新三导丛书 XIN SANDAO CONGSHU

线性代数

（同济·第六版）

导教·导学·导考

（第3版）

徐　仲　陆　全　安晓虹◎编

- 自主学习（知识要点提示）
- 课程过关（典型例题解析）
- 考研备考（考研真题分析）
- 教师备课（重点难点归纳）

西北工业大学出版社

新三导丛书

XIANXING DAISHU DAOJIAO DAOXUE DAOKAO

线性代数

(同济·第六版)

导教·导学·导考

(第3版)

徐仲 陆全 安晓虹 编

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书通过简明的理论介绍与方法总结，以及对大量有代表性的典型例题进行分析、求解和评注，揭示了线性代数的解题方法与技巧. 另外，书中给出了同济大学出版的《线性代数》(第六版)教材中各章习题的解答，书末附录中提供了两套考试真题及解答. 编写本书的目的在于帮助读者把握教学、学习和考试要求，巩固和加深对基本概念的理解，增强运算能力，提高分析问题、解决问题和应试能力.

本书可作为高等院校学生学习线性代数课程的指导书，也可供报考硕士研究生的读者、有关教师及科技工作者参考.

图书在版编目（CIP）数据

线性代数导教・导学・导考：同济：第六版/徐仲，陆全，安晓虹编. —西安：西北工业大学出版社，2016.1

（新三导丛书）

ISBN 978-7-5612-4655-9

Ⅰ.①线… Ⅱ.①徐… ②陆… ③安… Ⅲ.①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 275461 号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路 127 号　　**邮编**：710072
电　　话：(029)88493844　88491757
网　　址：http://www.nwpup.com
印 刷 者：兴平市博闻印务有限公司
开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张：11.75
字　　数：281 千字
版　　次：2016 年 1 月第 3 版　　2016 年 1 月第 1 次印刷
定　　价：28.00 元

第 3 版前言

本书是在第 1 版(2005 年 1 月出版)的基础上,参照同济大学编写的《线性代数》(第六版)做了进一步的修订. 主要改动之处如下:

1. 对各章第四部分"常考题型及考研典型题精解"进行增加或替换,新的例题均为近 5 年的考研真题;

2. 参照《线性代数》(同济 · 第六版)对第五部分"课后习题全解"进行修订;

3. 对各章后的学习效果两级测试题进行增删、充实;

4. 更新附录"线性代数考试真题".

本次的修订工作由西北工业大学理学院应用数学系安晓虹承担.

我们衷心感谢广大读者对本书的关心,并欢迎继续提出宝贵意见.

编　者

2015 年 8 月于西北工业大学

第 1 版前言

线性代数课程是高等学校普遍开设的一门重要的数学基础课.在全国统一命题的硕士研究生入学数学考试中，线性代数内容占25%左右(满分150分).其中“数学一”含三小题、两大题，共30分；“数学二”含三小题、两大题，共33分；“数学三”和“数学四”均含三小题、两大题，共38分.

线性代数这门课程具有理论的抽象性、逻辑推理的严密性和工程应用的广泛性.读者在学习线性代数时，往往感到抽象难懂，对基本概念及定理结论在理解上感到困难；对如何把所学内容具体应用到解题上感到缺少思路，难以下手；对于课程结束时的考试和考研的相关内容把握不准，迫切需要得到具体指导与帮助.本书就是为解决这些问题而编写的.

本书按照同济大学数学教研室编的最新版《线性代数》(第四版)的自然章编排，每一章由以下六部分内容构成：

一、考点研究——编写本部分的目的主要是使读者明确本章的重点、常考考点以及应掌握的程度.编写中参考了《全国硕士研究生入学统一考试——数学考试大纲》和西北工业大学等国内重点高等学校制订的《线性代数教学大纲》，并将其内容加以细化和归纳，使学生能够正确把握教学、学习和考试的要求.

二、重要结论与公式——本部分将相应章节的内容进行简明扼要的叙述、归纳和总结，部分内容列表或借助框图直观地进行说明.对于有些内容未按章节顺序给出，这是由于线性代数的知识前后联系紧密，相互渗透，集中给出有利于加深读者对基本概念、公式、定理等重点内容的理解和正确应用.

三、主要方法——本部分给出相应章节一些主要计算过程的描述，以使读者熟悉具体计算步骤，提高动手能力.

四、常考题型及考研典型题精解——精选线性代数中具有代表性的部分典型例题，通过对典型例题的解题分析，归纳出线性代数中一些问题的解决方法和技巧，使读者可以举一反三、触类旁通.对于那些需要了解更多典型题的读者，可参阅《线性代数典型题分析解集》(第2版)(西北工业大学出版社，2000).

五、课后习题全解——本部分给出《线性代数》(同济大学·第四版)各章习题的全部解答.由于线性代数中解题方法的多样性，对于具有多种解法或答案的习题，一般只给出一种解法或答案.

六、学习效果两级测试题及答案——本部分根据线性代数课程考试和考研内容，精选适量的自测题，并附有答案和部分提示.读者可以通过这些测试题进一步掌握解题要领，巩固和加

深对基本概念的理解,增强解决问题的能力,并检验自己对所学知识掌握的程度.

为了帮助读者了解并适应考试,书末附录中提供了两套线性代数课程考试真题及解答.建议读者在动手做过习题后,再参阅答案.

本书由徐仲、陆全分工合作完成.书中的疏漏和不妥之处,敬请读者指正.

编 者

2004 年 11 月于西北工业大学

目　　录

第一章 行 列 式

行列式是线性代数中的重要工具，在求解线性方程组、求逆矩阵、判断向量组的线性相关性、求矩阵的特征值、判断二次型的正定性等方面都要用到.

一、考点研究

1. 考试内容与考试要求

考试内容	行列式的概念和基本性质　　行列式按行（列）展开定理
考试要求	（1）了解 n 阶行列式的概念，掌握行列式的性质. （2）会应用行列式的性质和行列式按行（列）展开定理计算行列式. （3）会用克拉默（Cramer）法则.

2. 考点分析

行列式是代表某个数的一个记号. 计算行列式即是把这个记号所代表的数具体计算出来. 行列式的计算方法多、技巧性强，有关行列式的习题也可以编得很难，但这不一定是考点. 在考研试题的线性代数部分中，纯粹考行列式的题很少，且以低阶行列式的计算为主，少数的 n 阶行列式也容易计算. 因此，读者应该以熟悉行列式的性质、掌握行列式的基本计算方法为重点，对于 3，4 阶行列式能熟练计算，而一般 n 阶行列式计算只要适当要求即可，不必很难.

二、重要结论与公式

1. 排列的性质

性质 1	交换排列中任意两个数，将改变排列的奇偶性.
性质 2	n 个数 $1,2,\cdots,n$ 可以构成 $n!$ 个不同的 n 阶排列，其中奇、偶排列的个数各占 $\frac{n!}{2}$.
性质 3	任一 n 阶排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 与标准排列 $12\cdots n$ 都可以经过一系列对换互变，且所做对换的次数与排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 有相同的奇偶性.

2. 对角线法则

对于 2 阶与 3 阶行列式,可以采用对角线法则来记它们所代表的数:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \underline{a_{11}a_{22}} - \underline{a_{12}a_{21}}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \underline{a_{11}a_{22}a_{33}} + \underline{a_{12}a_{23}a_{31}} + \underline{a_{13}a_{21}a_{32}} - \underline{a_{13}a_{22}a_{31}} - \underline{a_{12}a_{21}a_{33}} - \underline{a_{11}a_{23}a_{32}}$$

即实线上 2 个(3 个) 元素的乘积取正号,虚线上 2 个(3 个) 元素的乘积取负号,再求其代数和就是行列式的值.

3. 一些特殊行列式的值

(1) 上(下) 三角行列式等于其主对角线上元素的乘积,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(2) 次三角行列式的值等于次对角线元素的乘积并添加适当符号,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & ⋰ & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & ⋰ & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

(3) 分块三角行列式可化为低阶行列式的乘积:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ * & \cdots & * & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{m1} & \cdots & a_{mm} \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & * & \cdots & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & \cdots & * & a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * & a_{m1} & \cdots & a_{mm} \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} =
$$

$$
(-1)^{mn}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}
$$

(4) 范德蒙(Vandermonde)行列式直接套用公式：

$$
\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i - x_j) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\times (x_3 - x_2)\cdots(x_n - x_2)\times \cdots \cdots \times (x_n - x_{n-1})
$$

4. 行列式的基本性质

性质 1 行列式与其转置行列式的值相等.

性质 2 行列式中某一行(列)如果有公因数 k，则 k 可以提到行列式符号外. 特别地，若行列式中某行(列)元素全是零，则行列式的值为零.

性质 3 对换行列式中某两行(列)的位置，行列式的值改变符号. 特别地，如两行(列)元素对应相等或成比例，则行列式的值是零.

性质 4 如果行列式中某行(列)的每个元素都是两个数的和，则这个行列式可以拆成两个行列式的和，这两个行列式分别以这两组数作为行(列)，其余各行(列)与原行列式相同.

性质 5 把行列式某行(列)的 k 倍加至另一行(列)，行列式的值不变.(在行列式计算中，往往先用这条性质作恒等变形，以期简化计算.)

5. 行列式按行(列)展开公式

设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$,则

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$
$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

其中

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是 a_{ij} 的代数余子式.

6. 有关行列式的重要公式

行列式一行(列)元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \qquad (i\neq j)$$
$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0 \qquad (i\neq j)$$

7. Cramer 法则

定理 对于 n 个未知数 n 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \quad\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

如果系数行列式 $D=|a_{ij}|\neq 0$,则方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad \cdots,\quad x_n=\frac{D_n}{D}$$

其中 D_j 是把 D 中第 j 列换成常数项所得到的行列式,即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

推论 含 n 个未知数 n 个方程的齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \quad\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

有非零解(即无穷多解)的充分必要条件是它的系数行列式$D=0$.

注 该推论的充分性由克拉默法则即得,而必要性由第三章的齐次线性方程组有无穷多解的判定条件得到.

三、主要方法

除了较简单的行列式可以利用定义直接计算外,一般行列式有以下基本计算方法.

方法一 利用行列式的性质对行列式做恒等变形化为上(下)三角行列式或次三角行列式,从而直接求得其值.

方法二 利用按行(列)展开定理降低行列式的阶数.但在展开之前往往先通过对行列式恒等变形,使得新行列式的某一行(列)中有较多的零,再按该行(列)展开.

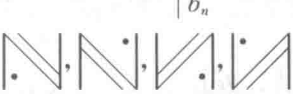
在计算行列式时,应根据行列式的特点和元素的规律性,采取适当的次序和步骤来进行,因此,首先观察和研究行列式元素的规律性是重要的.

计算行列式的常用技巧有三角化法、升阶(或加边)法、递推法、数学归纳法等.

四、常考题型及考研典型题精解

例 1-1 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ & a_2 & b_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_n & & & & a_n \end{vmatrix}$$

分析 对于形如  的所谓两条线的行列式,可直接展开降阶,再利用三角或次三角行列式的结果直接计算.

解 按第 1 列展开得

$$D_n=a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & a_n \end{vmatrix}+b_n(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} b_1 & & & \\ a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} \end{vmatrix}=$$

$$a_1a_2\cdots a_n+(-1)^{n+1}b_1b_2\cdots b_n$$

例 1-2 计算 $2n$ 阶行列式

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & & & b \\ & a & & & & & b & \\ & & \ddots & & & \iddots & & \\ & & & a & b & & & \\ & & & c & d & & & \\ & & \iddots & & & \ddots & & \\ & c & & & & & d & \\ c & & & & & & & d \end{vmatrix}$$

分析 这是形如 $\left|\bowtie\right|$ 的所谓两条线行列式，可直接展开得到递推公式.

解 按第1行展开得

$$D_{2n}=a\begin{vmatrix} a & & & & b & 0 \\ & \ddots & & \iddots & & \\ & & a\ \ b & & & \\ & & c\ \ d & & & \\ & \iddots & & \ddots & & \\ c & & & & d & \\ 0 & & & & & d \end{vmatrix}+b(-1)^{1+2n}\begin{vmatrix} 0 & a & & & & b \\ & & \ddots & \iddots & & \\ & & & a\ \ b & & \\ & & & c\ \ d & & \\ & & \iddots & \ddots & & \\ & c & & & & d \\ c & & & & & 0 \end{vmatrix}=$$

$$ad\begin{vmatrix} a & & & & b \\ & \ddots & & \iddots & \\ & & a\ \ b & & \\ & & c\ \ d & & \\ & \iddots & & \ddots & \\ c & & & & d \end{vmatrix}-bc(-1)^{(2n-1)+1}\begin{vmatrix} a & & & & b \\ & \ddots & & \iddots & \\ & & a\ \ b & & \\ & & c\ \ d & & \\ & \iddots & & \ddots & \\ c & & & & d \end{vmatrix}=$$

$$(ad-bc)D_{2n-2}$$

于是

$$D_{2n}=(ad-bc)D_{2(n-1)}=(ad-bc)^2D_{2(n-2)}=\cdots=(ad-bc)^{n-1}D_2=(ad-bc)^n$$

例 1-3 计算 $n+1$ 阶行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & a_0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\qquad (a_1a_2\cdots a_n\neq 0)$$

分析 对于形如 $\left|\nwarrow\right|$，$\left|\nearrow\right|$，$\left|\swarrow\right|$，$\left|\searrow\right|$ 的所谓**箭形**(或**爪形**)**行列式**，可以直接利用行列式性质将其化为三角或次三角行列式来计算.

解

$$D_{n+1}\xlongequal[\substack{\vdots \\ c_{n+1}-\frac{1}{a_n}c_1}]{\substack{c_{n+1}-\frac{1}{a_1}c_n \\ c_{n+1}-\frac{1}{a_2}c_{n-1}}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & a_0-\frac{1}{a_1}-\cdots-\frac{1}{a_n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$(-1)^{\frac{(n+1)n}{2}}(a_0-\frac{1}{a_1}-\cdots-\frac{1}{a_n})a_1a_2\cdots a_n$$

例 1-4 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$$

分析 该行列式具有各行元素之和相等的特点，可将第 $2,3,\cdots,n$ 列都加到第 1 列，则第 1 列的元素相等，再进一步化简. 对于各列元素之和相等的行列式，也可类似处理.

解

$$D_n\xlongequal[\substack{\vdots \\ c_1+c_n}]{\substack{c_1+c_2 \\ c_1+c_3}}\begin{vmatrix} x_1+\cdots+x_n-m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1+\cdots+x_n-m & x_2-m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1+\cdots+x_n-m & x_2 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}\xlongequal[\substack{\vdots \\ r_n-r_1}]{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1}}$$

$$\begin{vmatrix} x_1+\cdots+x_n-m & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & -m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix}=(-m)^{n-1}(x_1+\cdots+x_n-m)$$

例 1-5 设 x_1,x_2,x_3 是方程 $x^3+px+q=0$ 的 3 个根，则行列式 $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}=\underline{\ 0\ }$.

分析 该行列式具有行(列) 和相等的特点. 由于 x_1,x_2,x_3 是方程 $x^3+px+q=0$ 的 3 个根，从而

$$x^3+px+q=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=$$
$$x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3$$

可见 $x_1+x_2+x_3=0$，故

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}\xlongequal[c_1+c_3]{c_1+c_2}\begin{vmatrix} x_1+x_2+x_3 & x_2 & x_3 \\ x_1+x_2+x_3 & x_1 & x_2 \\ x_1+x_2+x_3 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & x_2 & x_3 \\ 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}=0$$

例 1-6 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} \qquad (b_1b_2'\cdots b_n\neq 0)$$

分析　该行列式的各行含有共同的元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，可在保持原行列式值不变的情况下，增加一行一列(称为**升阶法或加边法**)，适当选择所增行(或列)的元素，使得下一步化简后出现大量的零元素.

解

$$D_n \xlongequal{\text{升阶}} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} \xlongequal[r_{n+1}-r_1]{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1\\ \vdots}} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix} \xlongequal[c_1+\frac{1}{b_n}c_{n+1}]{\substack{c_1+\frac{1}{b_1}c_2\\ c_1+\frac{1}{b_2}c_3\\ \vdots}}$$

$$\begin{vmatrix} 1+\dfrac{a_1}{b_1}+\cdots+\dfrac{a_n}{b_n} & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix} = b_1b_2\cdots b_n\left(1+\frac{a_1}{b_1}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}\right)$$

例 1-7　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad (n\geqslant 3)$$

分析　该类行列式称为**三对角行列式**，通常的计算方法是将它按某行(列)展开，得到 D_n 与 D_{n-1} 和 D_{n-2} 的关系，再进一步递推求解或归纳证明.

解

$$D_n \xlongequal{\text{按第 1 行展开}} 2D_{n-1}+1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 1 & & & \\ & 2 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2\end{vmatrix}=2D_{n-1}-D_{n-2}$$

把上面的递推公式改写为

$$D_n-D_{n-1}=D_{n-1}-D_{n-2}$$

利用上式继续递推，可得

$$D_n-D_{n-1}=D_{n-1}-D_{n-2}=\cdots=D_2-D_1$$

由于 $D_2=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3, D_1=2$，则有 $D_n-D_{n-1}=1$. 从而又得

$$D_n=D_{n-1}+1=(D_{n-2}+1)+1=D_{n-2}+2=\cdots=D_1+(n-1)=n+1$$

例 1-8 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2}\\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n\end{vmatrix}$$

分析 D_n 不是范德蒙行列式，但可考虑构造 $n+1$ 阶的范德蒙行列式，再利用范德蒙行列式的结果，间接地求出 D_n 的值.

解 构造 $n+1$ 阶范德蒙行列式

$$f(x)=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 & x^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & x^{n-2}\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & x^{n-1}\\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & x^n\end{vmatrix}$$

将 $f(x)$ 按第 $n+1$ 列展开，得

$$f(x)=A_{1,n+1}+A_{2,n+1}x+\cdots+A_{n,n+1}x^{n-1}+A_{n+1,n+1}x^n$$

其中 x^{n-1} 的系数为

$$A_{n,n+1}=(-1)^{n+(n+1)}D_n=-D_n$$

又根据范德蒙行列式的结果得