普通高等教育“十二五”力学规划教材
湖北省精品课程教材

结构力学问题分析与探讨

Jiegou Lixue Wenti Fenxi yu Tantao

李黎 主编

華中科技大學出版社
http://www.hustp.com

普通高等教育“十二五”力学规划教材
湖 北 省 精 品 课 程 教 材

结构力学问题分析与探讨

主 编 李 黎
编 写 李 黎 樊 剑
江宜城 龙晓鸿

华中科技大学出版社
中国·武汉

内 容 简 介

本书对李黎主编、华中科技大学出版社出版的《结构力学》教材中第2章至第11章涉及的51个问题采用各种方法进行了认真详细的分析与探讨。所做的工作既有对书中结论给出进一步数据支撑的，也有对书中的内容做进一步深入研究的，同时也向读者展现了如何提出问题、解决问题，以及阐述观点的过程和方法。因此本书对于在校的本科生、研究生都具有很强的可读性和指导性，而且对于讲授"结构力学"课程的教师也具有很好的参考作用。

图书在版编目(CIP)数据

结构力学问题分析与探讨/李黎主编. —武汉：华中科技大学出版社，2015.10
普通高等教育"十二五"力学规划教材
ISBN 978-7-5680-1341-3

Ⅰ.①结… Ⅱ.①李… Ⅲ.①结构力学-高等学校-教材 Ⅳ.①O342

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第263325号

结构力学问题分析与探讨 李 黎 主编

策划编辑：徐正达
责任编辑：姚同梅
封面设计：刘 卉
责任校对：祝 菲
责任监印：张正林
出版发行：华中科技大学出版社(中国·武汉)
武昌喻家山 邮编：430074 电话：(027)81321913
录 排：武汉市洪山区佳年华文印部
印 刷：武汉鑫昶文化有限公司
开 本：787mm×1092mm 1/16
印 张：19.5
字 数：510千字
版 次：2015年12月第1版第1次印刷
定 价：35.00元

华中出版

前　言

结构力学是研究杆系结构在外力和其他因素作用下的内力、变形以及组成规律的一门学科。结构力学课程是土木工程专业最重要的核心学科基础课，是学生由前期的基础理论学习转入后期专业知识学习之间的桥梁和纽带，是结构工程师进行工程结构计算、设计、施工的重要工具。课程的主要任务是：使学生在学习了理论力学和材料力学的基础上，进一步掌握杆系结构的基本计算原理和方法，了解各类结构的受力性能，为学习有关专业课程以及进行结构设计和科学研究打好基础。

为了更好地完成这门学科的教学任务，本书在《结构力学》教材（由李黎主编，华中科技大学出版社出版）的基础上，或采用理论推导，或根据大量的计算结果，或通过不同方法的互相印证等手段，对该教材中的51个问题进行了认真、详细的分析与探讨。所做的工作既有对书中结论给出进一步数据支撑的，也有对书中的内容做进一步深入研究的，同时也向读者展现了如何提出问题、解决问题，并展现了阐述观点的过程和方法。

本书通过对这51个问题的分析和探讨，得出了许多对本课程以及土木工程专业都非常有意义的结论。这些结论以及分析问题的方法，不仅对土木工程专业的学生在学习本课程时具有很好的指导作用，有助于学生提高分析问题的能力、学会表达观点的方法、养成独立思考问题的习惯，而且对考研的学生以及讲授结构力学课程的教师也具有很好的参考作用。

本书由李黎主编，樊剑、江宜城、龙晓鸿参加了相关问题的分析和编写工作。

本书的错误和不足之处在所难免，欢迎广大读者提出宝贵意见。

李黎

2015.10

目　录

1 体系几何构造分析的零载法

在对一个结构进行内力计算之前，必须先对其进行几何构造分析，以确定拟计算对象是几何不变的还是几何可变的（这是因为几何可变体系不能满足力的平衡条件，是无解的），并确定拟计算对象是静定的还是超静定的，由此决定所采用的计算方法。对于一般结构，只要灵活使用《结构力学》[①]教材中介绍的四个几何不变体系组成规律即可解决这个问题，但对于复杂的静定桁架，仅靠这四个组成规律是不够的，也就是说，面对复杂桁架，使用这四个组成规律进行几何构造分析通常是无法下手的。本篇文针对这个问题，主要讨论零载法的基本原理、适用范围和分析步骤等。

在讨论之前，必须明确以下几个基本概念。

(1) 自内力：体系在没有外力作用时存在的自平衡内力称为自内力。

(2) 多余约束：大于保证体系几何不变所需最少约束数的联系，或在体系中起不到约束作用的联系（本文指的是这种多余约束）。

(3) 计算自由度：体系的理论计算自由度，用 W 表示，桁架的自由度计算公式为 $W=3m-(2n+r)$，其中 m 为刚片数、n 为单铰数、r 为链杆数。

(4) 体系的运动自由度：体系的实际可动自由度，用 S 表示。去掉体系中的多余约束不会增加体系的运动自由度，即沿多余约束方向不会发生运动。

1. 零载法的适用对象

若体系的计算自由度 $W>0$，说明约束不够，体系必然是几何可变的（没有必要分析）；若体系的计算自由度 $W<0$，说明体系存在多余约束，这时体系可能是超静定结构，也可能有一部分是超静定的，有一部分是几何可变的，无法下结论。

零载法是一种以体系的自由度计算为基础、只针对计算自由度 $W=0$ 的静定桁架的几何构造分析方法。也就是说，零载法只适用于计算自由度 $W=0$ 的静定桁架。

2. 零载法的基本思路

当一个体系的计算自由度为零 $W=0$ 时，说明体系中刚片的自由度数刚好等于约束数。一般情况下该体系应该是无多余约束的几何不变体系，称为静定结构。但当某些约束的位置布置不恰当，起不到约束作用时，体系就有可能是几何可变或瞬变的。如上所述，这些起不到约束作用的联系就是多余约束。

也就是说，若一个体系的计算自由度 $W=0$，而且还具有多余约束，那么该体系一定是几何可变或瞬变的。但是对复杂桁架来说，计算自由度 W 的计算是很容易的，但对多余约束的判断并不容易和直观。因此需要解决如何判断在计算自由度 $W=0$ 的复杂静定桁架中是否存在多余约束的问题。

一般情况下，若不考虑自重，也没有荷载作用，计算自由度 $W=0$ 的静定结构内是不可能存在自内力的。但体系中若有多余约束存在，即使处于零载状态也有可能存在自内力。证明如下。

---

① 本书中所提到的《结构力学》教材均指由李黎主编、华中科技大学出版社出版的《结构力学》一书。

计算自由度 $W=0$ 的体系处于零载状态时，由于有多余约束，体系的运动自由度数应等于其多余约束数。去掉任一多余约束，代替以多余约束力 X（变成主动力），给定一任意虚位移，根据虚功原理，有

$$X \cdot \Delta_x = 0 \tag{1-1}$$

式中：Δ_x 为沿多余约束力方向的虚位移。因体系沿多余约束力方向不应有位移，即 $\Delta_x=0$，故式(1-1)中的 X 可取任意值，说明体系存在自内力。

因此对于计算自由度 $W=0$ 的体系，可以通过判断其在零载状况下是否有自内力存在，来确定体系中是否有多余的约束存在。在零载状况下若体系中不存在自内力，该体系就为几何不变体系，反之，则为几何可变体系。

3. 零载法的分析步骤

(1) 计算体系的计算自由度，判断 $W=0$ 是否成立。

(2) 在零载状况下简化体系，去掉零杆。

(3) 设某非零杆的内力为 X，判断 X 是否能使体系局部满足平衡条件。

(4) 若 X 存在非零值，则体系可变；若 X 不存在非零值，则体系不可变。

4. 零载法举例

例 1-1　对图 1-1 所示体系进行几何组成分析。

解　(1) 求体系的计算自由度 W。

该体系的刚片数 $m=1$，单铰数 $n=0$，链杆数 $r=3$。可得

图 1-1

$$W=3\times1-(2\times0+3)=0$$

由于体系 $W=0$，可以使用零载法。

(2) 简化体系，去掉零杆。

在零载状态下，对于整体，由 $\sum F_y=0$，可得 A 端支座的竖直方向反力为零，因此把其竖直方向约束去掉，简化成图 1-2 所示体系。

(3) 设某非零杆内力为 X。

设杆 AB 内力为 X（受压），那么 A、B 端支座的反力如图 1-3 所示，即局部是可以保持平衡的。

图 1-2

图 1-3

(4) 判断几何组成。

由图 1-3 可知，X 若取非零值体系是可以维持平衡的。因此，该体系在零载状况下是有可能存在自内力的，故该体系是几何可变体系。

其实图 1-1 所示体系的几何构造是很容易判断的，并不需要使用零载法，在这里只是利用一个简单的例子来示范该方法的分析步骤。同时很容易判断出图 1-1 所示体系是瞬变的，但零载法只能给出体系是否可变的结论，而无法用于区分常变体系和瞬变体系。

例 1-2　对图 1-4 所示体系进行几何组成分析。

解　(1) 求体系的计算自由度 W。

该体系的刚片数 $m=4$，单铰数 $n=4$，链杆数 $r=4$。可得

$$W=3\times4-(2\times4+4)=0$$

由于体系 $W=0$，可以使用零载法。

(2) 简化体系，去掉零杆。

在零载状况下：对于结点 A，由 $\sum F_y=0$，可得杆 AC 的内力为零；对于结点 B，由 $\sum F_x=0$，可得杆 BA 的内力为零；对于结点 C，由 $\sum F_x=0$，可得杆 CD 的内力为零；对于结点 D，由 $\sum F_y=0$，可得杆 DB 的内力为零。依此类推，可知体系所有杆件均为零杆，支座反力也全部为零。

(3) 判断几何组成。

由于该体系在零载状况下不存在自内力，故为几何不变体系。

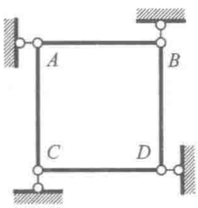


图 1-4

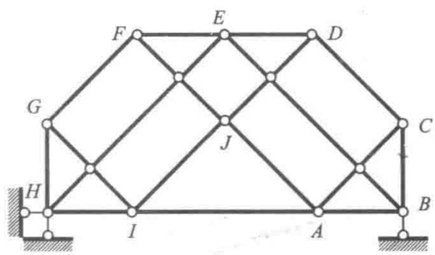


图 1-5

例 1-3　对图 1-5 所示体系进行几何组成分析。

解　(1) 求体系的计算自由度 W。

该体系的刚片数 $m=25$，单铰数 $n=36$，链杆数 $r=3$。可得

$$W=3\times25-(2\times36+3)=0$$

由于体系 $W=0$，可以使用零载法。

(2) 简化体系，去掉零杆。

对于整体：由 $\sum F_x=0$，可得 H 端支座的水平方向反力为零，因此可把其水平方向约束去掉；由 $\sum M_H=0$，可得 B 端支座的竖直方向反力为零，因此可把其竖直方向约束去掉；由 $\sum F_y=0$，可得 H 端支座的竖直方向反力也为零，因此可把其竖直方向约束去掉。最后简化的体系如图 1-6 所示。

(3) 设某非零杆内力为 X。

设杆 AJ 轴力为 X(受拉)，然后依次利用结点 A、B、C、D、E、F、G、H、I 的平衡条件，求得各杆轴力如图 1-7 所示。

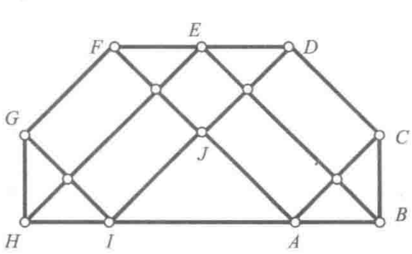


图 1-6

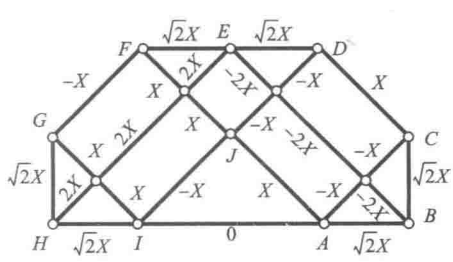


图 1-7

(4) 判断几何组成。

如上所述，若设杆 AJ 的轴力为 X，由平衡条件可以求出其他所有杆件的内力，而且最后结点 A 也是满足平衡条件的。因此无论 X 取何值，自内力均可能存在，故体系是几何可变的。

值得提醒的是：上述体系是对称的，在用零载法检验时，不能盲目运用对称性，认为自内力一定是对称分布的。这是因为零荷载是一种特殊情况，若对称体系在零载下存在自内力，它既可能对称分布也可能反对称分布。如例 1-3 中的自内力是反对称分布的。若一开始认定自内力是对称分布的，则由结点 E 的平衡条件 $\sum F_y = 0$，得出 $F_{NEH} = F_{NEB} = 0$，于是判断全部杆件的轴力均等于零，会得出该体系是几何不变体系的错误结论。

5. 结论

(1) 理论上零载法可以解决所有计算自由度 $W=0$ 体系的几何构造分析问题，但实际上只是对桁架体系自内力的分析比较方便。而对于有受弯杆件的体系，由于自内力的分析比较复杂，所以一般不宜采用。

(2) 对于计算自由度 $W=0$ 的普通桁架，只需用几何不变体系的四个组成规律即可作出判断，因此一般不需要使用零载法。

(3) 对于计算自由度 $W<0$ 的体系，可能存在两种多余约束：一种是使体系成为超静定结构的多余约束，它也会使体系在零载状态下产生自内力，但结构是不可变的；还有一种是布置不恰当的多余约束，它使体系的某一部分是可变的。对这两种情况，显然用零载法是无法区分的。因此零载法只适用于计算自由度为零的复杂静定桁架。

2　几何构造分析中的等效变换

平面体系通常可以用三角形规则（包括三刚片规则、二元体规则和二刚片规则以及与之等效的多刚片规则）来进行几何组成分析。可以这么说，按照三角形规则组成的体系都是几何不变体系，然而有很多体系虽然不是按照三角形规则组成的，但也是几何不变体系。因此，满足三角形规则是体系几何不变的充分条件，而不是必要条件。对于不能运用三角形规则进行几何分析的体系，可以用等效变换方法进行分析。

本文对不能用三角形规则进行几何构造分析的一些体系，给出了几种等效变换的处理方法，经等效变换后可将体系化成可以用三角形规则进行几何构造分析的体系。

1. 刚片的等效变换

在一个体系内，一个刚片是通过它与相邻部分的约束来实现相互制约作用的。一个体系的运动自由度只与体系所含刚片的数目、约束的数目和约束的布置有关。图 2-1 所示两个体

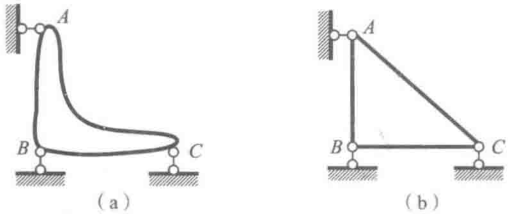


图 2-1

系都可看成是一个刚片 ABC 在相同的位置用相同的约束与基础相连，显然，它们的几何构造特性是一样的。

因此得出结论 1：在不改变刚片与其相邻部分的约束方式和约束位置的前提下，可以改变刚片的大小、形状和其内部构成，这样不会改变原体系的几何构造特性。当一个刚片仅在三点与其相邻部分用铰相连时，可以用一个铰接三角形代替它。这个铰接三角形既是一个刚片，也可以看成三个链杆约束。

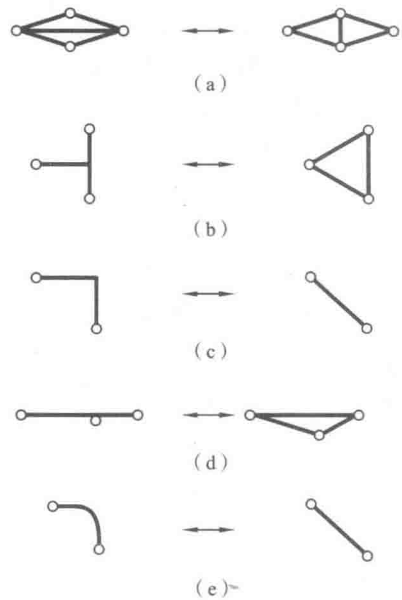


图 2-2

图 2-2 列举了几种常见的构造类型之间的等效变换，分别为铰接体系互换(见图 2-2(a))、刚片与铰接体系互换(见图 2-2(b))、折杆与直杆互换(见图 2-2(c))、复链杆与单链杆互换(见图 2-2(d))、曲杆与直杆互换(见图 2-2(e))。

2. 约束的等效变换

1）将支杆替换成体系中的链杆

在图 2-3(a)所示的三铰拱中，点 B 处的水平杆约束点 B 的水平方向位移，如果用连接不动点 A 的水平拉杆 AB 来代替可起到同样的作用，如图 2-3(b)所示，带拉杆三铰拱体系很容易按三角形规则进行分析。

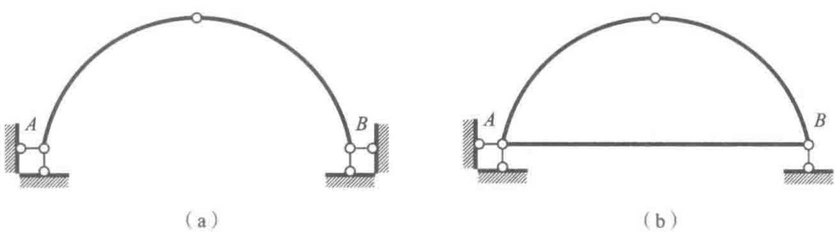


图 2-3

因此可以得出结论 2：体系中某点沿某方向的支杆，可以用该点与一个不动点相连的同一方向的链杆来代替，这不会改变对该点沿该方向运动的约束。

2）用固定铰支座代替连接一个刚片的两根支杆

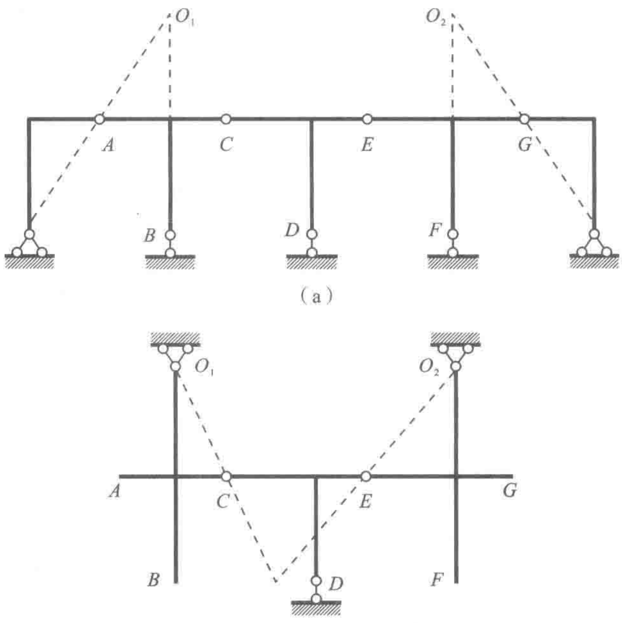
图 2-4 所示是将两根支杆用固定铰支座替换。图 2-4(a)所示体系中的刚片与基础由点 A、B 处的支杆相连，相当于点 C 处的一个瞬铰。从瞬时微小运动来看，瞬铰与单铰的作用是等效的。另外，由结论 1 可知，可以改变刚片的大小和形状。

图 2-4

由此可以得出结论 3：可以将连接一个刚片的两根支杆用它们交点处的固定铰支座代替，如图 2-4(b)所示。

图 2-5(a)所示体系中的刚片 ABC 和刚片 EFG 分别与基础由两根支杆相连，用它们交点

O_1、O_2 处的固定铰支座代替，并将两刚片分别扩大到点 O_1 和 O_2 处，如图 2-5(b)所示。而刚片 O_1ABC 和刚片 O_2EFG 又可分别看成是链杆 O_1C 和 O_2E，最后得到刚片 CDE 与基础用三根链杆相连。

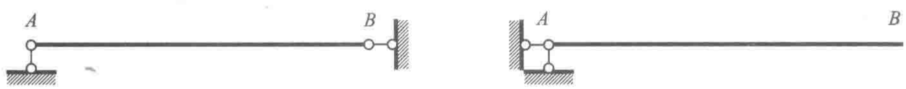


(a)　　(b)

图 2-5

3）支杆的等效滑移

图 2-6 表示支杆的等效滑移，图中两体系都是只有点 B 有竖直方向位移，所以两者的瞬时微小运动是相同的。

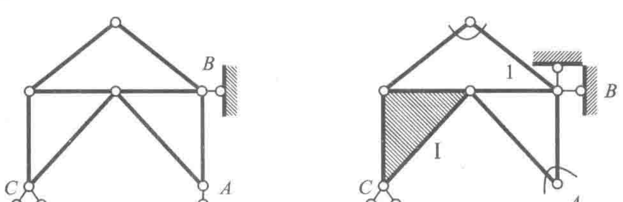


(a)　　(b)

图 2-6

由此可以得出结论 4：与一杆件共线的支杆可由杆件的一端滑移到另一端，其约束作用不变。

将图 2-7(a)所示体系中点 A 处的支杆滑移到点 B 处，得到图 2-7(b)所示体系，去掉两组二元体，可知刚片Ⅰ通过点 C 处的铰和链杆 1 与基础相连接，构成无多余约束几何不变体系。



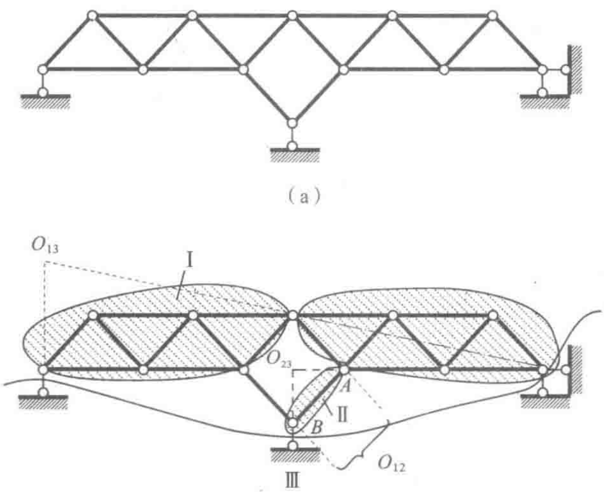
(a)　　(b)

图 2-7

3. 应用

利用等效变换可以分析比较复杂的体系的几何构造。如图 2-8(a)所示，采用三角形规则

很难分析出该体系的几何构造，这时需要引入等效变换。



(a)

(b)

图 2-8

如图 2-8(b)所示，右边一整块是一个几何不变体系，等效成一根链杆，左边作为大刚片Ⅰ，杆 AB 作为刚片Ⅱ，加上大地为刚片Ⅲ，可知三个刚片分别由点 O_{12}、O_{13}、O_{23} 处的虚铰连接，三铰不在同一直线上，所以整个体系是无多余约束的几何不变体系。

4. 结论

由于体系几何构造分析是分析体系是否能运动，并不讨论体系具体做何种运动，因此可以将一些不能用简单的三角形组成规则分析的体系进行等效变换，化成可以用简单的组成规则分析的体系。

3　几何构造分析的简化思路

结构力学是整个建筑结构分析的基础，而结构的几何构造分析又是结构力学学习的基础，其重要性不言而喻。但作为最基础性的知识，许多同学学习起来却十分吃力，究其原因：一是因为几何构造分析规则和方法众多，对于一般结构有三刚片规则、二刚片规则、二元体规则等，对于复杂结构，需用零载法、代替杆法或智能求解器分析；二是对于某些复杂结构，用现有规则都不好分析。

一般教材中介绍了关于平面几何不变体系组成的四大规律。

规律一：一个刚片与一个点用两根链杆相连，且三个铰不在一条直线上，则组成几何不变体系，并且没有多余约束。

规律二：两个刚片用一个铰和一根链杆相连接，且三个铰不在一条直线上，则组成几何不变体系，并且没有多余约束。

规律三：三个刚片用三个铰两两相连，且三个铰不在一条直线上，则组成几何不变体系，并且没有多余约束。

规律四：两个刚片用三根链杆相连，且三根链杆不交于同一点，则组成几何不变体系，并且没有多余约束。

这四大规律比较全面地概括了平面几何不变体系的构成方式，但很多时候，即便记住并理解了这四条规律，在解决实际问题时，要灵活应用却很难。

为此，尝试建立一个适用范围广、方便理解和记忆的广义三角形规则，将各种几何构造分析方法进行整合和统一。在这个广义三角形规则中包含现有的几个规则（三刚片规则、二刚片规则、二元体规则等），能够很方便地用这个统一的广义三角形规则来进行分析。对于某些用现有规则都不太好分析的复杂结构，按这个统一的广义三角形规则比较好理解，即可方便地按变异的广义三角形规则来理解。也就是说，对于绝大多数静定结构，不论其多么复杂，归根到底，其仍是三角形结构。

1. 广义三角形规则

以基本铰接三角形（见图 3-1）为基础，引入虚铰的概念，形成广义三角形。可按虚铰个数，分为四种情况：① 三个实铰，无虚铰；② 两个实铰，一个虚铰；③ 一个实铰，两个虚铰；④ 无实铰，三个虚铰。大多数静定结构都包含在这四种情况之中。这就是广义三角形规则。

1）三个实铰、无虚铰的情况

如图 3-2 所示，这是一个基本的铰接三角形，这就是三刚片规则、二元体规则（二元体规则是三刚片规则的逆向思维）及二刚片规则中用铰和链杆相连的情况。体系是几何不变体系的要求是三铰不共线，整个体系在无多余约束的情况下刚片数为 3。

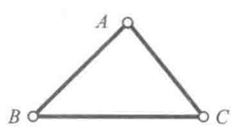


图 3-1

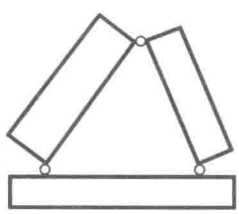


图 3-2

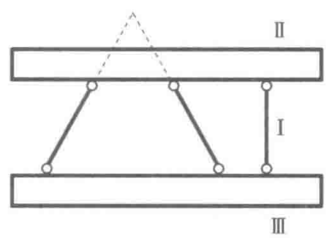


图 3-3

2）两个实铰、一个虚铰的情况

以图 3-3 为例，两倾斜链杆形成虚铰，将刚片Ⅱ、Ⅲ相连，而刚片Ⅰ与刚片Ⅱ、Ⅲ通过实铰相连，形成广义三角形结构。体系是几何不变体系的要求是三杆不平行、不共点。整个体系在无多余约束的情况下刚片数为 5（链杆也属于刚片）。

3）一个实铰、两个虚铰的情况

图 3-4 中，刚片Ⅰ、Ⅱ由一个实铰相连，刚片Ⅰ、Ⅲ及刚片Ⅱ、Ⅲ均由虚铰相连。一个实铰、两个虚铰及刚片Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ形成广义三角形结构。整个体系在无多余约束的情况下刚片数为 7。

4）无实铰、三个虚铰的情况

图 3-5 中，刚片Ⅰ、Ⅱ由虚铰相连，刚片Ⅰ、Ⅲ由虚铰相连，刚片Ⅱ、Ⅲ由虚铰相连，即刚片Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ由三个虚铰相连，形成广义三角形结构。整个体系在无多余约束的情况下刚片数为 9。

2. 几何构造分析步骤

(1)简化结构体系。

为方便几何构造分析，并对整个体系有更直观的认识，可对复杂结构进行简化，包括常见

的去除地基及二元体、组合或简化局部刚片等。

如图 3-6 所示，地基与上部结构连接无多余约束时可以直接去除下部地基，只分析上部结构的几何构造。

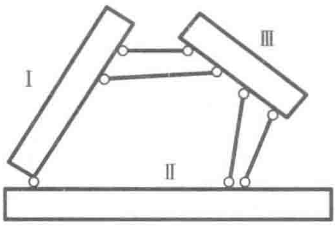


图 3-4

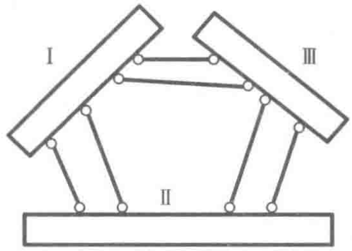


图 3-5

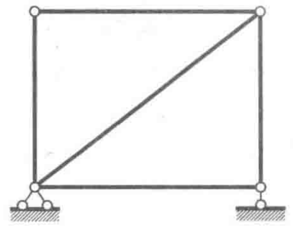


图 3-6

消去二元体比较简单，不再赘述，下面再介绍一下如何组合及简化局部刚片。

如图 3-7 所示，根据三角形规则可以分别将三角形 1、2 及大地，三角形 3、4 进行组合，形成局部刚片 Ⅰ、Ⅱ，再进行几何构造分析。

简化局部刚片则是根据局部刚片与外部连接铰的个数 n，将结构简化为 n 边稳定三角形。如图 3-8 所示，局部刚片 Ⅰ 与外部连接铰的个数为 4，已经为两个三角形结构，不用简化，而局部刚片 Ⅱ 与外部连接铰的个数为 3，可以等效为一个三角形结构，简化分析。对所有的刚片均可以进行如上简化。

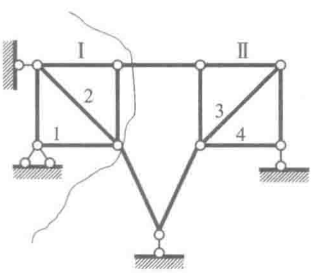


图 3-7

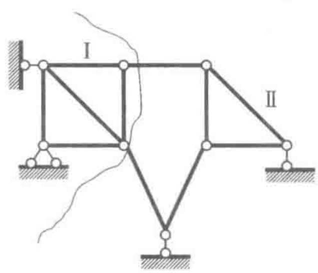


图 3-8

(2) 统计刚片总数。

经过第一步简化结构后，统计整个体系的刚片数，包括所有链杆、局部刚片和大地，组合后的局部刚片算作一个刚片。

(3) 根据刚片总数计算实铰及虚铰个数。

若总刚片数为 3，则为三个实铰、无虚铰的情况；若总刚片数为 5，则为两个实铰、一个虚铰的情况；若总刚片数为 7，则为一个实铰、两个虚铰的情况；若总刚片数为 9，则为无实铰、三个虚铰的情况。

(4) 选择刚片。

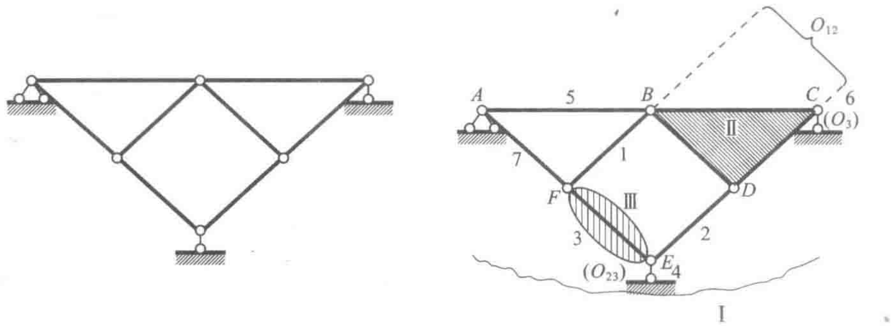
根据广义三角形规则，需判断出三刚片，及连接三刚片的虚铰及实铰。一般情况有以下规律：大地必为三刚片之一；单链杆两端均必有三刚片之一；组合刚片一般为三刚片之一，若不成立则应将组合刚片进行分解。

(5) 判断几何组成。

根据选择的三刚片，找出实铰及虚铰，然后判断几何组合。

3. 应用

例 3-1　对图 3-9(a)所示的体系进行几何构造分析。



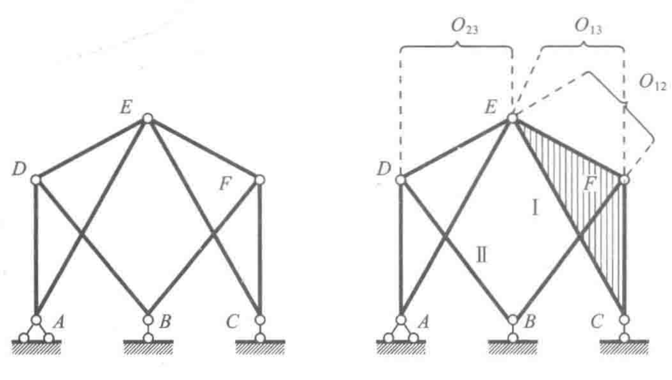
(a)　　(b)

图 3-9

解　如图 3-9(b)所示，大地与上部结构有多余约束，所以保留，两个稳定三角形 ABF、BCD 组合为局部刚片，则总刚片数为 7，应为一个实铰、两个虚铰的情况。选取三刚片：大地为刚片Ⅰ，若三角形 ABF、BCD 分别为刚片Ⅱ、Ⅲ，则不满足单链杆 1 两端均为三刚片的要求，所以将局部刚片 ABF 分解为三个链杆，则总刚片数变为 9，应为无实铰、三个虚铰的情况；再取大地为刚片Ⅰ，局部刚片三角形 BCD 为刚片Ⅱ，根据单链杆两端必有刚片，取杆 3 为刚片Ⅲ。

刚片Ⅱ与刚片Ⅲ由链杆 1、2 连接，杆 1、2 交于无穷远点 O_{12} 处，形成虚铰；刚片Ⅰ与刚片Ⅲ由链杆 7、4 连接，杆 7、4 交于点 O_{23}（点 E）处；刚片Ⅰ与刚片Ⅱ由链杆 5、6 连接，杆 5、6 交于点 O_{13}（点 C）处。由于点 O_{12}、O_{23} 的连线与杆 1、杆 2 平行，因此该体系是无多余约束的瞬变体系。

例 3-2　试分析图 3-10(a)所示体系的几何构造。



(a)　　(b)

图 3-10

解　如图 3-10(b)所示，取三角形 CEF、杆 BD 和基础为三刚片，分别用链杆 DE 和 BF、杆 AD 和点 B 处支座链杆、杆 AE 和点 C 处支座链杆两两构成的三虚铰相连，三铰不共线，故该体系为无多余约束的几何不变体系。

4. 结论

本文从广义三角形规则出发，将体系结构形式分为四种简单情况，便于理解和记忆。同时，在几何构造分析的思路上进行归纳总结，将几何构造分析过程简化为统一的分析步骤，在刚片选择上为初学者提供了较为清晰的思路。

4 几何构造分析中相关问题的探讨

在对体系进行几何构造分析的过程中，通常采用二元体规则、两刚片规则、三刚片规则或者三条规则相结合的方式来判断，而且基本上能够判断出来，但是有些时候运用这三条规则却不能判断体系是否为几何不变体系，因此说这三条规则具有一定的局限性。本文先简单介绍几种常见的几何构造分析方法，然后对那些较复杂的、利用上述三条规则无法明确判断的体系，采用“零载法”进行分析判断，并结合一些具体的例题进行说明。此外，对于一些较复杂的平面杆件体系，如何快速确定体系中多余约束的个数也是一个需要解决的问题。通常情况下采用求解计算自由度的方法确定其多余约束的下限值，但是不能确定其实际值。本文采用在原体系中增加链杆约束的方法，使原体系变为较容易进行几何构造分析的新体系，然后确定新体系多余约束的个数，进而确定原体系多余约束的个数。

1. 基本的几何构造分析方法和思路

在对体系进行几何构造分析之前，首先要弄明白体系和结构之间的关系，不能直接将体系误认为结构。实际上，体系是包括结构的，结构属于体系的一种。所谓的结构是指能够承受荷载的几何不变体系，可以是无多余约束的(静定结构)，也可以是有多余约束的(超静定结构)，而体系还包括几何可变体系。通常我们所说的几何构造分析的对象是指体系，需要我们判断其是几何可变的还是几何不变的，是有多余约束的还是无多余约束的。

目前运用较多的几何构造方法有二元体规则、两刚片规则、三刚片规则，这三条规则具体如下。

规则一，即二元体规则：一个点和一个刚片用两根不共线的链杆相连，所形成的三个铰不在一条直线上，组成几何不变体系，这种几何不变体系称为二元体。

规则二，即两刚片规则：两个刚片用一个铰和一根链杆相连，且铰和链杆不在同一条直线上，组成几何不变体系，或者两个刚片用三根链杆相连，且三链杆不交于同一点，组成几何不变体系。

规则三，即三刚片规则：三刚片用三个不共线的铰两两相连，组成几何不变体系，这种几何不变体系称铰接三角形。

通常情况下，利用这三条规则能够较容易地判断一个体系是否为几何不变体系，但是对于不同的体系，其复杂程度不同，在进行几何构造分析时思路可能会有所不同，简单介绍如何利用这三条规则快速进行体系的几何构造分析。

(1) 增加或者拆去二元体，然后再分析。

所谓“二元体”是指由两根不共线的链杆连接一个新点所组成的构件，其形式多种多样，但是最基本的形式还是如图 4-1 所示，其中三个铰必须不在一条直线上。利用此方法时，首先要找到一个刚片，这里所说的刚片是指一个无多余约束的几何不变体系，可以是一根链杆、一个铰接三角形或者基础等等，然后通过增加二元体不断扩大刚片的范围，或者通过逐步删掉外侧的二元体，使原体系不断地简化，最后利用两刚片规则或者三刚片规则进行进一步的判断。图 4-2 所示的两个例子分别可采用增加和拆去二元体的方法。