李成章教练奥数笔记

第6卷

李成章　著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

LI CHENG ZHANG JIAO LIAN AO SHU BI JI

李成章教练奥数笔记

第6卷

李成章　著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

本书为李成章教练奥数笔记第六卷，书中内容为李成章教授担任奥数教练时的手写原稿．书中的每一道例题后都有详细的解答过程，有的甚至有多种解答方法．

本书适合准备参加数学竞赛的学生及数学爱好者研读．

图书在版编目(CIP)数据

李成章教练奥数笔记．第6卷/李成章著．—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2016．1

ISBN 978－7－5603－5726－3

Ⅰ．①李…　Ⅱ．①李…　Ⅲ．①数学-竞赛题-题解　Ⅳ．①O1－44

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第280423号

策划编辑　刘培杰　张永芹

责任编辑　张永芹　杜莹雪

封面设计　孙茵艾

出版发行　哈尔滨工业大学出版社

社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006

传　　真　0451－86414749

网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn

印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司

开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张14.5　字数162千字

版　　次　2016年1月第1版　2016年1月第1次印刷

书　　号　ISBN 978－7－5603－5726－3

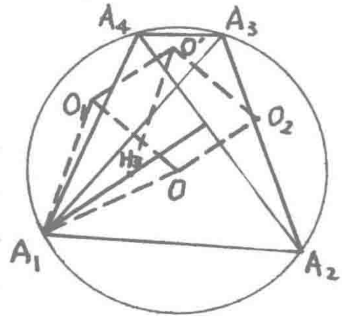
定　　价　38.00元

◎

目录

十六 共圆

1 如图，四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 内接于⊙O，H_1,H_2,H_3,H_4 分别为 $\triangle A_2A_3A_4$，$\triangle A_3A_4A_1$，$\triangle A_4A_1A_2$ 和 $\triangle A_1A_2A_3$ 的垂心．求证 H_1,H_2,H_3,H_4 四点共圆并求出这个圆的圆心的位置．（1992年全国联赛二试1题）



证1 分别作点O关于直线 A_1A_3，A_2A_4 的对称点 O_1，O_2，并以 O_1，O，O_2 为连续3个顶点作平行四边形 O_1OO_2O'，于是有

$$A_1H_3 \mathrel{\underline{\parallel}} OO_2 \mathrel{\underline{\parallel}} O_1O'.$$

∴ 四边形 $O_1A_1H_3O'$ 为平行四边形．

$$\therefore\ O'H_3 = O_1A_1 = OA_1 = R,$$

其中R为⊙O的半径．

同理 $O'H_1 = O'H_2 = O'H_4 = R$．

∴ H_1,H_2,H_3,H_4 都在以 O' 为心，R为半径的圆上，即 H_1,H_2,H_3 和 H_4 四点共圆．

证2 取以点O为原点，⊙O半径为单位长的直角坐标系，于是可设顶点 A_1,A_2,A_3,A_4 的坐标依次为 $(\cos\alpha_1,\sin\alpha_1)$，$(\cos\alpha_2,\sin\alpha_2)$，$(\cos\alpha_3,\sin\alpha_3)$，$(\cos\alpha_4,\sin\alpha_4)$．从而由重心坐标公式和欧拉定理知4个垂心 H_1,H_2,H_3,H_4 的坐标分别为

$$H_1(\cos\alpha_2+\cos\alpha_3+\cos\alpha_4,\ \sin\alpha_2+\sin\alpha_3+\sin\alpha_4),$$
$$H_2(\cos\alpha_3+\cos\alpha_4+\cos\alpha_1,\ \sin\alpha_3+\sin\alpha_4+\sin\alpha_1),$$
$$H_3(\cos\alpha_4+\cos\alpha_1+\cos\alpha_2,\ \sin\alpha_4+\sin\alpha_1+\sin\alpha_2),$$
$$H_4(\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cos\alpha_3,\ \sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\sin\alpha_3).$$

令

$$M(\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cos\alpha_3+\cos\alpha_4,\ \sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\sin\alpha_3+\sin\alpha_4)$$

容易看出

$$MH_i=\sqrt{\cos^2\alpha_i+\sin^2\alpha_i}=1,\quad i=1,2,3,4.$$

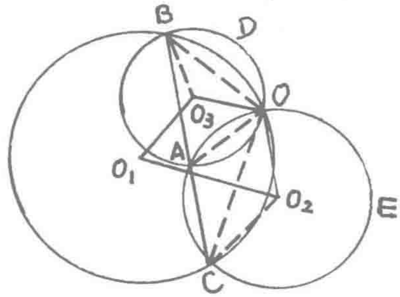
$\therefore H_1, H_2, H_3$和H_4四点共圆且圆心就是点M，半径为1.

由H_3，A_3和M的坐标表示式知，过点H_3作$H_3M \underline{\parallel} OA_3$，所得的点$M$即为所求之圆心之几何位置.

注 本题之特点在于4个三角形之垂心和4个三角形有同一个外心，故宜用欧拉定理和解析几何或复数方法.(2012.2.17)

2　设3个圆$\odot O_1$，$\odot O_2$，$\odot O_3$交于一点O，且$\odot O_2$与$\odot O_3$的另一个交点为A，$\odot O_3$与$\odot O_1$的另一个交点为B，$\odot O_1$与$\odot O_2$的另一个交点为C．求证O，O_1，O_2，O_3四点共圆的充分必要条件是A，B，C三点共线．

（《圆一王大全》279页例3改）



证1　连结OO_3，O_3O_1，O_1O_2，O_2O，OA，OB，OC，O_3B和O_2C．因为两圆的连心线垂直于公共弦，所以

$$O_1O_3\perp OB,\ O_1O_2\perp OC.$$

$$\therefore \angle O_3O_1O_2+\angle BOC=180^\circ.$$

由此可见，为证O_1，O_2，O，O_3四点共圆，只须证明

$$\angle O_3O_1O_2+\angle O_3OO_2=180^\circ \Longleftrightarrow \angle O_3OO_2=\angle BOC.$$

而这又只须证明

$$\angle BOO_3=\angle COO_2.$$

反之亦然．

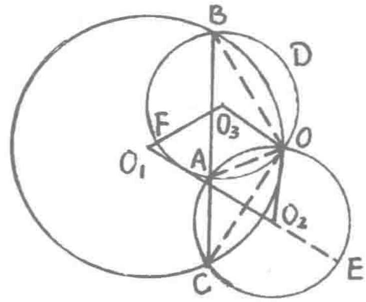
$$B,A,C\text{三点共线}\Longleftrightarrow \angle BAO+\angle CAO=180^\circ$$

$$\Longleftrightarrow \overset{\frown}{BDO}+\overset{\frown}{CEO}=360^\circ \Longleftrightarrow \angle BO_3O=\angle CO_2O$$

$$\Longleftrightarrow \angle BOO_3=\angle COO_2 \quad \Longleftrightarrow \angle O_3OO_2=\angle BOC.$$

$\therefore$ O_1，O_2，O，O_3共圆的充分必要条件是B，A，C三点共线．

证2　连结OO_3，O_3O_1，O_1O_2，O_2O，OA，OB，OC，O_1O_3交$\odot O_3$于点F，延长O_1O_2交$\odot O_2$于点E．



A, B, C 三点共线

$\Longleftrightarrow \angle BAO+\angle OAC=180^\circ$

$\Longleftrightarrow \overset{\frown}{BDO}+\overset{\frown}{OEC}=360^\circ$

$\Longleftrightarrow \overset{\frown}{BFO}\overset{m}{=}\overset{\frown}{OEC}$

$\because O_1O_3\perp OB$，$O_1O_2\perp OC$，

$\therefore O_1O_3$ 平分 $\overset{\frown}{BFO}$，O_1O_2 平分 $\overset{\frown}{OEC}$。

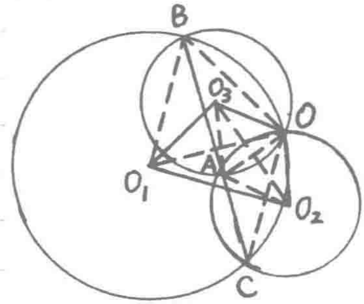
$\therefore \overset{\frown}{OAF}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BFO}$，$\overset{\frown}{OE}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{OEC}$。

$\overset{\frown}{BFO}\overset{m}{=}\overset{\frown}{OEC}\Longleftrightarrow \overset{\frown}{OAF}\overset{m}{=}\overset{\frown}{OE}\Longleftrightarrow \angle OO_3O_1=\angle OO_2E$

$\Longleftrightarrow O_1, O_2, O, O_3$ 四点共圆。

注 若由上面的 $\overset{\frown}{BDO}+\overset{\frown}{OEC}=360^\circ$ 推出 $\overset{\frown}{BAO}+\overset{\frown}{CAO}=360^\circ$，则不必延长 O_1O_2 到 E，直接即可导出 $\angle OO_3O_1+\angle OO_2O_1=180^\circ$。

证3 连结 OO_1，O_2O_3，OA，OB，OC，BO_1，AO_2，AO_3，CA，BC。



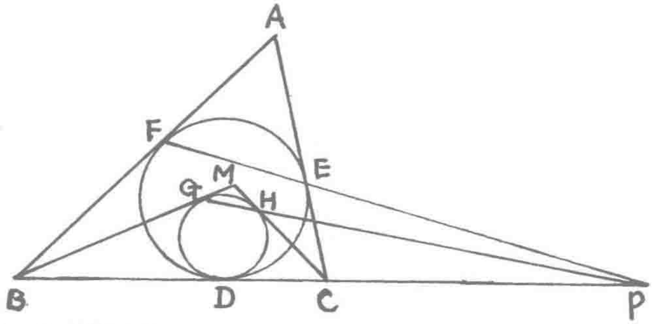
$\because O_1O_3\perp OB$，$O_2O_3\perp OA$。

$\therefore \angle OO_2O_3=\frac{1}{2}\angle OO_2A=\angle OCA$，

$\angle OO_1O_3=\frac{1}{2}\angle OO_1B=\angle OCB$。

$\therefore O_1, O_2, O, O_3$ 四点共圆 $\Longleftrightarrow \angle OO_1O_3=\angle OO_2O_3$

$\Longleftrightarrow \angle OCA=\angle OCB\Longleftrightarrow B, A, C$ 三点共线。



3. M为△ABC内一点，△ABC的内切圆与边BC、CA、AB的切点分别为D、E、F，△MBC的内切圆与边BC、CM、MB的切点分别为D、H、G，求证E、F、G、H四点共圆.（1995年IMO预选题）

证1 直线PEF截△ABC的3边BC、CA、AB于点P、E、F，由梅涅劳斯定理有

$$\frac{BP}{PC}\frac{CE}{EA}\frac{AF}{FB}=1.$$

若EF∥CB，则GH∥BC，于是梯形EFGH为等腰，当然四点共圆.

$\because$ $AE=AF$，$BF=BD=BG$，$CE=CD=CH$，$MG=MH$，

$$\therefore\ 1=\frac{BP}{PC}\frac{CE}{FB}=\frac{BP}{PC}\frac{CH}{GB}=\frac{BP}{PC}\frac{CH}{HM}\frac{MG}{GB}.$$

由梅涅劳斯定理的逆定理知，P，H，G三点共线.

$\therefore$ $PF\cdot PE=PD^2=PG\cdot PH$. $\therefore$ E，F，G，H四点共圆.

证2 $EF\cap BC=P$，$GH\cap BC=P'$. 由梅涅劳斯定理有

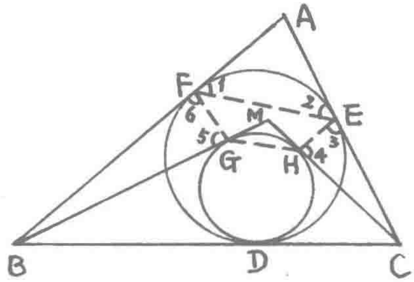
$$\frac{BP}{PC}\frac{CE}{EA}\frac{AF}{FB}=1=\frac{BP'}{P'C}\frac{CH}{HM}\frac{MG}{GB}.$$

$\because$ $AF=AE$，$CE=CD=CH$，$BF=BD=BG$，$MH=MG$，

$\therefore$ $\frac{BP}{PC}=\frac{BP'}{P'C}$. $\therefore$ $\frac{BC}{PC}=\frac{BC}{P'C}$. $\therefore$ $PC=P'C$.

$\therefore$ 点P′与P重合. 点P为二圆的根心.

$\because$ $PF\cdot PE=PD^2=PG\cdot PH$，$\therefore$ E，F，G，H四点共圆.



※证3 连结EF，FG，GH，HE．

∵ $AF=AE, MG=MH$，
$BF=BD=BG$，
$CE=CD=CH$，

∴ $\angle 1=\angle 2, \angle 3=\angle 4$，
$\angle 5=\angle 6, \angle MGH=\angle MHG$． ∴ $\angle BGH=\angle CHG$．

$$\begin{aligned}\therefore \angle EFG+\angle EHG &=(180^\circ-\angle 1-\angle 6)+(360^\circ-\angle 4-\angle CHG)\\ &=(180^\circ-\angle 2-\angle 5)+(360^\circ-\angle 3-\angle BGH)\\ &=(180^\circ-\angle 2-\angle 3)+(360^\circ-\angle 5-\angle BGH)\\ &=\angle FEH+\angle FGH.\end{aligned}$$

∴ $\angle EFG+\angle EHG=180^\circ$． ∴ E，F，G，H四点共圆．

(2003．11．28)

证4 延长FE和BC交于点P，连结PG交MC于点H'，由梅涅劳斯定理有

$$\frac{AF}{FB}\cdot\cancel{\frac{BP}{PC}}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{MG}{GB}\cdot\cancel{\frac{BP}{PC}}\cdot\frac{CH'}{H'M}.$$

∵ $BF=BD=BG$，$AF=AE$，$CE=CH$，$MG=MH$，

∴ $\dfrac{CH}{MH}=\dfrac{CH'}{H'M}$． ∴ $\dfrac{CH}{CM}=\dfrac{CH'}{CM}$．

∴ $CH=CH'$． ∴ 点H'与H重合．

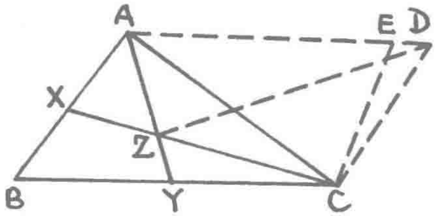
∴ $PF\cdot PE=PD^2=PG\cdot PH$．

∴ E，F，G，H四点共圆． (2003．12．20)

注 底边BC为两圆的根轴，特点是切点多，故应注意切割线定理及切线长定理．

4　在△ABC的两边AB和BC上各取一点X和Y，$AY \cap CX = Z$，使得$AY=YC$，$AB=ZC$，求证X，B，Y，Z四点共圆．

（2000年世界城市锦标赛）



证1　若$\angle AYB \geq 90^\circ$，则有$AB > AY$；若$\angle AYB < 90^\circ$，则$\angle AYC > 90^\circ$，$ZC > YC$，故总有$AB = ZC > YC = AY$．

作平行四边形ABCD．在AD上取点E，使得$\angle ECY = \angle AYC$．于是四边形YCEA为等腰梯形．

$\therefore YC = AY = CE$，$\angle ZYC = \angle YCE = \angle CED$．

又$\because ZC = AB = CD$，$\therefore \triangle ZYC \cong \triangle DEC$．

$\therefore \angle ECD = \angle ZCY$．$\therefore \angle ZCD = \angle YCE = \angle AYC$．

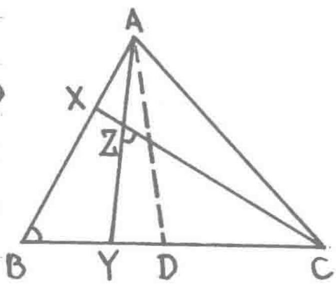
又$\because AY = YC$，$ZC = CD$，$\therefore \triangle AYC \sim \triangle ZCD$．

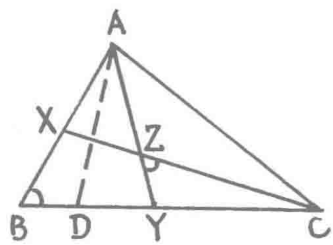
$\therefore \angle ZAC = \angle ZDC$．　$\therefore$ A，Z，C，D四点共圆．

$\therefore \angle B + \angle XZY = \angle ADC + \angle AZC = 180^\circ$．

$\therefore$ X，B，Y，Z四点共圆．

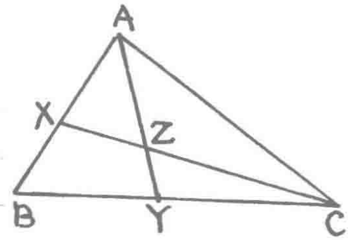
※证2　在BC上取点D，使得$AD = AY$（当$AY \perp BC$时，点D与Y重合）．于是$\angle AYD = \angle ADY$．





又$\because AB = CZ$，$AD = AY = CY$，$AB > AY = AD$，

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CZY$．$\therefore \angle B = \angle CZY$．$\therefore$ X，B，Y，Z四点共圆．



※ 证3　直线BYC与△AXZ的3边延长线都相交，由梅涅劳斯定理有

$$\frac{AB}{BX}\cdot\frac{XC}{CZ}\cdot\frac{ZY}{YA}=1.$$

$\because AB=CZ,\ AY=YC,$

$\therefore \dfrac{ZY}{YC}=\dfrac{BX}{XC}.$

由正弦定理有

$$\frac{\sin\angle ZCY}{\sin\angle YZC}=\frac{ZY}{YC}=\frac{BX}{XC}=\frac{\sin\angle BCX}{\sin B}.$$

$\therefore \sin\angle YZC=\sin B.$

由证1知 $AB>AY$.

$\therefore ZC>YC$. $\therefore \angle B$ 和 $\angle YZC$ 都是锐角.

$\therefore \angle B=\angle YZC$. $\therefore X, B, Y, Z$ 四点共圆.

※ 证4　直线AZY截△XBC，由梅涅劳斯定理有

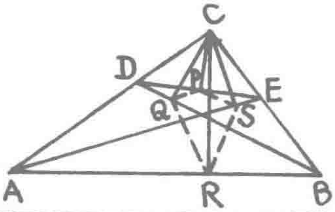
$$1=\frac{XA}{AB}\cdot\frac{BY}{YC}\cdot\frac{CZ}{ZX}=\frac{XA}{ZX}\cdot\frac{BY}{YC}.\quad\therefore \frac{XA}{ZX}=\frac{AY}{BY}.$$

由正弦定理有

$$\frac{\sin\angle XZA}{\sin\angle XAZ}=\frac{XA}{ZX}=\frac{AY}{BY}=\frac{\sin B}{\sin\angle BAY}.$$

$\therefore \sin B=\sin\angle XZA=\sin\angle YZC.$

以下证明同证3.



5 在直角△ABC的两条直角边AC和BC上分别取点D和E，过顶点C分别作DE，DB，AB，AE的垂线，求证所得的4个垂足共圆. (1989年苏联教委推荐题)

证1 将4个垂足依次记为P、Q，R，S，连结PQ，QR，RS，SP.

$\because \angle ARC=90^\circ=\angle ASC$，$\therefore$ A，R，S，C四点共圆.

$\therefore \angle CRS=\angle CAS=\angle ECS$. 同理 $\angle CRQ=\angle DCQ$.

$\because \angle CPE=90^\circ=\angle CSE$，$\therefore$ C，P，S，E四点共圆.

$\therefore \angle SPE=\angle SCE=\angle CRS$. 同理 $\angle DPQ=\angle CRQ$.

$$\begin{aligned}\therefore \angle QPS+\angle QRS&=\angle QPS+\angle QRC+\angle CRS\\&=\angle QPS+\angle DPQ+\angle SPE=180^\circ.\end{aligned}$$

$\therefore$ P，Q，R，S四点共圆.

证2 $\because \angle ARC=90^\circ=\angle ASC$，$\angle DQC=90^\circ=\angle DPC$，

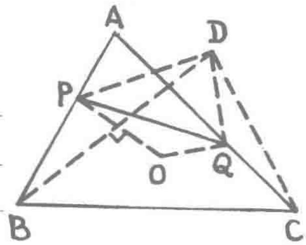
$\therefore$ A，R，S，C和D，Q，P，C都四点共圆.

$\therefore \angle ASR=\angle ACR$，$\angle BQP=\angle DCP$.

同理 $\angle BQR=\angle BCR$，$\angle ASP=\angle ECP$.

$$\begin{aligned}\therefore \angle PQR+\angle PSR&=\angle PQB+\angle BQR+\angle PSA+\angle ASR\\&=\angle DCP+\angle BCR+\angle ECP+\angle ACR\\&=2\angle ACB=180^\circ.\end{aligned}$$

$\therefore$ P，Q，R，S四点共圆.



6　设O为$\triangle ABC$的外心，在边AB，AC上分别取点P，Q，满足$BP:AC=PQ:BC=QC:AB$，求证A，P，O，Q四点共圆.

（《萧大集》479页）

证　以PQ为一边，在四边形PBCQ外作$\triangle DPQ \backsim \triangle ACB$，于是

$$\frac{DP}{AC}=\frac{PQ}{CB}=\frac{QD}{BA}，\angle PDQ=\angle A.$$

$\therefore$ A，P，Q，D四点共圆.

$\because \dfrac{BP}{AC}=\dfrac{PQ}{BC}=\dfrac{QC}{AB}$，$\therefore DP=BP，DQ=CQ.$

$\because \angle APD=\angle AQD$，$\therefore \angle BPD=\angle CQD.$

连结BD，CD，OP，OQ，于是有

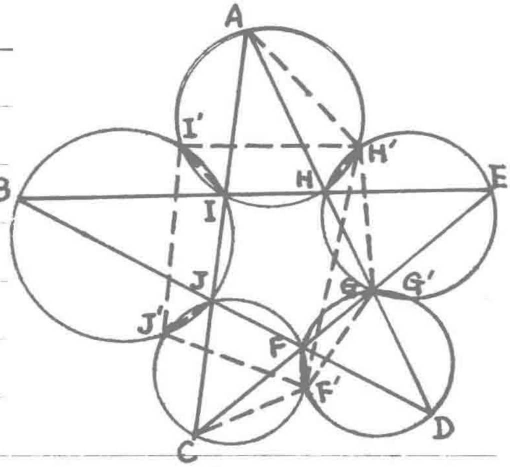
$\triangle BPD \backsim \triangle CQD$. $\therefore \angle BDP=\angle CDQ.$

$\therefore \angle BDC=\angle PDQ=\angle A$. $\therefore$ A，B，C，D四点共圆.

$\therefore OB=OD=OC$. 又$\because PB=PD，QD=QC$，$\therefore OP\perp BD，OQ\perp CD.$

$\therefore \angle POQ+\angle A=\angle POQ+\angle BDC=180^\circ.$

$\therefore$ A，P，O，Q四点共圆.



7. 如图，凸五边形 FGHIJ 的 5 条边分别延长后彼此相交得到五角星形 AIBJCFDGEH. 分别作 △AIH, △BJI, △CFJ, △DGF 和 △EHG 的外接圆，除 5 个交点 F, G, H, I, J 之外，还有 5 个交点 F', G', H', I', J'. 求证 F', G', H', I', J' 五点共圆.

证 连结 HH', H'A, H'G, F'C, FF', F'G, 于是有

$$\angle EGH' = \angle EHH' = \angle IAH'.$$

∴ A, C, G, H' 四点共圆. 同理 A, C, F', G 四点共圆.

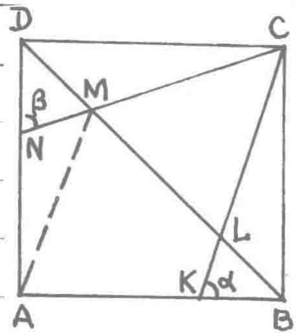
∴ A, C, F', G, H' 五点共圆.

连结 H'I', I'J', J'F', F'H', II', JJ'.

$$\begin{aligned}\because \angle I'H'F' + \angle I'J'F' &= \angle I'H'F' + \angle I'J'J + \angle JJ'F' \\ &= \angle I'H'F' + \angle I'IA + \angle JCF' \\ &= \angle I'H'F' + \angle I'H'A + \angle ACF' \\ &= \angle AH'F' + \angle ACF' = 180^\circ,\end{aligned}$$

∴ I', J', F', H' 四点共圆. 同理 I', J', F', G' 四点共圆.

∴ F', G', H', I', J' 五点共圆.



8　在正方形ABCD的边AB，AD上各取一点K和N，使得$AK\cdot AN=2BK\cdot DN$，线段CK和CN分别交对角线BD于点L，M，求证K，L，M，N，A五点共圆．

（1991年全苏数学奥林匹克）

证　设正方形边长为1，$KB=a$，$DN=b$，$\angle BKC=\alpha$，$\angle DNC=\beta$，于是$\tan\alpha=\frac{1}{a}$，$\tan\beta=\frac{1}{b}$．

$$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{1-\frac{1}{ab}}=\frac{a+b}{ab-1}.$$

$\because (1-a)(1-b)=AK\cdot AN=2BK\cdot DN=2ab$，$\therefore a+b=1-ab$．

$\therefore \tan(\alpha+\beta)=-1$．

$\because \alpha$和β都是锐角，$\therefore \alpha+\beta=135^\circ$．

$\because \angle NDM=45^\circ$，$\therefore \angle CMB=\angle DMN=\alpha$．

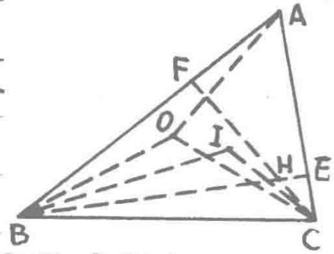
连结MA，于是MA和MC关于BD对称．

$\therefore \angle AML=\angle CMB=\alpha=\angle BKL$．

$\therefore$ M，A，K，L四点共圆．同理N，A，L，M四点共圆．

$\therefore$ A，K，L，M，N五点共圆．

9 设$\triangle ABC$的外心、内心和垂心分别为O, I, H，求证B, O, I, H, C五点共圆的充分必要条件是$\angle A=60^\circ$。



证 充分性. $\because \angle A=60^\circ$,

$\therefore \angle BHC=\angle FHE=360^\circ-\angle A-\angle AFH-\angle AEH=120^\circ$,

$\angle BIC=180^\circ-\angle IBC-\angle ICB=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A=120^\circ$,

$\angle BOC=2\angle A=120^\circ$.

$\therefore \angle BOC=\angle BIC=\angle BHC$. $\therefore B,O,I,H,C$五点共圆.

必要性. $\because B,O,I,H,C$五点共圆. $\therefore \angle BOC=\angle BIC$.

$\therefore 2\angle A=\angle BOC=\angle BIC=180^\circ-\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A$.

$\therefore \frac{3}{2}\angle A=90^\circ$. $\therefore \angle A=60^\circ$.

注1 易见，由B,O,I,C或B,O,H,C或B,I,H,C四点共圆均可推出$\angle A=60^\circ$.

注2 当$\triangle ABC$为钝角三角形时，垂心H在形外. 但这时有$\angle BHC=\angle A=60^\circ$. 所以这时结论仍然成立.