Combinatorial Optimization and Game Theory

组合优化与博弈论

谈之奕 林 凌 编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

组合优化与博弈论

谈之奕　林　凌　编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

组合优化与博弈论 / 谈之奕，林凌编著. —杭州：浙江大学出版社，2015.9

ISBN 978-7-308-14945-7

Ⅰ.①组… Ⅱ.①谈… ②林… Ⅲ.①组合规划②博弈论 Ⅳ.①O221.7②O225

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 173111 号

组合优化与博弈论

谈之奕 林 凌 编著

责任编辑	徐素君
责任校对	金佩雯
封面设计	刘依群
出版发行	浙江大学出版社 （杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007） （网址：http://www.zjupress.com）
排　　版	杭州中大图文设计有限公司
印　　刷	德清县第二印刷厂
开　　本	787mm×1092mm 1/16
印　　张	16.75
字　　数	420 千
版 印 次	2015 年 9 月第 1 版 2015 年 9 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-308-14945-7
定　　价	40.00 元

前　言

运筹学是20世纪四五十年代发展起来的一门新兴交叉学科，几十年来其理论体系日臻完善，在经济社会发展中发挥了巨大的作用，展现了旺盛的生命力. 运筹学的主要任务是各类优化问题的建模与求解，这些问题广泛见之于各个学科和各行各业，因此在大学生中传播运筹学的思想和理念，介绍运筹学的模型和方法，具有很大的现实意义. 但是运筹学目前在我国高校中一般不作为数学基础课程在各专业中普遍开设，而仅作为数学、经济、管理等相关专业的必修或选修课程. 对大多数其他专业的学生而言，在数学课程中接触到的优化问题可能仅限于微积分中的极值问题，而在未来学习、工作和生活中遇到的问题却远不止此.

2006年，浙江大学启动课程体系改革，增设了通识课程类别，并将运筹学作为科学与研究类通识课程之一. 通识课程供全校不同年级不同专业学生自由选修，学生专业背景和数学基础并不一致，课程学时少并注重学生自主学习，因此选择适当的教学内容和教学重点十分必要. 我们从运筹学庞大的体系和纷杂的内容中选择了三个方面作为讲授的重点：线性规划和整数规划、组合优化、博弈论. 线性规划是运筹学中最基础的模型，组合优化应用十分广泛，博弈论近年来深受关注，同时它们所需的数学基础相对较少，对低年级或人文社科类学生而言也不会太困难. 经过几轮教学实践，学生对这样的安排是认可的. 鉴于课程内容相比传统运筹学课程有较大的调整，通识课程的目的和任务也与专业课程有所区别，我们觉得有必要编写与之相适应的教材. 目前这本教材突出了课程重点讲授的内容，强调了经典模型和基本方法. 除个别艰深的数学概念和证明外，力图叙述详细、完整，以方便学生课外自学. 本书还包含了对部分运筹学模型、方法的发展历程和历史人物的介绍，以使读者从中体会实际问题驱动对运筹学发展的重要性，了解运筹学先驱的卓越贡献和成功实践. 我们还选择了部分近年来国内外新提出的模型和相关结论予以介绍，以使学生感受到运筹学的蓬勃生机，并为优秀学生开展研究性学习提供指引.

2008年，浙江大学数学和应用数学本科专业方向和课程设置进行了调整，新设运筹学方向并开设了组合优化课程，以适应离散优化问题重要性日益明显的趋势. 由于近年来国内尚无面向本科教学的专门组合优化教材面世，而几种经典国外教材主要是面向研究生和专业研究人员的. 为满足教学急需，我们充实了本书中组合优化部分的内容，使之能涵盖组合优化的基本方法和主要问题. 当然，考虑到全书的性质，我们在叙述和选材上不得不采用相对通俗的方式. 例如，在介绍计算复杂性时没有引入图灵机，介绍动态规划和近似算法时也没有引入更为复杂的实例. 这些缺憾只能留待将来编写专门的组合优化教材时再行弥补了.

全书内容分为九章. 导言介绍运筹学的概况、发展历程和若干经典问题；第一章介绍线性规划和单纯形法；第二章介绍运输问题和指派问题；第三章介绍整数规划及其求解算法；第四章介绍图论中优化问题；第五章介绍组合优化的一般理论和研究方法；第六章介绍排序和装箱问题两类重要的组合优化问题；第七章介绍在线问题这一新型组合优化问题；第

八章介绍博弈论中的若干模型.

本书部分章节分别作为运筹学通识课程和组合优化专业课程教材在浙江大学试用若干轮.如作为前者的教材,可将部分内容作为学生课外选学内容,如§2.5、§5.6、§6.4、§7.4、§8.5等节,同时略去一些较难的定理证明.如作为后者的教材,以第四章至第七章为主要内容,可供一学期每周三学时教学使用.浙江大学国家精品资源共享课《数学建模》运筹学部分的教学也采用了本书的部分素材.

本书没有编制习题,这主要基于以下考虑.通识课程意在对某一学科有初步的认识,而非熟练掌握.对确有兴趣的学生,为理解和巩固问题或算法,所需的实例均可自拟.另一方面,组合优化是一门新兴学科,新的问题和成果仍在不断涌现.在教学中我们引导学生阅读文献,发现问题,开展研究性学习,不囿于已有结论.几年的实践收到了很好的效果,已有多名修读该课程的浙江大学本科生通过课内学习和课外钻研,参与完成了一些新成果,并在 *Discrete Applied Mathematics*, *European Journal of Operational Research* 等期刊上发表了论文.

我们均毕业于浙江大学数学系运筹学专业.姚恩瑜教授、杨启帆教授引领我们进入组合优化领域,在学习和工作上不断给予关心和帮助,在此表示由衷的感谢.感谢浙江大学本科生院、浙江大学数学系多年来对课程和教材建设提供的支持.

谨以拙作纪念我们敬爱的何勇教授.

本书的写作得到了国家自然科学基金(11271324)和浙江省杰出青年科学基金(LR12A01001)资助.

由于作者水平有限,加之成书仓促,编写运筹学通识教材和组合优化教材又是初次尝试,书中难免存在错漏之处,在内容取舍和安排方面也恐有不当,恳请读者批评指正.

谈之奕　林　凌

2015年8月于杭州

目　录

导　言

§0.1　运筹学概说

运筹学(operations research 或 operational research)是一门新兴综合交叉学科.《辞海》对"运筹学"的释义要点是"主要研究经济、管理与军事活动中能用数量来表达的有关运用、筹划与决策等方面的问题.它根据问题的要求,通过数学的分析与运算,作出综合性的、合理的安排,以便较经济、较有效地使用人力物力".其他一些国内外工具书和教材对运筹学有各自的定义,但究其内涵,大致均包含以下三点:

运筹学研究的目的是高效地优化配置和管理相对稀缺的已有资源(包括人、财、物等多个方面),以获得尽可能大的利益.早期的运筹学工作者大多原属物理、工程等其他学科,在应用各自的专业知识解决实际问题的过程中,逐渐意识到单纯依赖既有方法和手段的局限性.如技术的发展存在极限,细微的改善却需付出高昂的代价;对大型系统各个组成部分的孤立优化不能有效协同等.因此他们开始探索一条新的道路,主要立足于现有条件和资源,充分发挥人的因素.他们的成功奠定了运筹学在科学和社会中的地位.

运筹学以数学为主要工具对所研究的问题作出量化的分析.为了能运用数学,需要对实际问题建立合适的数学模型.广泛、合理、灵活地运用数学工具可以使优化效果明显提升.通过对比可以发现,早期运筹学的几个主要应用领域如军事、企业管理等,在运筹学成熟之前,与数学结合得还没有那么紧密,定量分析发挥的作用也没有那么显著.

运筹学无论在解决的问题还是在使用的手段上都凸显综合性.运筹学旨在研究全局性的、多阶段的、涉及多学科的复杂问题,而不满足于得到一个局部的、短期的、孤立的结果.除了运用数学工具,求解大规模实际问题离不开计算机的帮助,对原始数据的分析与解读需要统计学的支撑.熟悉与所研究问题相关的专业背景更是必需的.因此,运筹学研究需要多学科、全过程协同,单枪匹马、闭门造车是不行的.

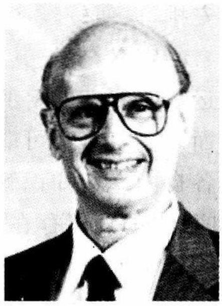
运筹学作为一门应用科学,理论与实践相结合是题中之义.离开了应用的土壤和实际的驱动,可能就没有这么多异彩纷呈和影响深远的成果,未必能聚集起一支孜孜以求、不断探索的研究队伍,对一些问题的研究难免不那么深入.同时,也不可忽视理论研究的指导性和前瞻性.运筹学在前进过程中的每一次飞跃都离不开理论上的突破.将两者对立或断言哪一方面更为重要,都不利于运筹学的自身发展.需要特别指出的是,在应用运筹学解决实际问题的过程中,建立数学模型和在实践中检验、推广成果这两个阶段,并不比理论研究来得容易.而一旦离开了这两步,或者研究无从着手,或者成果束之高阁,都无法实现预期的目的.

由于实际问题的广泛性和复杂性,运筹学研究对象涵盖从离散到连续、从确定到随机、从静态到动态等多种情形.这也导致运筹学的各个分支之间具有很大的跨度,它们的学科基础与主要应用领域也不尽相同.**数学规划**是运筹学最重要的分支,它包括线性规划、非线

性规划、整数规划、多目标规划等内容，主要研究各种类型的函数在自变量满足一定的约束条件下的极值问题；**组合优化**主要研究离散对象的优化问题；**动态规划**常用于求解多阶段优化决策问题；**排队论**、**库存论**、**可靠性理论**等主要研究涉及随机性的优化问题；**博弈论**和**决策论**主要研究单人或多人在一定环境下的策略选择问题. 当然以上划分只针对基本理论和方法而言，在具体应用时，一个实际问题就可能涉及多个分支.

Kenneth Joseph Arrow
(1921—　)
美国经济学家、运筹学家
1972年诺贝尔经济学奖得主

尽管运筹学发展历程并不算长，但它对科技和社会发展却作出了巨大的贡献. 美国运筹学会自1972年起评选每年一度的Franz Edelman奖，授予运筹学应用中的成功案例. 获奖者中不乏IBM、惠普、通用等大型跨国公司的研究团队. 诺贝尔经济学奖历年的获奖者中，有多人是因其发展了运筹学理论与方法以解决经济学中的问题而获奖. 如Arrow对群体决策理论的研究，Koopmans和Kantorvich提出线性规划模型，Markowitz用非线性规划理论研究资产组合投资问题等. 在计算机科学最高奖——Turing奖的获奖者中，也有一些学者的工作与运筹学直接相关，如给出求图的最短路问题算法的Dijkstra和Floyd等. 这些均从不同的侧面佐证了运筹学的重要性.

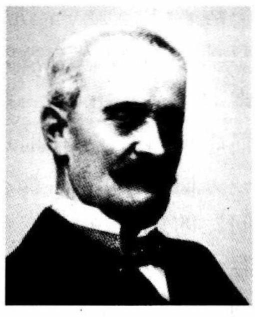


Harry Max Markowitz
(1927—　)
美国经济学家、运筹学家
1990年诺贝尔经济学奖得主

当前在我国发展运筹学研究与应用具有重要的现实意义. 运筹学以优化资源配置、提高效益为目标，对加快转变经济发展方式、提高产业核心竞争力意义明显. 因此，尽管目前我国运筹学应用总体水平还不高，运筹学普及和接受程度参差不齐，但其前景是十分广阔的.

§0.2　运筹学的起源与发展

尽管优化现象在自然界中并不鲜见，寻求最优的探索在社会发展过程中也从未停止，但在相当长的时间内，人们多凭经验寻找最优解，而微积分的出现使这一切有了改变. 1646年，法国数学家Pierre Fermat(1601—1655)给出了函数在某一点取得局部极值的必要条件. 英国科学巨匠Isaac Newton(1643—1727)用导数的语言重述了这一条件，并给出了求多变量函数零点的Newton法. Newton法至今仍在非线性规划求解中发挥着重要的作用. 约一个世纪后，法国数学家Joseph-Louis Lagrange(1736—1813)给出了求条件极值，也即带有等式约束的函数极值问题的Lagrange乘子法. 最早对线性不等式组开展研究的是法国数学家Jean Baptiste Joseph Fourier (1768—1830)，他所研究的问题和后来的线性规划已十分接近. 1847年，法国数学家Augustin Louis Cauchy(1789—1857)给出了求函数极值的最速下降法. 19世纪末Farkas给出的Farkas引理，后来成了非线性规划中著名的



Gyula Farkas
(1847—1930)
匈牙利数学家

Karush-Kuhn-Tucker(KKT) 最优性条件的基础. 但客观地说，在这一阶段，数学界对优化问题重要性的认识尚不充分，因而缺乏系统化的研究，很多零星成果的价值尚未立即显现.

Agner Krarup Erlang
(1878—1929)
丹麦运筹学家

19 世纪末 20 世纪初，科学管理理念开始在美国企业界生根，其先驱者包括 Taylor，Gilbreth，Gantt 等人，他们的理论与实践是运筹学应用的先声. 另一项运筹学早期应用成果来自排队论. 任职于丹麦哥本哈根电话公司的 Erlang 在 20 世纪初给出了排队论中的一些重要结论，其中一些被成功地用于商业实践. 1916 年，英国著名的汽车工程师、英国第一辆柴油汽车的设计者之一 Lanchester 研究了战斗中双方兵力消耗的规律，建立了后来被称为 Lanchester 定律的数学模型. 这本是一项完全基于个人兴趣的研究，但对现代军事理论的发展具有重要意义. 即使在和平环境下，Lanchester 定律也可在商战中找到用武之地.

Frederick William Lanchester
(1868—1946)
英国工程学家

促成运筹学研究蓬勃发展并成为一门独立学科的是第二次世界大战(以下简称二战). 1935 年，英国物理学家 Robert Watson-Watt 提出了雷达的构想. 翌年，英国皇家空军在东海岸的 Bawdsey 设立机构，研究如何利用雷达防空. 在实践中他们发现，雷达防空在技术上是可行的，但在操作上还有很多问题没有解决，如从多部雷达获取的信息如何协同或纠错等. 该机构的负责人 A. P. Rowe 将为解决此类问题而进行的研究称为 "operational research"，这是该词的最早由来. 1940 年，不列颠空战激战正酣，英方一度处于不利局面，英国皇家空军加强了对雷达防空的研究力量. 物理学家 Blackett 带领了一个多学科研究团队，其中包括三名心理学家、三名物理学家、两名数学家、两名数学物理学家、一名天文学家和一名测量人员，对外称为 "Blackett 马戏团"(Blackett's Circus)，取得了卓有成效的实战成果，运筹学的研究也迅速推广至其他军种. 战后，Blackett 继续不遗余力地推广运筹学理念与方法，被称为"运筹学之父"，他还因其在核物理和宇宙辐射领域的贡献而获得 1948 年的诺贝尔物理学奖.

Patrick Maynard Stuart Blackett
(1897—1974)
英国物理学家、运筹学家
1948 年诺贝尔物理学奖得主

运筹学在英国的成功实践使美国在参战后也意识到其重要性. 1942 年，美国物理学家 Morse 受命领导一个团队研究反潜艇作战. 在此前一年，Morse 曾因其在声学研究中的造诣而主持了一项海军声控水雷的项目，从中深切地感受到，在一定意义下，合理使用装备比拥有装备更为重要. Morse 及其团队的成绩十分突出，敌军潜艇沉没的数量是原来的五倍，七分之六的德国用于运送橡胶的船只被截获，有力地打击了敌军. Morse 因此获得了总统荣誉勋章. Morse 后来当选为美国科学院院士和美国工程院院士，他在美国麻省理工学院创立了世界上首个运筹学研究中心，是美国运筹学会的首任主席，被称为"美国运筹学之父".

在苏联，早期运筹学研究的代表人物是 Kantorovich，他在 14 岁时就进入列宁格勒大学数

学力学系学习，18 岁毕业时就有十余篇论文在重要数学期刊上发表. 虽然他的专业是泛函分析、拓扑向量空间，但他同时对经济学有着浓厚的兴趣. 1939 年，他完成了 *The Mathematical Method of Production Planning and Organization* 一书，提出并解决了生产计划编制、原料切割、农作物播种选择等领域中的很多线性规划问题. 这些成果早于美国运筹学家 Dantzig 的工作近十年之久. 但是他的成果由于意识形态的原因在苏联未获重视，也因二战和冷战长期不为西方所知. 1960 年，该书被译成英语在 *Management Science* 上发表，Koopmans 为其撰写了按语. 直至此时，一些美国学者才惊奇地发现，已在美国应用的大部分线性规划问题都可在该书中找到. 1975 年 Kantorovich 和 Koopmans 因他们在线性规划及其在资源优化配置中的贡献分享了诺贝尔经济学奖.

Philip McCord Morse
(1903—1985)
美国物理学家、运筹学家

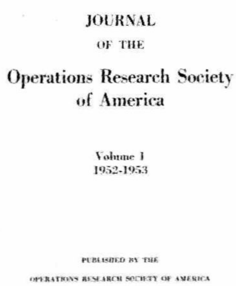
二战结束之后，欧美一些军方的运筹学研究机构和队伍被保留下来，更多学者的研究转向民用，美国逐渐成为运筹学的研究中心. 初创时有军方背景的兰德公司(RAND Corporation)在运筹学发展史上具有重要的地位，20 世纪五六十年代，很多运筹学家的重要工作都是在兰德公司完成的. 自 20 世纪 50 年代起，运筹学各个分支学科相继成熟，其影响也日益增大，运筹学的学术组织、学术会议和学术刊物也从无到有，从弱到强，见证了运筹学发展的历史.

Leonid Vitaliyevich Kantorovich
(1912—1986)
苏联数学家、运筹学家
1975 年诺贝尔经济学奖得主

1950 年，世界上第一份运筹学期刊 *Operational Research Quarterly* 在英国创刊. 1952 年，世界上第一个国别运筹学会——美国运筹学会(Operation Research Society of America, ORSA)在纽约成立，同年，其会刊 *The Journal of the Operation Research Society of America* 创刊，这就是现在国际运筹学界最有影响的学术刊物之一 *Operations Research* 的前身. 1957 年 9 月，首次国际运筹学会议在英国伦敦召开，来自 21 个国家的 250 名代表参加了会议，这次

Tjalling Charles Koopmans
(1910—1985)
美国经济学家
1975 年诺贝尔经济学奖得主

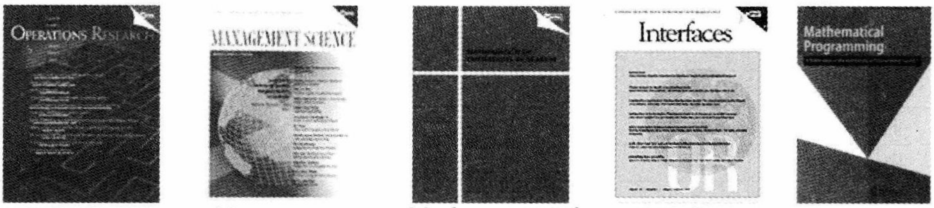
Operational Research Quarterly
(现 *Journal of Operational Research Society*)
创刊号封面



Journal of the Operations Research Society of America
(现 *Operations Research*)
创刊号封面

会议催生了国际运筹学联合会(International Federation of Operational Research Society,IFORS).

1995年,在经历长时间的讨论后,ORSA和创立于1953年的美国管理学会(The Institute of Management Science,TIMS)正式合并成为美国运筹与管理学会(The Institute of Operation Research and the Management Science,INFORMS).这或许表明运筹与管理这两个向来被认为分属自然科学和社会科学的学科已密不可分了.Morse指导的博士,也是世界上首位运筹学博士,John Dutton Conant Little当选为INFORMS首任主席.运筹学的一些分支学科也有相应的组织和刊物,如国际数学优化学会(Mathematical Optimization Society,MOS)及其主办的刊物*Mathematical Programming*和学术会议International Symposium on Mathematical Programming(ISMP),在学术界也有很大的影响.



Operations Research　*Management Science*　*Mathematics of Operations Research*　*Interfaces*　*Mathematical Programming*

INFORMS协会主办的部分学术期刊和*Mathematical Programming*

§0.3　运筹学在中国

无论是源远流长的朴素运筹学思想,还是现代意义下的运筹学研究抑或是运筹学的传播与应用,国人的贡献都不容忽视.以一节的篇幅不可能对这些成就作一全景式的展示,因此,我们只能摘取其中的几个片断予以简单介绍.本节中的很多问题都与图有关,一些概念的严格表述将在第四章中详细给出,但现在理解本节内容应不会有太大困难.

(一)田忌赛马和民夫运粮

田忌赛马的故事发生在公元前3世纪的战国时期.《史记·孙子吴起列传》中有下面的记载.

忌数与齐诸公子驰逐重射.孙子见其马足不甚相远,马有上、中、下辈.于是孙子谓田忌曰:"君弟重射,臣能令君胜."田忌信然之,与王及诸公子逐射千金.及临质,孙子曰:"今以君之下驷与彼上驷,取君上驷与彼中驷,取君中驷与彼下驷."既驰三辈毕,而田忌一不胜而再胜,卒得王千金.

这段文字的大意是:齐国大将田忌与齐王赛马,双方各出上、中、下等马一匹,进行一对一的比赛,用不同等级马匹比赛三场,赢得场数多的一方获胜.由于相同等级马的实力都是田忌的为弱,而双方均按上、中、下等的顺序遣马出战,每次都以田忌大败而告终.后来,军

事家孙膑给田忌出了个主意，悄悄改用下、上、中等的顺序应战. 由于上等马总是强于中等马，中等马总是强于下等马，田忌依照此法果然取得了胜利.

用现代博弈论的观点来看，双方可采取的策略为三个等级马匹的任意排列顺序，共有 $3!=6$ 种. 表 0.1 表示双方采取不同策略时可能有的 $3!\times 3!=36$ 种结果，其中 1 表示田忌胜，-1 表示田忌败. 可以看到大部分情形都是田忌落败，这是由田忌马匹的相对劣势所决定的. 但由于对方总是按上、中、下等的顺序出战，这就给了孙膑和田忌可乘之机. 注意到该列第五个元素为 1，说明田忌采取该元素所在行对应的策略就会获胜，这正是孙膑给田忌的建议. 当然如果对方也可能采取其他策略的话，那么从总体来看还是田忌处下风，严格的数学演算到第八章就完全清楚了.

表 0.1

齐王策略 / 田忌策略	上中下	上下中	中上下	中下上	下上中	下中上
上中下	-1	-1	-1	1	-1	-1
上下中	-1	-1	1	-1	-1	-1
中上下	-1	-1	-1	-1	-1	1
中下上	-1	-1	-1	-1	1	-1
下上中	1	-1	-1	-1	-1	-1
下中上	-1	1	-1	-1	-1	-1

田忌赛马是运筹学思想的一个典型应用. 孙膑并没有让田忌去花重金购置更好的马匹，而是着眼于最大限度发挥现有资源的价值，可谓深得运筹学的精髓.

《梦溪笔谈》是北宋科学家沈括编撰的一部笔记体科学巨著，其中《官政一》篇中有下面一段文字：

凡师行，因粮于敌，最为急务. 运粮不但多费，而势难行远. 余尝计之，人负米六斗，卒自携五日干粮，人饷一卒，一去可十八日（米六斗，人食日二升. 二人食之，十八日尽）；若计复回，只可进九日. 二人饷一卒，一去可二十六日（米一石二斗，三人食日六升，八日则一夫所负已尽，给六日粮遣回. 后十八日，二人食日四升并粮）；若计复回，止可进十三日（前八日日食六升. 后五日并回程，日食四升并粮）. 三人饷一卒，一去可三十一日（米一石八斗，前六日半四人食日八升. 减一夫，给四日粮；十七日三人食日六升. 又减一夫，给九日粮；后十八日，二人食日四升并粮）；计复回止可进十六日（前六日半日食八升. 中七日日食六升，后十一日并回程日食四升并粮）. 三人饷一卒，极矣，若兴师十万. 辎重三之一，止得驻战之卒七万人，已用三十万人运粮，此外难复加矣.

“兵马未动、粮草先行”，后勤保障对战争胜负有决定意义. 特别是在偏远地区敌境内作战时，如何从后方接运粮食保障部队供给就成为统帅机关考虑的第一要务了. 沈括曾执掌北宋边境地区的军政大权，负责对西夏的防御，对此点有深刻的体会. 上述文字定量地给出了部队征战时间、地域和所需民夫数量的关系，说明在古代即有依靠数学知识科学解决军事后勤问题的实例.

(二) 打麦场的选址问题

20 世纪 50 年代，在钱学森等人的倡导和推动下，现代意义的运筹学研究与应用在我国起步. “运筹” 一词最早出自《史记 · 高祖列传》中，刘邦对其主要谋士张良的评价 ——“运筹策帷帐之中，决胜于千里之外”，后又演变为成语“运筹帷幄”. 选定“运筹” 一词为译名传神地表达了这一学科的特点、意义和作用.

著名数学家华罗庚是我国运筹学研究的奠基者之一. 20 世纪五六十年代，华罗庚和中国科学院数学研究所、中国科学技术大学等单位的师生在北京郊区农村参加生产实践，提出并解决了不少相关的运筹学问题，所得部分成果以“数学方法在麦收中的应用” 为题在 1961 年的《数学学报》上发表[1]. 该论文包含的内容非常丰富，以下仅以“打麦场选址问题” 为例作一介绍. 在现在的文献中，这一问题被称为图上的 1- 中心(1-median) 选址问题，国外学者约在该文发表十年之后才得到类似的结果[2].

假设一村中有数块麦田，麦子收割后先在麦田附近的道路边堆放，再集中送至打麦场. 将打麦场设于何处才能使运力最省?解决这一问题的方法可用下面一段口诀来概括：

道路无回环，抓各端，最小的进一站.
道路有回环，每圈甩一段，化为无回环，然后照样算.
甩法有不同，结果一一算，算后再比较，最优可立断.

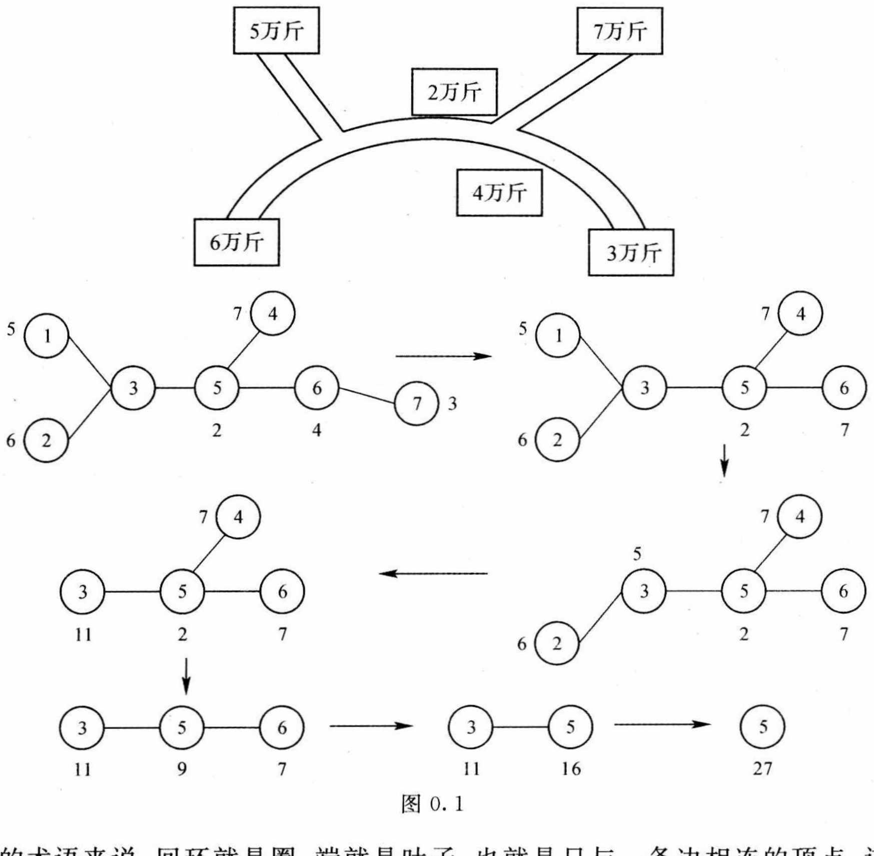


图 0.1

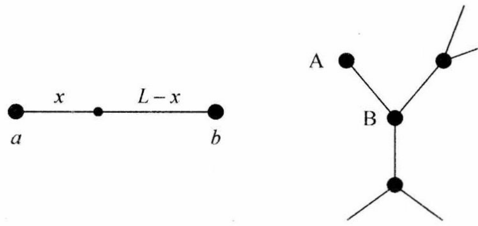
用图的术语来说，回环就是圈，端就是叶子，也就是只与一条边相连的顶点. 该方法首

先将道路和麦田抽象为图. 麦田以及道路的起终点、交叉口作为图的顶点，道路作为连接两个顶点的边. 图分为有圈图和无圈图两种. 无圈图的处理比较简单：找出当前所有叶子中产量最小的(若叶子不为麦田，则其产量为 0)，将其产量合并到与之相邻的那一个顶点上去，同时删去这个叶子及与其相邻的边. 重复上述过程，直至最后只剩下一个顶点，该顶点即为打麦场的位置. 图 0.1 给出了一个例子及其求解过程.

为证明该方法的合理性，我们从最简单的情形着手. 如果只有一条道路，位于道路两端的麦田产量分别为 a 和 b，其中 $a \leqslant b$. 假设打麦场设在道路上离产量为 a 的麦田 x 米远处，则它与产量为 b 的麦田的距离为 $(L-x)$ 米，其中 L 为道路的总长度，是一个常数(图 0.2(a)). 这样总的运输量为

$$ax + b(L-x) = bL + (a-b)x$$

显然上式当 $x = L$ 时取得最小值，也就是说打麦场应设在产量多的麦田处.



(a) (b)

图 0.2

再来看一般情形(图 0.2(b))，记当前产量最小的叶子顶点为 A，由叶子定义可知与它相邻的顶点 B 是唯一的. 如果打麦场设在 A 处或 A 和 B 之间的连线上，那么除 A 外其他麦田的麦子都需通过顶点 B 运送到打麦场. 由于 A 是所有麦田中产量最小的，通过 B 运送到打麦场的麦子数量必不少于 A 处的麦子产量. 根据前面对简单情形的分析，在 A、B 之间的道路上或 A 处建打麦场，不会比在 B 处建打麦场更好. 因此可以首先排除在 A、B 之间或 A 处建打麦场. 进一步地，如果不在上述地方建打麦场，由于 A 只与一条边相连，A 处麦子必须经过 B 处才能运到打麦场，因此将 A 处的麦子产量合并到 B 处不会改变最优解. 这就是“最小的进一站”的原因.

如果道路有圈的话，删去圈中的任一条边就可将其转化为无圈的情形. 但删去圈的哪一条边则需通过试验，这就是后半段口诀的含义，具体的证明过程这里从略. 至此，这一问题得到了彻底的解决.

上述研究的初衷是解决农业生产中的实际问题，为使成果能为更多的人所理解和应用，华罗庚先生特别编写了形象而又具操作性的口诀以代替抽象的数学描述，使其在学术论文中独树一帜. 如何使从事实际工作的人员更好地接受和运用数学研究的成果，直至现在仍是一个课题，该文作出了很好的示范.

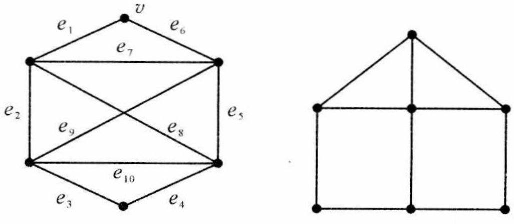
(三) 中国邮递员问题

在运筹学界，有一个问题以中国命名，这就是所谓的**中国邮递员问题**(Chinese Postman Problerm，CPP). 最早提出这一问题的是山东师范学院(现山东师范大学)的管梅谷教授[3].

邮递员每天需在自己的辖区分发信件、报刊. 他从邮局领取邮件出发，走过辖区内(或需分发信件)的每条街道，最后回到邮局. 选择怎样的一条路线才能使走过的路程最短？尽管名为邮递员问题，类似的问题在很多行业都存在.

尝试求解这个问题，会发现它和“一笔画”游戏有关. 如果能从图的某个顶点出发，按一定

路线经过所有边恰好一次,最后回到起点,这样的图就是能够一笔画的.把邮递员要经过的街道用一个图来表示,图的边代表街道.如果这个图能够一笔画,那么这条路线必定是最优的(图0.3(a)).但并不是所有的图都是可一笔画的,例如图0.3(b)中的图就不能一笔画.

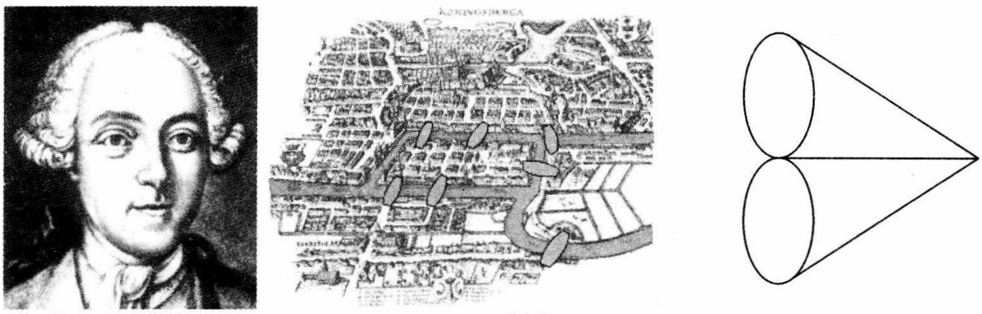


$e_1e_2e_{10}e_8e_7e_9e_3e_4e_5e_6$

(a)　　　　(b)

图 0.3

判断哪些图可以一笔画的问题是由 Euler 于1736年解决的[4].哥尼斯堡(Königsberg,现名加里宁格勒)始建于13世纪,是普鲁士重要的商业中心.普瑞格尔(Pregel)河穿过小城,城中有七座横跨在河流上的桥梁(图0.4(b)).市民在城中散步时会思考这样的问题:能否不重复地走过所有桥梁,最后回到出发点?如果把每座桥梁看作图的一条边,这一问题就等价于图0.4(c)中的图的一笔画问题.Euler 解决了这一问题,并进而思考任一图可一笔画的充要条件.记载有这些探索的论文[5]常被认为是图论的第一篇论文.可以一笔画的图也因此被称为**Euler 图**,一笔画出的路线称为**Euler 环游**.显然,若某个图是 Euler 图,则从任一个顶点可以沿着 Euler 环游到达其他任何一个顶点,并且与任一顶点连接的边必为偶数条,因为任一顶点必是 Euler 环游中相继经过的两条边的端点.事实上,这些条件还是充要的.



Leonhard Euler
(1707－1783)
瑞士数学家
(a)

Königsberg 略图
(b)

(c)

图 0.4

但是 Euler 并没有给出 Euler 环游的求法,给出 Euler 图的一条 Euler 环游并非都是不假思索即可完成的.如图0.3(a)所示的 Euler 图,若从顶点 v 出发,选择 $e_1e_7e_6$ 这样的路线并不能得到一个 Euler 环游.第一个求 Euler 环游的算法一百余年后方由德国数学家 Carl Hierholzer 给出.下面我们给出一种更为简单的方法.先找到图中的一个不走重复边的圈 C.如果 C 包含所有的边,它就是 Euler 环游.若不然,图中必有边不在圈 C 中,并且必有某条边与 C 中某条边有公共顶点 u,从 u 出发再找一个圈 C',C' 中的边互不相同,也不与圈 C 中的边重复.设两个圈中与 u 连接的边分别为 e_1,e_2 和 e_3,e_4,则可将这两个图按

$$(u)\underbrace{e_2\cdots e_1}_{C}(u)\underbrace{e_4\cdots e_3}_{C'}(u)$$

的顺序并为一个(图0.5).上述过程持续进行下去,直至所有边都已被包含在一个圈中为

止，这个圈就是需求的 Euler 环游. 图 0.6 给出了按上述方法求图 0.3(a) 中图的 Euler 环游的过程.

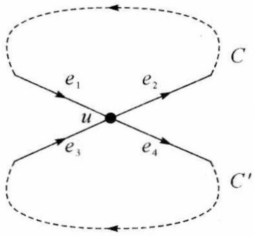
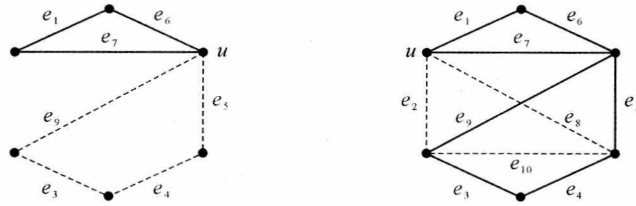


图 0.5



C: $e_1e_7e_6$　C': $e_3e_4e_5e_9$　　C: $e_6e_1e_7e_9e_3e_4e_5$　C': $e_2e_{10}e_8$

图 0.6

对不能一笔画的图，如果邮递员需走过所有的边，那么圈中有些边必须经过两次以上. 此时这些边的选择成为关键. 管梅谷在提出问题的同时还给出了该问题的一个指数时间算法，该问题的多项式时间算法将在第四章予以介绍.

(四) 统筹法和优选法

20 世纪 60 年代，华罗庚将国际上新发现的两项运筹学成果在国内加以推广，即“**统筹法**”和“**优选法**”，有时也合称“双法”. 这是华罗庚在充分调研当时我国特别是企业的实际情况后，精心选择的两个他认为最具推广价值和现实意义的方法.

1956 年，杜邦公司(Du Pont)引进了一台 UNIVAC I 型计算机，这是全世界最早的商用计算机之一. 公司希望利用它能更好地解决一些计划安排和调度问题. 为此目的，Morgan R. Walker 和 James E. Kelley 着手研究，并于一年之后提出了所谓的**关键路径法**(critical path method, CPM). 这一方法在缩短公司因意外而导致的生产停顿时间方面有明显的效果. 与此同时，为美国海军研制北极星导弹的研究团队也给出了类似的方法，用于对导弹研发这一巨大工程中的各个环节进行合理安排. 他们把它称之为**计划评价技术**(program evaluation and review technique, PERT). 在向国内推广时，华罗庚将它们统称为**统筹法**(现在国内多数运筹学书籍中恢复了关键路径法的名称). 1965 年 6 月 6 日，《人民日报》以整版的篇幅发表了华罗庚所写的“统筹法平话”一文，文章以通俗的语言介绍了统筹法的目的、意义和具体方法，其中就包括大家耳熟能详的“泡茶”的例子.

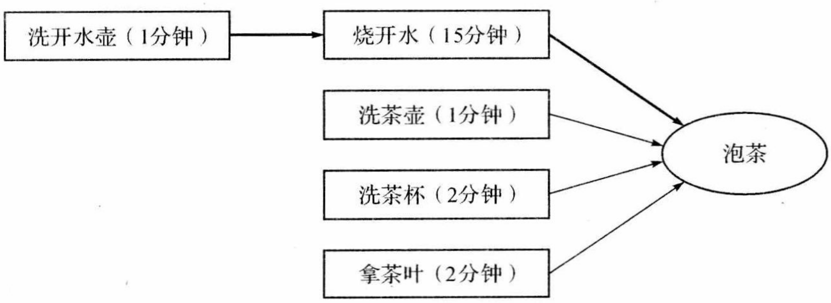


图 0.7

泡一杯茶需要多道步骤，每道程序所需时间不同，并且有些步骤之间存在先后次序关系(图 0.7). 如何安排这些步骤才能最快喝到热茶呢？一种方案是先洗开水壶，在烧开水的同时洗茶壶、茶杯，拿茶叶. 当然还有其他的方案，如先洗开水壶和茶壶、茶杯，拿好茶叶后