“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材
普通高等院校计算机类专业规划教材·精品系列

离散数学

LISAN SHUXUE

（第二版）

刘任任　王　婷　周经野　主编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材
普通高等院校计算机类专业规划教材·精品系列

离　散　数　学

（第二版）

刘任任　王　婷　周经野　主编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

本书是“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材。

本书是编者根据多年讲授离散数学课程的教学实践，并参考国内外同类教材编写而成的。为适应计算机科学发展的需要，本书增加了新的内容，其目的在于通过讲授离散数学中的基本概念、基本定理和运算及其在计算机科学与技术学科中的应用，培养学生的数学抽象能力、用数学语言描述问题的能力、逻辑思维能力以及数学论证能力。本书力求概念阐述严谨，证明推演详尽，较难理解的概念用实例说明。全书分四篇共24章，内容包括：集合论与数理逻辑、图论与组合数学、代数结构与初等数论、形式语言与自动机理论基础。本书有配套教材《离散数学题解与分析（第二版）》（刘任任主编，中国铁道出版社出版，2015年）。

本书适合作为高等院校计算机及相关专业的教材，也可供从事离散结构领域研究工作的人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/刘任任，王婷，周经野主编. —2版. —北京：中国铁道出版社，2015.8

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

普通高等院校计算机类专业规划教材·精品系列

ISBN 978-7-113-20806-6

Ⅰ.①离… Ⅱ.①刘…②王…③周… Ⅲ.①离散数学-高等学校-教材Ⅳ.①O158

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第183360号

书　　名：离散数学（第二版）

作　　者：刘任任　王　婷　周经野　主编

策　　划：周海燕　　　读者热线：400-668-0820

责任编辑：周海燕　徐盼欣

封面设计：穆　丽

封面制作：白　雪

责任校对：汤淑梅

责任印制：李　佳

出版发行：中国铁道出版社（100054，北京市西城区右安门西街8号）

网　　址：http://www.51eds.com

印　　刷：北京华正印刷有限公司

版　　次：2009年12月第1版　2015年8月第2版　2015年8月第1次印刷

开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16　印张：19　字数：495千

书　　号：ISBN 978-7-113-20806-6

定　　价：38.00元

前言（第二版）

离散数学是计算机科学与技术学科的基础，它以离散量为研究对象，充分描述了计算机科学与技术学科的离散性特点。

离散数学是随着计算机科学与技术学科的发展而逐步建立的，尽管它的主要内容在计算机出现之前就已散见于数学的各个分支中。它形成于20世纪70年代初，因此，国外也有人称之为“计算机数学”，或称其为“离散结构”。

离散数学包括的内容主要有集合论、图论、数理逻辑、代数结构，并且其内容一直随着计算机科学与技术学科的发展而不断地扩充和完善。作为计算机专业的核心课程，它为后续课程提供了必要的数学基础。这些后续课程主要有：数据结构、编译原理、算法分析、计算机密码学、人工智能和可计算性理论等。

本书是在编者多年讲授离散数学课程的基础上编写而成的，其目的在于通过讲授离散数学中的基本概念、基本定理和运算及其在计算机科学与技术学科中的应用，培养学生的数学抽象能力、用数学语言描述问题的能力、逻辑思维能力以及数学论证能力。因此，本书力求概念阐述严谨，证明推演详尽，较难理解的概念用实例说明。

本书是“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材。本书第二版在内容和结构上对第一版进行了修改和补充，增加了形式语言与自动机理论部分。全书共分四篇：第一篇是集合论与数理逻辑。主要介绍集合、关系、映射、可数集与不可数集、命题逻辑与一阶逻辑。集合论是全书的基础知识和基本工具，命题逻辑与一阶逻辑则是数理逻辑中与计算机科学与技术学科关系较密切的基本内容。第二篇是图论与组合数学。主要介绍图与子图、树、图的连通性、*E*图与*H*图、匹配与点独立集、图的着色、平面图、有向图、网络最大流、排列和组合的一般计数方法、容斥原理、递推关系与生成函数。由于图为任何一个包含二元关系的系统提供了一种离散数学模型，因此，应用图论来解决计算机科学与技术学科相关领域中的问题已显示出极大的优越性。此外，图论对于锻炼学生的抽象思维能力，提高运用数学工具描述并解决实际问题的能力也大有益处。本篇还介绍了组合数学中关于存在性、计数、构造、分类，以及最优化等基本知识，目的在于向读者介绍组合分析这一强有力的数学工具。第三篇是代数结构与初等数论。主要内容有整数、群、环与域、格与布尔代数。第四篇是形式语言与自动机理论基础，主要介绍计算模型基础理论中形式语言与有限自动机理论的一些基本知识。

本书有配套教材《离散数学题解与分析（第二版）》（刘任任主编，中国铁道出版社出版，2015年），对书中习题进行了较详细的分析与解答，以帮助读者加深对基本概念、基本定理以及运算规律的理解。

本书适合作为高等院校计算机及相关专业的教材，书中加 * 的部分为选学内容，教师可以按授课对象的实际情况和专业教育的要求进行取舍，决定讲授内容。本书也可供从事离散结构领域研究工作的人员参考。

本书的编写得到了教育部第一类特色建设专业（计算机科学与技术）项目、“十二五”普通高等教育国家级规划教材建设项目的资助。同时，中国计算机学会计算机教育委员会副主任蒋宗礼教授对本书提出了很多宝贵的意见和建议，在此表示衷心的感谢。

本书由刘任任、王婷、周经野担任主编。其中，本书的第一篇和第三篇由刘任任编写，第二篇由王婷编写，第四篇由周经野编写，全书由刘任任和王婷统稿。张陵山、肖芬、曹春红、邹娟、谢慧萍等对教材的编写提出了许多宝贵的意见和建议，在此表示感谢。由于编者的水平有限，书中难免存在疏漏和不足之处，恳请读者批评指正。

最后，我们引用计算机科学巨匠、图灵奖获得者 D. E. Kunth 的一段话来说明数学，特别是离散数学在计算机科学中的重要地位：

“除了无穷维 Hibert 空间不可能用得上以外，其他数学理论都可能在计算机科学中得到应用。概括地说：在计算机科学的研究领域中，凡一问题要求形式化、精确化表示，最可能用到的数学理论是数理逻辑，某些部分可能用到代数，甚至拓扑学；凡一问题要求表示出算法执行过程中各部分的逻辑结构或关系，最可能用到的数学理论是图论和数理逻辑，某些部分可能用到代数；凡一问题要求给出量的测定，最可能用到的数学理论是组合数学、数论和概率论等；凡一问题要求得出最优方案，最可能用到的数学理论是运筹学、数论，甚至将来有可能用到数学分析。”

编　者

2015 年 7 月

CONTENTS

目录

第一篇　集合论与数理逻辑

第二篇　图论与组合数学

第四篇 形式语言与自动机理论基础

第一篇　集合论与数理逻辑
(Set theory & Mathematical logic)

集合论是现代数学的基础，它作为一个独立的数学分支诞生于 19 世纪.当时，由于科学和技术的发展，极大地推动了微积分、抽象代数、几何学等领域的理论与应用研究.就整个经典数学而言，迫切需要建立一个能够统括各个数学分支，并能建树其上的理论基础.正是在数学发展的这样一个历史背景下，康托尔（Georg Cantor）系统地总结了长期以来对数学的认识与实践，创立了集合论.

集合论的创立，使数学研究对象从有限推进到无限，并为整个经典数学的各个分支提供了一个共同的理论基础.目前，集合论的概念几乎已渗透到现代数学的各个领域，并且在计算机科学、经济学、语言学和心理学等学科中有着重要的应用.

数理逻辑是用数学方法来研究推理过程的数学分支，它与计算机科学、人工智能、语言学等有着密切的关系.

数理逻辑的内容很丰富，除了最基础的逻辑演算外，还包括证明论、递归论、模型论和公理集合论. 证明论主要研究数学理论系统的相容性（即不矛盾性、协调性）.递归论是关于能行可计算性的理论. 自从发明电子计算机后，人们需要在理论上弄清楚计算机能计算哪些函数，因此，递归论已成为理论计算机科学的重要内容. 模型论主要为各种数学理论系统建立模型，并研究各模型之间、模型与数学系统之间的关系等. 公理集合论则是在消除已知集合论悖论的情况下用公理方法把有关集合的理论发展下去.

本篇主要介绍集合论中有关集合、关系、映射、可数集与不可数集，以及数理逻辑中最基础的逻辑演算部分，主要包括命题逻辑和一阶逻辑.

第1章 集合(set)

众所周知,任何一个理论系统,都要包含一些不加以定义而直接引入的基本概念. 例如,欧几里得几何学系统中的“点”和“直线”,而“三角形”“圆”等几何概念都可以通过“点”和“直线”来定义. 在集合论中,集合就是这样一个唯一不精确定义而直接引用的基本概念. 集合论是现代数学中最重要的基础之一.

本章主要介绍集合的概念及其表示、集合的基本运算和笛卡儿积.

§1.1 集合的概念及其表示

由于集合是一个不精确定义的概念,因此,只能给它以直观的描述. 所谓集合,可描述为“由一些任意确定的、彼此有区别的对象所组成的一个整体”. 集合中的对象就称为该集合中的元素. 通常用大写英文字母表示集合,而用小写英文字母表示元素.

如果 a 是集合 S 中的元素,则记为 $a\in S$,读作“a 属于 S”;如果 a 不是 S 中的元素,则记为 $a\notin S$,读作“a 不属于 S”.

【例 1.1】 以下是一些集合的例子.

(1) 教室里所有课桌的集合;

(2) 全体自然数的集合;

(3) 100 以内的素数集合;

(4) 方程 $x^2+x+1=0$ 的实根集合.

定义 1.1.1 设 A 为集合,用 $|A|$ 表示 A 中所含元素的个数.

(1) 若 $|A|=0$,则称 A 为空集(empty set),空集常用 $\varnothing$ 表示;

(2) 若 $|A|=n$(自然数),则称 A 为有限集(finite set);

(3) 若 $|A|=\infty$,则称 A 为无限集(infinite set);

(4) 若 $|A|\neq 0$,则称 A 为非空集(nonempty set).

在例 1.1 所举的 4 个集合中,(1)和(3)为非空有限集,(2)为无限集,(4)为空集.

为方便起见,本书用以下符号表示固定集合:

$\mathbf{N}$——自然数集合; $\mathbf{Z}$——整数集合;

$\mathbf{Q}$——有理数集合; $\mathbf{R}$——实数集合.

由集合的概念可知,要确定一个集合,只需指出哪些元素属于该集合,哪些元素不属于该集合. 常用以下两种方法描述一个集合.

1. 列举法

按任意一种次序,不重复地将集合中的元素全部或部分地列出来,未列出来的元素用“…”代替,并用括号括起来,例如:

10 以内的素数的集合 $M=\{2,3,5,7\}$;

26 个英文小写字母的集合 $M=\{a, b, c,\cdots,x,y,z\}$;

所有整数的集合 $\mathbf{Z}=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$;

全体正偶数的集合 $E=\{2,4,6,\cdots\}$.

部分地列举元素时,所列出的元素要能反映出该集合元素的构造规律.

2. 描述法

用集合中元素所共同具有的某个性质来刻画集合. 任何一个元素属于该集合当且仅当该元素具有规定的性质. 例如,在直角坐标系平面内,满足方程 $x^2+y^2=1$ 的全部点坐标所组成的集合 D 可以表示为

$$D=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in \mathbf{R} \text{ 且 } x^2+y^2=1\}$$

其中,$\langle x,y\rangle$ 表示集合 D 的元素.

我们知道,元素与集合之间是属于或不属于的关系,对集合之间的关系,我们有:

定义 1.1.2 设 A,B 为任意两个集合.

(1) 若对每个 $x\in A$ 均有 $x\in B$,则称 A 为 B 的子集,也称 A 含于 B 或 B 包含 A,记为 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$.

(2) 若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,则称 A 与 B 相等,记为 $A=B$,否则称 A 与 B 不相等,记为 $A\neq B$.

(3) 若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$,则称 A 为 B 的真子集,也称 A 真含于 B 或 B 真包含 A,记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

由集合的概念可知,一个集合也可以作为另一个集合的元素.

定义 1.1.3 设 A 为任意集合,令 $\rho(A)=\{X\mid X\subseteq A\}$,则称 $\rho(A)$ 为 A 的幂集(power set),即 A 的所有子集构成的集合. A 的幂集也可以记为 2^A.

例如,设 $A=\{a,\{b\}\}$,则 A 的幂集为

$$\rho(A)=\{\varnothing,\{a\},\{\{b\}\},\{a,\{b\}\}\}$$

显然,若 A 为有限集,且 $|A|=n$,则 $\rho(A)$ 的元素个数为

$$|\rho(A)|=C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$$

【例 1.2】 设 $A=\{\varnothing\}$,$B=\rho(\rho(A))$,判断下列各题是否正确.

(1) $\varnothing\in B$,$\varnothing\subseteq B$;

(2) $\{\varnothing\}\in B$,$\{\varnothing\}\subseteq B$;

(3) $\{\{\varnothing\}\}\in B$,$\{\{\varnothing\}\}\subseteq B$.

解: 因 A 是仅以空集 $\varnothing$ 为元素的集合,故 $\rho(A)=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$,$B=\rho(\rho(A))=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\rho(A)\}$,于是:

(1) $\varnothing\in B$,因为空集 $\varnothing$ 含于任何集合,所以 $\varnothing\subseteq B$.

(2) $\{\varnothing\}\in B$,因为 $\varnothing\in B$,所以 $\{\varnothing\}\subseteq B$.

(3) $\{\{\varnothing\}\}\in B$,因为 $\{\varnothing\}\in B$,所以 $\{\{\varnothing\}\}\subseteq B$.

综上,各题都是正确的.

§1.2　集合的基本运算

以下设 E 是这样一个集合:它包含我们所讨论的所有集合,并称 E 为全集(universal set).

定义 1.2.1　设 A,B 为任意两个集合,令

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$
$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{且 } x\in B\}$$
$$A-B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\notin B)$$
$$A\oplus B=(A\cup B)-(A\cap B)$$

分别称 $A\cup B$、$A\cap B$、$A-B$ 和 $A\oplus B$ 为集合 A 与 B 的并、交、差和对称差.

特别地,差集 $E-A$ 称为 A 的补集,记为 $\overline{A}$.

如果 $A\cap B=\varnothing$,则称 A 与 B 不相交.

例如,若取全集 $E=\{1,2,3,4,5\}$,$A=\{1,3,4\}$,$B=\{3,5\}$,则有

$$A\cup B=\{1,3,4,5\}$$
$$A\cap B=\{3\},$$
$$A-B=\{1,4\}$$
$$B-A=\{5\},$$
$$A\oplus B=\{1,4,5\}$$
$$\overline{A}=\{2,5\}$$
$$\overline{B}=\{1,2,4\}$$

不难证明,对任意集合 A、B 和 C,下面的运算规律成立:

(1) $A\cup A=A,A\cap A=A$(幂等律);

(2) $A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A$(交换律);

(3) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$(结合律);

(4) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$(分配律);

(5) $A\cap(A\cup B)=A,\ A\cup(A\cap B)=A$(吸收律);

(6) $A\cup\varnothing=A,A\cap E=A$(同一律);

(7) $A\cup E=E,A\cap\varnothing=\varnothing$(零律);

(8) $A\cup\overline{A}=E,A\cap\overline{A}=\varnothing$(互补律 I);

(9) $\overline{E}=\varnothing,\overline{\varnothing}=E$(互补律 II);

(10) $(\overline{A\cap B})=\overline{A}\cup\overline{B},(\overline{A\cup B})=\overline{A}\cap\overline{B}$(De Morgan 律);

(11) $\overline{\overline{A}}=A$(对合律).

例如,我们来证明分配律之一:$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

任取 $x\in A\cap(B\cup C)$,则 $x\in A$ 且 $x\in B\cup C$,即 $x\in A$ 且 $x\in B$ 或 $x\in C$. 于是,$x\in A\cap B$ 或者 $x\in A\cap C$,故 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$,即证得

$$A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C) \tag{1.1}$$

另一方面,任取 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$,则 $x\in A\cap B$ 或者 $x\in A\cap C$,即 $x\in A$ 且 $x\in B$, 或者 $x\in A$ 且 $x\in C$,于是有 $x\in A$ 且 $x\in B$ 或者 $x\in C$,即 $x\in A$ 且 $x\in B\cup C$,因此,$x\in A\cap(B\cup C)$,故

$$(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C) \tag{1.2}$$

综上, 由式(1.1)和式(1.2)可得

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

我们再来证明 De Morgan 律之一：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

因为，$x\in\overline{A\cup B}$当且仅当 $x\notin(A\cup B)$当且仅当 $x\notin A$ 且 $x\notin B$ 当且仅当 $x\in\overline{A}$ 且 $x\in\overline{B}$ 当且仅当 $x\in\overline{A}\cap\overline{B}$，因此，$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

其余的运算规律，都可以类似地证明.

【例 1.3】 证明对任何集合 X 和 Y，$(X-Y)\cap(Y-X)=\varnothing$.

证明： $(X-Y)\cap(Y-X)$

$=(X\cap\overline{Y})\cap(Y\cap\overline{X})$ （由差运算的定义）

$=X\cap\overline{Y}\cap Y\cap\overline{X}$ （由结合律）

$=(X\cap\overline{X})\cap(Y\cap\overline{Y})$ （由交换律和结合律）

$=\varnothing\cap\varnothing$ （由互补律Ⅰ）

$=\varnothing$ （由幂等律）

§1.3 笛卡儿积(Cartesian product)

我们知道，集合中的元素是无次序的，例如$\{x,y\}=\{y,x\}$. 然而，现实世界中，许多对象必须用两个具有固定次序的元素来描述. 比如，直角平面坐标系中的点通常由横坐标 x 和纵坐标 y 表示为(x,y)，而且当 $x\neq y$ 时，(x,y)与(y,x)代表平面中不同的两点，我们称两个具有固定次序的对象为序偶(ordered pairs)，记为$\langle x,y\rangle$.

定义 1.3.1 设$\langle x,y\rangle$和$\langle u,v\rangle$为两个序偶，若 $x=u$ 且 $y=v$，则称这两个序偶相等，记为$\langle x,y\rangle=\langle u,v\rangle$.

序偶$\langle x,y\rangle$中的两个元素可以来自两个不同的集合. 例如，若 x 代表姓名，y 代表国名，则序偶$\langle x,y\rangle$就可表示某公民及其国籍的信息. 更一般地，我们有：

定义 1.3.2 设 A,B 是任意两个集合. 令

$$A\times B=\{\langle x,y\rangle \mid x\in A \text{ 且 } y\in B\}$$

称集合 $A\times B$ 为 A 与 B 的笛卡儿积或直积.

特别地，记 $A\times A$ 为 A^2.

【例 1.4】 设 $A=\{\alpha,\beta\}$，$B=\{1,2,3\}$，则

$$A\times B=\{\langle\alpha,1\rangle,\langle\alpha,2\rangle,\langle\alpha,3\rangle,\langle\beta,1\rangle,\langle\beta,2\rangle,\langle\beta,3\rangle\}$$

$$B\times A=\{\langle 1,\alpha\rangle,\langle 2,\alpha\rangle,\langle 3,\alpha\rangle,\langle 1,\beta\rangle,\langle 2,\beta\rangle,\langle 3,\beta\rangle\}$$

$$A\times A=A^2=\{\langle\alpha,\alpha\rangle,\langle\alpha,\beta\rangle,\langle\beta,\alpha\rangle,\langle\beta,\beta\rangle\}$$

由例 1.4 可知，一般地，$A\times B\neq B\times A$.

可以将序偶的概念推广为 n 元有序组(ordered n - tuples).

定义 1.3.3 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为任意 n 个元素，$n\geqslant 2$，令

$$\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle=\langle\langle x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}\rangle,x_n\rangle$$

$$\langle x_1\rangle=x_1$$

称$\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle$为由 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 组成的 n 元有序组，并称 x_i 为第 i 个分量，$i=1,2,\cdots,n$.

用归纳法可以证明：$\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle=\langle y_1,y_2,\cdots,y_n\rangle$当且仅当 $x_i=y_i$，$i=1,2,\cdots,n$.

定义 1.3.4 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为任意 n 个集合，令

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{\langle x_1,x_2,\cdots x_n\rangle \mid x_i\in A_i,i=1,2,\cdots,n\}$$

称 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的笛卡儿积．当 $A_1=A_2=\cdots=A_n=A$ 时，将 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 简记为 A^n.

例如，$n=3$ 时，$\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\mathbf{R}^3=\{\langle x,y,z\rangle \mid x,y,z\in\mathbf{R}$(实数集)$\}$ 表示空间直角坐标系中所有点的集合．

不难证明，$|A_1\times A_2\times\cdots\times A_n|=|A_1|\times|A_2|\times\cdots\times|A_n|$.

习　　题

1. 用列举法表示下列集合：

(1) 1 到 100 之间的自然数的集合；　(2) 小于 5 的正整数集合；

(3) 偶自然数的集合；　(4) 奇整数的集合．

2. 用描述法表示下列集合：

(1) 偶整数的集合；　(2) 素数的集合；

(3) 自然数 a 的整数幂的集合．

3. 设 $S=\{2,a,\{3\},4\}$，$R=\{\{a\},3,4,1\}$，请判断下面的写法正确与否：

(1) $\{a\}\in S$；　(2) $\{a\}\in R$；

(3) $\{a,4,\{3\}\}\subseteq S$；　(4) $\{\{a\},1,3,4\}\subset R$；

(5) $R=S$；　(6) $\{a\}\subseteq S$；

(7) $\{a\}\subseteq R$；　(8) $\varnothing\subseteq R$；

(9) $\varnothing\subseteq\{\{a\}\}\subseteq R\subseteq E$；　(10) $\{\varnothing\}\subseteq S$；

(11) $\varnothing\in R$；　(12) $\varnothing\subseteq\{\{3\},4\}$.

4. 设 A,B 和 C 为任意三个集合．以下说法是否正确？若正确则证明之，否则举反例说明．

(1) 若 $A\in B$ 且 $B\subseteq C$，则 $A\in C$；

(2) 若 $A\in B$ 且 $B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$；

(3) 若 $A\subseteq B$ 且 $B\in C$，则 $A\in C$；

(4) 若 $A\subseteq B$ 且 $B\in C$，则 $A\subseteq C$.

5. 设 $P=\{S \mid S$ 是集合且 $S\notin S\}$．P 是集合吗？请证明你的结论．

6. 设 $E=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{1,3\}$，$B=\{1,4,5\}$，$C=\{4,3\}$．试求下列集合：

(1) $A\cap\overline{B}$；　(2) $(A\cap B)\cup\overline{C}$；

(3) $(\overline{A\cap B})$；　(4) $\overline{A}\cup\overline{B}$；

(5) $(A-B)-C$；　(6) $A-(B-C)$；

(7) $(A\oplus B)\oplus C$；　(8) $(A\oplus B)\oplus(B\oplus C)$.

7. 设 A,B 和 C 为任意三个集合，以下说法是否正确？若正确则证明之，否则举反例说明．

(1) 若 $A\cup B=A\cup C$，则 $B=C$；

(2) 若 $A\cap B=A\cap C$，则 $B=C$；

(3) 若 $A\oplus B=A\oplus C$，则 $B=C$；

(4) 若 $A\subseteq B\cup C$，则 $A\subseteq B$ 或 $A\subseteq C$；

(5) 若 $B\cap C\subseteq A$，则 $B\subseteq A$ 或 $C\subseteq A$.

8. 设 A,B 和 C 是任意三个集合，试证明：

(1) $A=B$ 当且仅当 $A\oplus B=\varnothing$；

(2) $A\oplus B=B\oplus A$；

(3) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$;

(4) $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$;

(5) $A \cup (B \oplus C) \neq (A \cup B) \oplus (A \cup C)$.

9. 设 $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3\}$,试确定以下集合:

(1) $A \times \{1\} \times B$; (2) $A^2 \times B$;

(3) $(B \times A)^2$.

10. 证明:若 $A \times A = B \times B$,则 $A = B$.

11. 证明:若 $A \times B = A \times C$,且 $A \neq \varnothing$,则 $B = C$.

12. 设 x, y 为任意元素,令 $\langle x, y \rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$,试证明:$\langle x, y \rangle = \langle u, v \rangle$ 当且仅当 $x = u$, $y = v$.

13. 将三元有序组 $\langle x, y, z \rangle$ 定义为 $\{\{x\}, \{x, y\}, \{x, y, z\}\}$ 合适吗?为什么?