)、(3)、(5)都是递增数列，数列(4)、(8)都是递减数列．

一个数列里，如果从第 2 项起，有些项大于它前面的一项，而另一些项又小于它前面的一项．这个数列就叫做**摆动**

数列；如果各项都相等，这个数列就叫做**常数列**．例如，前面的数列(6)是摆动数列；数列(7)是常数列．

(3) 从各项的绝对值来考察：

一个数列里，如果任何一项的绝对值都不大于某一个正数，即存在某一个确定的正数 M，使得不等式 $|a_n|\leqslant M$ 恒成立，这样的数列就叫做**有界数列**；没有这样的数存在的数列，叫做**无界数列**．

例如，对于数列(1)，因为 n 的值愈大，a_n 的绝对值就愈大，所以不存在一个正数 M，能使不等式 $|a_n|\leqslant M$ 成立，因此，这个数列是无界数列；而数列(2)各项的绝对值不大于13(即 $a_n\leqslant 13$)，也就是不等式 $|a_n|\leqslant 13$ 恒成立，所以它是有界数列；数列(3)的各项，正 n 边形边数不管怎么增大，每个内角都不会超过 π 弧度，即不等式 $|a_n|=\left|\dfrac{(n-2)\pi}{n}\right|<\pi$ 恒成立，所以它也是有界数列．

同样，可以确定数列(4)～(8)都是有界数列．

显然，凡是有穷数列，一定是有界数列．但是在无穷数列里，就有些是有界数列，有些是无界数列．常数列也一定是有界数列．

例3 已知下列两个无穷数列，这两数列是递增数列，还是递减数列？是有界数列，还是无界数列？

(1) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \cdots, \dfrac{n}{n+1}, \cdots$;

(2) $1, 0, -1, -2, \cdots, 2-n, \cdots$.

解 (1) 设 $a_n=\dfrac{n}{n+1}$，那么 $a_{n+1}=\dfrac{n+1}{n+2}$．

$$a_{n+1}-a_n=\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

$$\because \quad \frac{1}{(n+1)(n+2)}>0,$$

即
$$a_{n+1}-a_n>0,$$

$$\therefore \quad a_{n+1}>a_n.$$

又 $\quad |a_n|=\left|\frac{n}{n+1}\right|=\frac{n}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}<1.$

所以，这个数列是递增有界数列.

(2) 设 $a_n=2-n$，那么 $a_{n+1}=2-(n+1)=1-n$.

$$\because \quad a_{n+1}-a_n=(1-n)-(2-n)<0,$$

$$\therefore \quad a_{n+1}<a_n.$$

又
$$|a_n|=|2-n|.$$

可以看到，当 n 愈来愈大时，$|2-n|$ 也愈来愈大，所以，不存在一个正数 M，能使不等式

$$|a_n|\leqslant M$$

成立. 因此，这个数列是递减无界数列.

练 习

1. 根据下列数列的通项公式，写出它的前 5 项：

(1) $a_n=n^3$； (2) $a_n=10n$；

(3) $a_n=(-1)^{n+1}$； (4) $a_n=\frac{2n+1}{n^2+1}$.

2. 下列各组数分别是一个数列的前 4 项，写出数列的一个通项公式：

(1) 2, 4, 6, 8； (2) 13, 23, 33, 43；

(3) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}$；

(4) $1-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}-\frac{1}{5}$.

3. 已知下列各数列，试判定这些数列是有界数列还是无界数列？是有穷数列还是无穷数列？是递增数列、递减数列、常数列还是摆动数列？

(1) 10, 20, 30, 40, …, 100;

(2) $-\sqrt{3}$, 3, $-3\sqrt{3}$, 9, $-9\sqrt{3}$, 27, …;

(3) $3\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{4}$, $3\frac{1}{8}$, $3\frac{1}{16}$, …;

(4) $\log_2\frac{1}{2}$, $\log_2\frac{1}{4}$, $\log_2\frac{1}{8}$, $\log_2\frac{1}{16}$, …, $\log_2\frac{1}{2^n}$, …;

(5) $\sin\frac{\pi}{6}$, $\sin\left(\frac{\pi}{6}+2\pi\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{6}+4\pi\right)$, …, $\sin\left(\frac{\pi}{6}+2n\pi\right)$, ….

6.2 等差数列

1．等差数列的概念

我们来考察数列：

(1) 11, 13, 15, 17, 19, …;

(2) 8, 4, 0, -4, -8, …;

(3) 1, $1+\sqrt{2}$, $1+2\sqrt{2}$, $1+3\sqrt{2}$, $1+4\sqrt{2}$, ….

可以看出，它们组成的法则有下面的相同点：每一个数列里从第 2 项起，每一项减去它的前面一项所得的差都等于同一个常数．在数列(1)里，这个常数是 $13-11=15-13=\cdots=2$；在数列(2)里，这个常数是 $4-8=0-4=\cdots=-4$；在数列(3)里，这个常数是 $(1+\sqrt{2})-1=(1+2\sqrt{2})-(1+\sqrt{2})=\cdots=\sqrt{2}$.

如果一个数列，从第 2 项起，每一项减去它的前面一项所得的差都等于同一个常数，那么这个数列就叫做**等差数列**．这个常数叫做等差数列的**公差**，通常用字母 d 来表示．例如，在数列(1)里，$d=2$；在数列 (2)里，$d=-4$；在数列(3)里，$d=\sqrt{2}$.

公差等于零的等差数列就是常数列．

2．等差数列的通项公式

因为在一个等差数列里，从第 2 项起，每一项减去它前面

的一项都等于公差，所以每一项都等于它前面的一项加上公差．因此，如果等差数列 a_1, a_2, a_3, a_4, … 的公差是 d, 那么

$$a_2=a_1+d,$$
$$a_3=(a_1+d)+d=a_1+2d,$$
$$a_4=(a_1+2d)+d=a_1+3d,$$
$$\cdots\cdots.$$

由此可知，如果等差数列 a_1, a_2, a_3, … 的公差是 d, 那么它的第 n 项

$$\boldsymbol{a_n=a_1+(n-1)d}.$$

这就是等差数列的通项公式.

下面我们举例来说明这个公式的应用.

例 1 求等差数列 40, 37, 34, … 的第 12 项.

解 ∵ $a_1=40$, $d=37-40=-3$, $n=12$,

∴ $a_{12}=40+(12-1)\times(-3)=7$.

例 2 等差数列 -2, $1\frac{1}{2}$, 5, … 的第几项是 $22\frac{1}{2}$?

解 这里，$a_1=-2$, $d=1\frac{1}{2}-(-2)=3\frac{1}{2}$.

设这个数列的第 n 项是 $22\frac{1}{2}$, 就是 $a_n=22\frac{1}{2}$, 那么

$$22\frac{1}{2}=-2+(n-1)\times3\frac{1}{2}$$

解这个方程，得

$$n=8.$$

求得的 n 是正整数，所以能够符合题意.

因此，$22\frac{1}{2}$ 是这个等差数列的第 8 项.

例 3 已知等差数列的第 3 项是 -4, 第 6 项是 2, 求它的第 10 项.

解 要求这个等差数列的第10项，应当先求出它的首项 a_1 和公差 d.

由 $a_3=-4$, $a_6=2$, 可以列出方程组：

$$\begin{cases}a_1+(3-1)d=-4,\\a_1+(6-1)d=2.\end{cases}$$

解这个方程组，得

$$d=2,\quad a_1=-8.$$

$$\therefore\quad a_{10}=-8+(10-1)\times 2=10.$$

例4 安装在一个公共轴上的5个滑轮的直径成等差数列. 已知最大和最小的滑轮的直径分别是216毫米和120毫米，求中间三个滑轮的直径.

解 设中间三个滑轮的直径分别是 a_2 毫米，a_3 毫米，a_4 毫米. 那么根据题意，可以知道216, a_2, a_3, a_4, 120成等差数列. 因此

$$216+(5-1)d=120.$$

解这个方程，得 $d=-24$.

由此可得 $a_2=192$, $a_3=168$, $a_4=144$.

所以，中间的三个滑轮的直径顺次是192毫米，168毫米，144毫米.

上例实际上是，在216和120中间插入了三个数192, 168, 144后，五个数成等差数列.

如果在两个数 a 和 b 中间插入一个数 A, 使 a、A、b 成等差数列，那么 A 叫做 a 和 b 的**等差中项**. 例如上例中的三个数192, 168, 144成等差数列，那么168就是192和144的等差中项.

根据等差数列的定义，得

$$A-a=b-A,$$

由此可得

$$2A=a+b.$$

$$\therefore\quad A=\frac{a+b}{2}.$$

反之,如果关系式 $A=\dfrac{a+b}{2}$ 成立,那么 A 就是 a 和 b 的等差中项.

例 5 已知 a, b, c 三数成等差数列,求证:

$$b+c,\ c+a,\ a+b$$

三数也成等差数列.

解 $\because$ a, b, c 成等差数列,

$\therefore$ $a+c=2b$.

$$\because\quad (b+c)+(a+b)=2b+(a+c)=(a+c)+(a+c)$$
$$=2(a+c),$$

$\therefore$ $a+c$ 是 $b+c$ 和 $a+b$ 的等差中项.

$\therefore$ $b+c,\ c+a,\ a+b$ 这三个数成等差数列.

练　　习

1. (1) 求等差数列 3, 7, 11, … 的第 4、7、10 项;
   (2) 求等差数列 2, 9, 16, … 的第 n 项.
2. 在等差数列里:
   (1) $d=-\dfrac{1}{3}$, $a_7=8$, 求 a_1;　(2) $a_1=12$, $a_6=27$, 求 d;
   (3) $a_1=3$, $a_n=21$, $d=2$, 求 n;
   (4) $a_4=10$, $a_7=19$, 求 a 和 d.
3. 求下列各组数的等差中项:
   (1) 647 和 859;　(2) $-12\dfrac{1}{3}$ 和 $24\dfrac{3}{5}$;
   (3) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ 和 $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$;
   (4) $(a+b)^3$ 和 $(a-b)^3$.

3. 等差数列前 n 项的和的公式

先看一个简单例子如图 6-1，堆放着的油桶，最上面的一层堆放 7 个，下面每一层比它的上面一层多放 1 个，这堆油桶一共有七层，问：一共有多少个油桶？

这个问题就是首项是 7，公差是 1，项数是 7 的等差数列的求和问题。

因为 $7+13=8+12=9+11=\cdots=13+7$，所以，可以象下面那样来求和：

$$S=7+8+9+10+11+12+13,$$

$$S=13+12+11+10+9+8+7,$$

两式相加，得

$$2S=(7+13)+(8+12)+(9+11)+(10+10)$$
$$+(11+9)+(12+8)+(13+7)=(7+13)\times7.$$

$$\therefore\quad S=\frac{(7+13)\times7}{2}=70(\text{个}).$$

这个等差数列的求和问题也可以用图来说明，从图 6-3 里可以清楚地看出：七层油桶个数的和就是首项与末项的和乘以项数再除以 2.

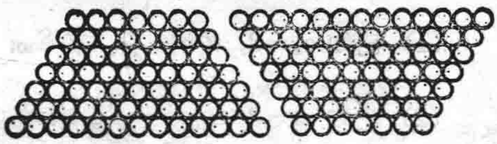


图 6-3

一般地，设等差数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ 的公差是 d，那么用同样的方法可以求得它的前 n 项的和 S_n.

$$\because\quad S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n,$$

又 $$S_n=a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1,$$

两式相加，得

$$2S_n=(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+\cdots+(a_n+a_1).$$