新理念

“十二五”高等学校专业教材建设工程

理工科泛函分析基础

LIGONGKE FANHAN FENXI JICHU

王贺元 主编

東北大學出版社
Northeastern University Press

新理念

"十二五"高等学校专业教材建设工程

理工科泛函分析基础

王贺元　主编

东北大学出版社
·沈　阳·

图书在版编目（CIP）数据

理工科泛函分析基础 / 王贺元主编．—沈阳：东北大学出版社，2015.8
（“十二五”高等学校专业教材建设工程）
ISBN 978-7-5517-1050-3

Ⅰ.①理…　Ⅱ.①王…　Ⅲ.①泛函分析　Ⅳ.①O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 197231 号

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110004
电话：024—83687331（市场部）　83680267（社务室）
传真：024—83680180（市场部）　83680265（社务室）
E-mail：neuph @ neupress-com
http：//www-neupress-com
印 刷 者：沈阳中科印刷有限责任公司
发 行 者：东北大学出版社
幅面尺寸：185mm × 260mm
印　　张：10.75
字　　数：255 千字
出版时间：2015 年 8 月第 1 版
印刷时间：2015 年 8 月第 1 次印刷
策划编辑：王兆元
责任编辑：石玉玲
责任校对：叶　子
封面设计：刘江旸
责任出版：唐敏智

ISBN 978-7-5517-1050-3　　　　定　　价：24.00 元

序　言

泛函分析是高等学校数学类本科相关专业与理工科研究生的一门主要课程，是现代数学中一个较新的重要分支. 泛函分析起源于经典数学、物理中的一些变分问题和边值问题，概括了经典数学分析、函数论中的某些重要概念、问题与成果，综合运用了分析的、代数的和几何的观点和方法. 泛函分析的概念和方法对现代纯数学与应用数学、理论物理及现代工程技术理论的许多分支，都已产生或正在产生重大的影响.

泛函分析分为线性泛函分析与非线性泛函分析两大部分，线性泛函分析主要内容包括度量（距离）空间、线性有界算子与希尔伯特空间的几何学等. 非线性泛函分析是在集合论的基础上建立一般分析学，即抽象空间上的数学分析，解决具有分析学结构的无穷维空间之间各种算子（映射）给出的方程的求解等相关问题.

本书是在多年教学实践的基础上写成的，全书共分 5 章. 第 1 章简明介绍实变函数的基础知识，为后面各章作铺垫；第 2 章介绍度量空间及其空间的可分性、完备性、列紧性和紧性等内容；第 3 章介绍线性赋范空间和内积空间，线性算子与线性泛函；第 4 章介绍有界线性算子的谱与紧算子理论及泛函分析基本定理等内容；第 5 章介绍非线性分析的初步知识，包括微分理论、不动点理论、动力系统、凸集与凸分析理论、极值理论、拓扑度理论、Sobolev 空间简介等内容.

由于泛函分析的概念比较抽象难懂，涉及的知识比较广泛而深刻，读者学习起来比较困难，因此本书尽可能做到由浅入深、循序渐进，用较浅显的语言、较详尽的方式阐述问题.

本书适合理工科研究生和数学专业本科生作为教材或教学参考书使用.

由于经验不足与学识所限，本书难免有疏漏之处，欢迎批评指正.

编　者

2015 年 3 月

目　　录

第 1 章 绪论与预备知识

1.1 泛函分析的产生

19 世纪以来，数学的发展进入了新的阶段，由于对欧几里得第五公设的研究，引出了非欧几何这门新的学科；对于代数方程求解的一般思考，最后建立并发展了群论；对数学分析的研究又建立了集合论. 这些新的理论都为用统一的观点把古典分析的基本概念和方法一般化准备了条件.

20 世纪初，瑞典数学家弗列特荷姆和法国数学家阿达玛发表的著作中，出现了把分析学一般化的萌芽. 随后，希尔伯特和海令哲开创了“希尔伯特空间”的研究. 到了 20 世纪 20 年代，在数学界已经逐渐形成了一般分析学，也就是泛函分析的基本概念.

分析学中许多新分支的形成，揭示出分析、代数、集合的许多概念和方法常常存在相似的地方. 比如，代数方程求根和微分方程求解都可以应用逐次逼近法，并且解的存在和唯一性条件也极其相似. 这种相似在积分方程论中表现得更为突出. 泛函分析的产生正是和这种情况有关，有些乍看起来很不相干的东西，都存在着类似的地方. 因此它启发人们从这些类似的内容中探寻一般的真正属于本质的东西.

非欧几何的确立拓广了人们对空间的认知，n 维空间几何的产生允许把多变函数用几何学的语言解释成多维空间的映射. 这样，就显示出了分析和几何之间的相似的地方，同时存在着把分析几何化的一种可能性. 这种可能性要求把几何概念进一步推广，以至最后把欧氏空间扩充成无穷维数的空间.

函数概念被赋予了更为一般的意义. 古典分析中的函数概念是指两个数集之间所建立的一种对应关系，现代数学的发展却是要求建立两个任意集合之间的某种对应关系.

这里先介绍一下算子的概念. 算子也叫算符，在数学上，把无限维空间到无限维空间的变换叫作算子. 算子可以在抽象形式下加以研究，被视为作用于一类函数空间上的算子.

研究无限维线性空间上的泛函数和算子理论，就产生了一门新的分析数学，叫作泛函分析. 即泛函分析是研究函数空间(抽象空间)的结构及其变换(算子)的科学. 在 20 世纪 30 年代，泛函分析就已经成为数学中一门独立的分支了.

1.2 泛函分析的特点和内容及应用

古典分析是以有限维空间上的非线性函数为研究对象，而泛函分析则研究无限维空间及其线性算子(泛函)的性质，它不但把古典分析的基本概念和方法一般化了，而且还把这些概念和方法几何化了. 比如，不同类型的函数可以看作“函数空间”的点或矢量，这样得到“抽象空间”这个一般的概念，它既包含了以前讨论过的几何对象，也包括了不同的函数空间. 抽象向量空间的引进可以把每个函数看作函数空间中的一个点，从而分析中的许多问题可以用几何的语言来描述，用几何的方法来研究. 同样的，抽象代数学可以将原来适用于数的代数运算推广到属性更一般的、具有代数结构的对象上去. 泛函分析研究的正是这种具有某种代数结构，同时还有拓扑几何结构的一般对象以及这些对象间的映射，例如线性空间、Hilbert 空间、Banach 空间以及这些空间之间的有界线性算子.

泛函分析对于研究现代物理学是一个有力的工具. n 维空间可以用来描述具有 n 个自由度的力学系统的运动，实际上需要有新的数学工具来描述具有无穷多自由度的力学系统. 比如梁的振动问题就是无穷多自由度力学系统的例子. 一般来说，从质点力学过渡到连续介质力学，就要由有穷自由度系统过渡到无穷自由度系统，现代物理学中的量子场理论就属于无穷自由度系统.

正如研究有穷自由度系统要求 n 维空间的几何学和微积分学作为工具一样，研究无穷自由度的系统需要无穷维空间的几何学和分析学，这正是泛函分析的基本内容. 因此，泛函分析也可以通俗地叫作无穷维空间的几何学和微积分学. 古典分析中的基本方法，也就是用线性的对象去逼近非线性的对象，完全可以运用到泛函分析这门学科中.

泛函分析是分析数学中最“年轻”的分支，它是古典分析观点的推广，它综合函数论、几何和代数的观点研究无穷维向量空间上的函数、算子和极限理论. 它在 20 世纪 40—50 代就已经成为一门理论完备、内容丰富的数学学科了. 本书涵盖实分析基础、度量空间、线性赋范空间与内积空间、线性泛函与线性算子、不动点定理与最佳逼近、线性算子谱论初步和非线性分析初步等内容.

半个多世纪来，泛函分析一方面以其他众多学科所提供的素材来提取自己研究的对象和某些研究手段，形成了自己的许多重要分支，例如算子谱理论、巴拿赫代数、拓扑线性空间理论、广义函数论等；另一方面，它也强有力地推动着其他不少分析学科的发展. 它在微分方程、概率论、函数论、连续介质力学、量子物理、计算数学、控制论、最优化理论等学科中都有重要的应用，还是建立群上调和分析理论的基本工具，也是研究无限个自由度物理系统的重要而自然的工具之一. 如今，它的观点和方法已经渗入到不少工程技术性的学科之中，已成为近代分析的基础之一，它还渗透到数学内部的各个分支中去，起着重要的作用.

1.3 可列集与不可列集

集合论是数学的经典内容，在数学的各个分支均有介绍，可列集与不可列集是集合论中的两个基本概念，为阐明这两个概念，先介绍映射的概念.

1.3.1 映射

映射是函数概念的推广，众所周知，函数可以看成是两个数集 A 与 B 之间按照一定法则的对应关系，将其移植到一般的集合上，就得到了映射的定义.

定义 1-3-1　设 A 与 B 是两个非空集合. 如果按照一定的法则 f，对于 A 中的每个元 x，都存在 B 中的一个确定的元 y 与 x 相对应，那么我们称 f 为定义在 A 上取值于 B 中的一映射，记作 $y=f(x)$. y 称为 x 在映射 f 下的象，对于固定的 y，A 中适合关系式 $y=f(x)$ 的 x 的全体称为 y 的原象. 集 A 称为映射 f 的定义域，$f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$称为映射 f 的值域，一般，$f(A)\subset B$.

为方便起见，今后常把从集 A 到 $f(A)\subset B$ 的映射写成

$$f: A\to B \tag{1-1}$$

特别，若 B 是一个数集，此时映射 f 称为泛函；若 A 与 B 都是数集，f 就是通常的函数.

映射是现代数学中一个非常重要的概念，许多表面上互不相同的概念都可以用映射的概念统一起来进行研究，泛函分析中算子理论研究的算子就是一个范例.

例 1-3-1　设 $D[0,1]$表示区间$[0,1]$上所有一阶连续可导函数 $x(t)$ 构成的集合，那么求导运算$\frac{d}{dt}x(t)$就定义了一个映射 f

$$f: D[0,1]\to C[0,1] \tag{1-2}$$

例 1-3-2　设 $x(t)\in C[0,1]$，那么定积分 $y=\int_0^1 x(t)\,\mathrm{d}t$ 定义了一个映射 f_1

$$f_1: C[0,1]\to R \tag{1-3}$$

实际上，f_1是定义在 $C[0,1]$上的一个泛函.

例 1-3-3　设$\mathbb{R}^n$为 n 维欧几里得空间，$K=(k_{ij})$是一个 n 阶方阵，$\mathbb{R}^n$中的点 $x=(x_1, x_2,\cdots,x_n)$，那么线性变换

$$y=Kx=\left(\sum_{j=1}^{n}k_{1j}x_j,\ \sum_{j=1}^{n}k_{2j}x_j,\ \cdots,\ \sum_{j=1}^{n}k_{nj}x_j\right) \tag{1-4}$$

定义了一个映射

$$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$$

设有映射 $f: A\to B$. 若 $f(A)=B$，即对于 B 中的每个元 y，都有 A 中的元 x(一个或几个)，使 $f(x)=y$，则称 f 是一个满射；若对于 $f(A)$中的每个元 y，都存在 A 中唯一的元 x，使 $f(x)=y$，或者等价地对于 A 中的任意两个不同元 x_1 与 x_2，都有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f

是一个内射或一一映射；若 f 既是满射又是内射，也就是说，对于 B 中的每个元 y，都存在 A 中的唯一的元 x，使 $f(x)=y$，则称 f 是一个双射.

设映射 $f: A\to B$ 是一一映射的，则对于 $f(A)$ 中的每个元 y，都存在 A 中的唯一的元 x 与之相对应，这样我们便得到一个定义在 $f(A)$ 上取值于 A 中的映射，称它为 f 的逆映射，记作 f^{-1}：$f(A)\to A$. 在这种情况下，我们说 f 是从 A 到 $f(A)$ 上的可逆映射.

显然，若 $f: A\to B$ 是一个双射，则 f 是 A 到 B 上的可逆映射.

设有映射 $f: A\to B$，且 $B_0\subset B$，则称 A 中的那些象在 B_0 中的元的全体为 B_0 在映射 f 下的原象，记作

$$f^{-1}(B_0)=\{x\mid x\in A,\ \text{且}\ f(x)\in B_0\} \tag{1-5}$$

一般情况下，$f^{-1}(B_0)$ 中所有元的象是 $B_0\cap f(A)$，而不是 B_0，即

$$f(f^{-1}(B_0))\subset B_0 \tag{1-6}$$

类似地，若 $A_0\subset A$，则有

$$f^{-1}(f(A_0))\supset A_0 \tag{1-7}$$

1.3.2 可列集与不可列集，集合的势

在抽象的研究集合的时候，集合中所含元素的多少是一个重要的概念. 例如，分别由 20 名同学和 20 只凳子所构成的两个集合，虽然它们所含元素的性质不同，但所含元素的多少却是相同的. 从这个意义上说，它们是两个等同的集合，即都是由 20 个元素组成的集合.

怎样判断一个集合所含元素的多少呢？对有限集而言，它就是集合中元素的个数，要求得任一非空有限集元素的个数，只要将它的元素数一数即可. 所谓数一数，实际上就是给集合中的元素逐个编号，也就是建立该集合与自然数集 N 的某个有限子集 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 之间的一一对应关系.

如何知道两个集合 A 与 B 所含元素的个数的多少呢？例如，设 A，B 分别表示由某班学生的全体和某教室里座位的全体所构成的两个集合，只要让一个学生坐到一个座位上去，立即就可以知道 A 与 B 所含元素谁多谁少. 如果座位与学生配对无余，那么 A 与 B 所含的元素一样多. 这种配对的方法，实际上也是建立 A，B 间的一一对应关系.

现在，就利用"建立一一对应关系"的方法来研究无限集所含元素的多少，比较两个不同的无限集所含的元素的多少.

定义 1-3-2 设 A，B 是两个集，如果存在一个从 A 到 B 的双射 f，则称 A 与 B 是一一对应的，或者说，A 与 B 是对等的，记作 $A\sim B$.

把凡是对等的集称为具有相同的势(或基数)的集. 因此，集合的势是对等的集合所具有的共同属性，一个集合 A 的势记为 $\overline{\overline{A}}$.

对有限集而言，两个集合具有相同的势就表示它们所含元素个数相等. 因此，"具有相同的势"就是有限集中"元素个数相等"的推广，而集合的"势"就是有限集中元素"个数"概念的推广，它表示了集合所含元素的多少.

例 1-3-4　设 A 表示正整数集，B 表示负整数集，则$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$.

事实上，作映射 f，使 A 中的元 n 对应 B 中的元 $-n$ ($n=1, 2, \cdots$)．显然，$f: A\to B$ 就是一个双射，故$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$.

例 1-3-5　设 $A=\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$，$B=\{2, 4, 6, \cdots, 2n, \cdots\}$，则$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$．实际上，只要作一映射 f，使 A 中的元 n 与 B 中的元 $2n$ 相对应即可.

例 1-3-6　设 $A=[0, 1]$，$B=[a, b]$，则 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$．事实上，线性函数

$$f(x)=a+(b-a)x$$

就是所求的双射.

后面的两个例子揭示了无限集的一个非凡的性质：一个集合可以与它的一个真子集具有相同的势．实际上，还可以证明：任何一个无限集必能与它的一个真子集同势，反之也成立．这正是无限集的本质属性，是有限集与无限集的本质区别.

定义 1-3-3　凡与自然数集 N 对等的集合称为可列集(可数集)．换句话说，可列集中的所有元素可以用自然数编号，排成一个无穷序列

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

可列集的势用 $\aleph_0$(阿列夫零)表示．例 1-3-4 与例 1-3-5 都是可列集．显然，任何无限集合都至少包含一个可数子集.

定理 1-3-1　有理数集是可列集.

证　设 x 为有理数，并且 $x\neq 0$，则 $x=\dfrac{p}{q}$，$p\neq 0$，$q>0$．称 $n=|p|+q$ 为 x 的模，并规定当 $n=0$ 时，模 $n=1$．显然，模 $n=2$ 的有理数有两个：-1，1；模 $n=3$ 的有理数有 4 个：-2，$-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2}$，2．一般，模为有限的有理数只有有限个．将一切有理数按模的大小分组，模相同的分在同一组，然后再将各组按模由小到大排列，并对各有理数逐个编号．这样，每个有理数都有一个确定的号码，因而有理数集与自然数集之间就建立了一一对应关系，所以有理数集是可列集.

可列集有如下几个简单而常用的性质.

定理 1-3-2　可列集合的任何无限子集必为可列集合，从而可列集的子集要么是有限集，要么是可列集.

证　设 A 是可列集，则 A 可以表示为一个无穷序列

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

设 B 为 A 的一个子集，若 B 不是有限集，那么 B 是上面的序列的一个子列

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots a_{n_k}, \cdots$$

只要使 B 中的元(即子列中的元)a_{n_k}与 A 中的元相对应，立即可知 B 与 A 对等，因而 B 是可列集.

例 1-3-7　直线上一切互不相交的开区间或者构成有限集，或者构成可列集.

事实上，因为每个开区间(a, b)内至少包含一个有理点，因此，只要使开区间与其中的某一有理点相对应，那么，一切互不相交的开区间就与有理数集的一个子集一一对应，由定理 1-3-2 可知结论成立.

定理 1-3-3 可列个可列集的并是可列集.

证 设有可列个可列集 $A_n=(n,1,2,\cdots)$，将每个可列集的元素排列，设 $A_i=\{a_1^i,a_2^i,\cdots\}$，令 $S=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，可以将 S 中的所有元素排列成如下一个无穷序列

$$A_i=\{a_1^{(i)},a_2^i,\cdots\}$$

因为不同的集合 A_i 中可能有相同的元素，它们在并集 S 中是同一元素，所以应在上面的序列中删去这些重复元素，剩下的重新编号，显然仍是可列集.

定理 1-3-4 区间 $[0,1]$ 中的点是不可列的.

证 用反证法. 假定 $[0,1]$ 中的点是可列的，那么它们必能排成一个无穷序列

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$$

将区间 $[0,1]$ 三等分，则 $\left[0,\dfrac{1}{3}\right]$ 与 $\left[\dfrac{2}{3},1\right]$ 中至少有一个不含 a_1，记作 I_1；将闭区间 I_1 三等分，则在左右两个闭区间中至少有一个不含 a_2，记作 I_2；再将 I_2 三等分，又可得到一个不含 a_3 的闭区间 I_3；如此继续下去，便可得到一个闭区间列 $\{I_n\}$，它满足

(1) 是渐缩的，即 $I_1\supset I_2\supset\cdots I_3\supset\cdots I_n\cdots$；

(2) 区间 I_n 的长度 $=\dfrac{1}{3^n}\to 0(n\to\infty)$.

并且 $a_n\in I_n(n=1,2,\cdots)$. 由区间套定理，必存在 $\xi\subset\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}I_n$，但由于 $a_n\in I_n$，故 $\xi\neq a_n(n=1,2,\cdots)$. 这就是说，在 $[0,1]$ 中存在着点 ξ，它不包含在上面的序列 $\{a_n\}$ 中，这与开始的假设相矛盾，因此 $[0,1]$ 是不可列集.

推论 1-3-1 $[0,1]$ 中的无理数是不可列的.

可以证明，开区间 $(0,1)$，(a,b) 及实数集 $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ 都是不可列集，并且与闭区间 $[0,1]$ 有相同的势.

凡与区间 $[0,1]$ 对等的集的势称为连续统的势，记作 $\aleph$（读作阿列夫）. 因此直线上任一区间的势都是 $\aleph$.

两个不同的集合的势也能比较大小. 设 A 与 B 是两个集合，若 A 与 B 不对等，但 A 与 B 的一个子集 B_0 对等，则称集 A 的势小于集 B 的势 $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$.

如同有限集中没有含元素“个数最多”的有限集一样，无限集中也没有“势最大”的无限集. 事实上，设 A 为有限集，$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$，则 A 的所有子集为

$$\varnothing,\{a_1\},\cdots,\{a_n\},\{a_1,a_2\},\cdots,\{a_{n-1},a_n\},\cdots,\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$$

它共有 $C_n^0+C_n^1+\cdots C_n^n=2^n$ 个. 显然 $2^n>n$，即若以 A 的所有子集为元素构成一个新的集（常称为集类），则它的元素个数比集 A 的元素个数多. 对于无限集 A，设 $\overline{\overline{A}}=\mu$，以 A 的所有子集为元素构成的集类记作 $\mathscr{A}$，且用 2^μ 表示 $\mathscr{A}$ 的势，那么可以证明 $2^\mu>\mu$，因此有 $2^{\aleph_0}>\aleph_0$，$2^{\aleph}>\aleph$ 等.

1.4 直线上的点集与连续函数

本节先讨论直线上的点集的基本性质，然后在此基础上研究连续函数的性质、函数的一致连续性以及函数列的一致收敛性.

1.4.1 开集、闭集及其性质

定义 1-4-1 设 E 是直线 R 上的任一点集，a 是直线上的任意一点，我们把直线上包含 a 的任一开区间 (α, β) 称为点 a 的邻域. 设 a 是 E 中的点，如果存在着 a 的一个邻域 (α, β) 整个含于 E 内，则称 a 是 E 的内点. 如果点集 E 中的每一点都是它的内点，则称 E 是一个开集.

显然，直线上的任何开区间都是开集. 但是，开集比开区间的概念要广泛得多. 例如，集合 $(1, 2) \cup (3, 4)$ 也是开集，而且，今后还会碰到更复杂的开集.

定理 1-4-1 开集具有下列基本性质.

(1) 空集 $\varnothing$ 与直线 R 本身都是开集；

(2) 任意多个开集的并是开集；

(3) 有限多个开集的交是开集.

证 (1) 由开集的定义易见直线本身是开集. 又由于开集是指没有一点不是内点的集，而空集 $\varnothing$ 中不含任何点，因此它也是开集.

(2) 设 $\{G_\alpha \mid \alpha \in I\}$ 是直线上的任一开集族，令 $G = \bigcup\limits_{\alpha \in I} G_\alpha$. 若 $G = \varnothing$，则由(1)知 G 是开集；若 $G \neq \varnothing$，任取 $x \in G$，则必存在 $\alpha_0 \in I$，使 $x \in G_{\alpha_0}$. 由于 G_{α_0} 是开集，故 x 是 G_{α_0} 的内点，因此存在 x 的一个邻域 (α, β)，它整个含于 G_{α_0} 内，从而得知 $(\alpha, \beta) \subset G_{\alpha_0} \subset G$，$x$ 也是 G 的内点，所以 G 是开集.

(3) 设 $G_1, G_2, G_3, \cdots, G_n$ 是 n 个开集，令 $G = \bigcap\limits_{k=1}^{n} G_k$，由(2)中已见，可以假定 $G = \varnothing$. 任取 $x \in G$，则 $x \in G_k (k=1, 2, \cdots, n)$. 于是，对于每个 k，都存在 x 的一个邻域 (α_k, β_k)，使 $x \in (\alpha_k, \beta_k) \subset G_k (k=1, 2, \cdots, n)$. 令

$$\alpha = \max_{1<k<n} \{\alpha_i\}, \ \beta = \min_{1<k<n} \{\beta_k\}$$

显然 $\alpha \neq \beta$，从而 $(\alpha, \beta) \neq \varnothing$，表明 x 也是 G 的内点，故 G 是开集.

注意，无限个开集的交不一定是开集. 例如，设 $G_k = \left(-\dfrac{1}{k}, \dfrac{1}{k}\right) (k=1, 2, \cdots, n)$，则

$$G = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k = \{0\}$$

显然不是开集.

定义 1-4-2 设 E 是直线 R 上的任一点集，是直线 a 上的任意一点. 如果 a 的任一邻域 (α, β) 中含有 E 中不同于 a 的点，则称 a 是 E 的聚点(或极限点).

显然，a 为 E 的聚点必须且只需 a 的任一邻域(α, β)中含有 E 中的无限多个点. 直观上，就好像有无限多个点聚集在 a 的附近. 因此，有限点集没有聚点.

一个集合的聚点不一定属于这个集合.

例 1-4-1 区间$(0, 1)$内的每个点都是它的聚点，而且 0 与 1 也是它的聚点，但 0 与 1 不属于$(0, 1)$.

例 1-4-2 设 $E=\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$, 则 0 是 E 的聚点，但它不属于 E.

定理 1-4-2 点 a 是集 E 的聚点的充要条件是存在 E 中的点列$\{a_n\}$ $(a_n \neq a)$，使 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

证 必要性：设 α 是集 E 的聚点，对于每个正整数 n 作 α 的邻域$\left(\alpha-\frac{1}{n}, \alpha+\frac{1}{n}\right)$，从而得一点列$\{a_n\}$满足$|a_n - a| < \frac{1}{n}$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_0$.

充分性：设(α, β)为 a 的一个邻域，取 ε 大于 0，使$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset (\alpha, \beta)$. 存在自然数 N，当 n 大于 N 时，$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset (\alpha, \beta)$，因此 a 为 E 的聚点.

定义 1-4-3 设 E 为直线上的点集，由 E 的所有极限点构成的集称为 E 的导集，记作 E'. 称集 $E \cup E'$为 E 的闭包，记作 $\bar{E}$. 若集 E 的余集 $\ell E = R \backslash E$ 为开集，则称 E 为闭集.

例 1-4-3 设 E 为直线上的有理数集，则 $E' = \bar{E} = R$.

显然，任何闭区间都是闭集，但是闭集比闭区间的概念要广泛得多. 下面先介绍几个判断集合是闭集的充要条件，然后再研究闭集的基本性质.

定理 1-4-3 非空集 E 是闭集的充要条件是 $E' \subset E$.

证 必要性：用反证法. 设 $x \in E'$，若 $x \notin E$，则 $x \in \ell E$. 由于 E 是闭集，因此 ℓE 是开集，故必存在 x 的邻域$(\alpha, \beta) \subset \ell E$. 就是说，存在着 x 的邻域(α, β)，它不包含在 E 中，这与 x 为 E 的极限点相矛盾，因此，$x \in E$.

充分性：设 $E' \subset E$，则 $\ell E \subset \ell E'$. 下面证明 ℓE 是开集. 事实上，设 $x \in \ell E$，则 $x \in \ell E'$，从而 $x \notin E'$. 这就是说，存在 x 的不含于 E 中的邻域(α, β)，即 $x \in (\alpha, \beta) \subset \ell E$，因此 x 是 ℓE 的内点，ℓE 是开集，E 是闭集.

推论 1-4-1 若 $E' = \varnothing$，则 E 是闭集.

由此，单点集、有限点集都是闭集.

推论 1-4-2 非空点集 E 是闭集的充要条件是对于 E 中的每个收敛点列$\{x_n\}$，若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$，则 $x \in E$.

定理 1-4-4 集合 E 为闭集的充要条件是 $E = \bar{E}$.

证 必要性：设 E 为闭集，由定理 1-4-3，$E' = E$. 故 $\bar{E} = E \cup E' = E$.

充分性：设 $E = \bar{E}$，则由 $E' \subset \bar{E} = E$ 及定理 1-4-3 知 E 是闭集.

定理 1-4-5 闭集具有下列基本性质.

(1) 空集 $\varnothing$ 与全直线 R 是闭集；

(2) 任意多个闭集的交是闭集；

(3) 有限多个闭集的并是闭集.

证　由闭集的定义(1)是显然的. 利用笛摩根对偶原理及定理 1-4-1 可以证明(2)(3)成立.

应当注意，无限多个闭集的并不一定是闭集. 例如，区间$(0, 1)$可以看成由其中各点分别组成的所有单点集的并，而单点集是闭集，但$(0, 1)$却是开集.

1.4.2　开集的构造

众所周知，开区间是开集，任意多个开区间的并也是开集. 那么，任何一个开集是否都能表示成一些开区间的并呢?

定义 1-4-4　设 G 是直线 R 上的一个有界开集，如果开区间$(\alpha, \beta)\subset G$ 满足条件

(1) $(\alpha, \beta)\in G$;

(2) $\alpha \notin G, \beta \notin G$.

则称(α, β)为开集 G 的一个构成区间.

引理 1-4-1　设 G 为直线 R 上的一个有界开集，a 为 G 中的任意一点，那么必有 G 的一个构成区间(α, β)，使 $a\in(\alpha, \beta)$.

证　因 $a\in G$，则存在 a 的一个邻域$\{x, y\}$，使$(x, y)\subset G$.

令 $A_a=\{(x, y) \mid (x, y)$为 a 的邻域，$(x, y)\subset G\}$，则

$$\alpha=\inf_{(x, y)\in A_a}\{x\},\ \beta=\sup_{(x, y)\in A_a}\{y\}$$

那么(α, β)也是 a 的一个邻域，并且是 G 的一个构成区间. 事实上，$(\alpha, \beta)\subset G$. 这是因为设 $z\in(\alpha, \beta)$，若 $z\leqslant a$，则由 a 的定义，必存在$(x, y)\subset A_a$，使 $\alpha<x<z$，故 $z\in(x, y)\subset G$. 若 $z>a$，同样可以证明 $z\in G$. 再证 $\alpha\notin G$, $\beta\notin G$. 否则，若 $\alpha\in G$，则存在 $\delta>0$，使$(\alpha-\delta, \beta+\delta)\subset G$，从而 $\alpha\in(\alpha-\delta, \beta)=(\alpha-\delta, \alpha+\delta)\cup(\alpha, \beta)\subset G$，故$(\alpha-\delta, \beta)\in A_a$，这与 α 的定义相矛盾，因此 $\alpha\notin G$. 类似可证 $\beta\notin G$.

定理 1-4-6(开集的构造定理)　设 G 为直线上的任一非空有界开集，则 G 可以表示为至多可列个互不相交的构成区间之并，即

$$G=\bigcup_{k\in I}(\alpha_k, \beta_k)$$

其中 I 为有限的或可数的指标集.

证　由引理 1-4-1，对于每个 $x\in G$，都存在一个 G 的构成区间(a_x, b_x)，使 $x\in(a_x, b_x)$，故 $G=\bigcup_{x\in G}(\alpha_x, \beta_x)$. 又因为 G 中不同的点 x_1 与 x_2所对应的构成区间要么相互重叠，要么互不相交. 实际上，如果$(\alpha_{x1}, \beta_{x1})$与$(\alpha_{x2}, \beta_{x2})$不重叠，但$(\alpha_{x_1}, \beta_{x_1})\cap(\alpha_{x_2}, \beta_{x_2})\neq\varnothing$，那么这两个构成区间的端点总有一个含于另一个构成区间中. 例如，不妨假设 $\alpha_{x_1}\in(\alpha_{x_1}, \beta_{x_1})$，于是必有 $\alpha_{x_1}\in G$，这与$(\alpha_{x_1}, \beta_{x_1})$构成区间矛盾. 再由例 1-3-7 可见，这种构成区间的全体至多是可数多个，从而定理得证.

由于任何闭集都可以看成是开集关于某基本集 $X=[a, b]$的余集，因此也可以得到闭集的构造定理，这里从略.

下面介绍一个以集合论创始人康托的名字命名的集合——康托三分集，因为它能揭示许多深刻而有趣的性质，所以常被作为例子来说明很多问题. 将区间$[0, 1]$三等分，挖去

中间的开区间$\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$. 将剩下的两个闭区间$\left[0,\frac{1}{3}\right]$与$\left[\frac{2}{3},1\right]$再分别三等分，挖去各自中间的开区间$\left[\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right]$与$\left[\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right]$. 再将剩下的四个闭区间分别三等分，再挖去各自中间的开区间，……，这样继续不断地进行下去，由区间$[0,1]$中剩下的点所构成的集合成为康托三分集，简称康托集，记作 P_0.

康托集具有下列基本性质

（1）康托集 P_0是闭集.

事实上，挖去的集合为

$$G_0=\underbrace{\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)}_{\text{第一次挖去}}\cup\underbrace{\left(\frac{1}{3^2},\frac{2}{3^2}\right)\cup\left(\frac{7}{3^2},\frac{8}{3^2}\right)}_{\text{第二次挖去}}\cup\underbrace{\left(\frac{1}{3^3},\frac{2}{3^3}\right)\cup\left(\frac{7}{3^3},\frac{8}{3^3}\right)\cup\left(\frac{19}{3^3},\frac{20}{3^3}\right)\cup\left(\frac{25}{3^3},\frac{26}{3^3}\right)}_{\text{第三次挖去}}\cup\cdots$$

它显然是一开集，因此，康托集 $P_0=[0,1]\backslash G_0$是闭集.

（2）P_0是完全集，即 $P'_0=P_0$.

事实上，因 P_0是闭集，故 $P'_0\subset P_0$，因此只要证明 $P_0\subset P'_0$即可. 若此包含关系不成立，则存在一点 $x_0\in P_0$，但 $x_0\overline{\in} P'_0$. 因为 0 与 1 都是 P_0的极限点，故 x_0不等于 0 或 1. 既然 $x_0\overline{\in} P'_0$，那么必有 x_0的一个邻域(α_0,β_0)，它不含 P_0中的点，因而(α_0,x_0)与(x_0,β_0)都含于 G_0中. 但由于 $x_0\overline{\in} G_0$以及 G_0是开集，故必有 G_0的两个构成区间(α,x_0)与(x_0,β)分别包含于(α_0,x_0)与(x_0,β_0)，于是 x_0是 G_0的构成区间(α,x_0)与(x_0,β)的公共端点；而根据 G_0的构造，它的任何两个构成区间都没有公共端点，两者产生矛盾，因此必有 $P_0\subset P'_0$，从而 P_0是完全集.

（3）P_0是不可列集.

事实上，假定 P_0是可数的，它可以表示成序列

$$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$$

那么闭区间$\left[0,\frac{1}{3}\right]$与$\left[\frac{2}{3},1\right]$中总有一个不含 x_1，记作 I_1. 将 I_1三等分，则其左右两个闭区间中总有一个不含 x_2，记作 I_2. 再将 I_2三等分，又可得到不含 x_3的闭区间 I_3，…，如此继续下去，可得一闭区间列$\{I_n\}$

$$I_1\supset I_2\supset\cdots I_n\supset\cdots$$

$$x_n\overline{\in} I_n\quad(n=1,2,\cdots)$$

并且 I_n的长度$\frac{1}{3^n}\to 0\ (n\to\infty)$. 由闭区间套定理，必有点 $\xi\in I_n\ (n=1,2,\cdots)$，并且 ξ 是 I_n的左右两个端点分别构成的序列的共同极限，故 $\xi\in P_0'=P_0$. 但因 $x_n\overline{\in} I_n\ (n=1,2,\cdots)$，所以 $\xi\neq x_n\ (n=1,2,\cdots)$，这与 P_0是可列集的假设相矛盾.

实际上，还能进一步证明 $\overline{\overline{P}}_0=\aleph$.

这个事实在直观上是难以想象的. 因为按照康托集的做法，人们常常误认为它仅仅是由剩下的那些分点所构成的一个可列集. 但事实并非如此，如上所述，实际上已经证明了康托集中的点与区间$[0,1]$中的点“一样多”.