“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材配套教辅

《电磁学与电动力学（第二版）》习题解答

胡友秋　程福臻　叶邦角　刘之景　胡岳东　编著

科学出版社

"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材配套教辅

《电磁学与电动力学（第二版）》习题解答

胡友秋　程福臻　叶邦角　刘之景　胡岳东　编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是与中国科学技术大学的《电磁学与电动力学（第二版）》（分上、下两册）完全配套的习题解答，是学习电磁学与电动力学课程的配套辅导书.旨在帮助学生理解课本的知识，加深对基本概念的理解，加强对基本解题方法与技巧的掌握，为学生提供完整而详细的课后习题答案，进而提高学习能力和应试水平，帮助学生巩固所学知识，也可以用来帮助学生完成考研备考学习.

本书分电磁学和电动力学两个部分，其中电磁学部分（上册）包含 10 章，电动力学部分（下册）包含 8 章，章节的划分与教材一致，分别解答《电磁学与电动力学（第二版）》（分上、下两册）中所布置的全部习题.在解题过程中，我们尽力做到概念清晰、方法简洁、规范，与课堂内容密切配合. 除极个别习题之外，每题只给了一种解法，供教师和同学参考.

图书在版编目 (CIP) 数据

《电磁学与电动力学（第二版）》习题解答 / 胡友秋等编著. —北京：科学出版社，2016.1

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材配套教辅

ISBN 978-7-03-046825-3

Ⅰ. ①电… Ⅱ. ①胡… Ⅲ. ①电磁学－高等学校－教学参考资料 ②电动力学－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 319936 号

责任编辑：昌 盛 王 刚 / 责任校对：邹慧卿

责任印制：霍 兵 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

安泰印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016 年 1 月第 一 版 开本：720×1 000 B5

2016 年 1 月第一次印刷 印张：12 1/4

字数：290 000

定价：33.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

目　　录

《电磁学与电动力学（上册）（第二版）》习题解答

《电磁学与电动力学（下册）（第二版）》习题解答

《电磁学与电动力学（上册）（第二版）》习题解答

第 1 章　真空中的静电场

1.1　把总电量为 Q 的同一种电荷分成两部分，一部分均匀分布在地球上，另一部分均匀分布在月球上，使它们之间的库仑力正好抵消万有引力. 已知 $1/(4\pi\varepsilon_0)=9.00\times10^9\,\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2}$，引力常数 $G=6.67\times10^{-11}\,\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$，地球质量为 $5.98\times10^{24}\,\text{kg}$，月球质量为 $7.34\times10^{22}\,\text{kg}$.

（1）求 Q 的最小值；

（2）如果电荷分配与质量成正比，求 Q.

解　（1）设地球上带电 Q_E，月球上带电 Q_M，由题意

$$Q_\text{E}+Q_\text{M}=Q,\quad \frac{GMm}{r^2}=\frac{Q_\text{E}Q_\text{M}}{4\pi\varepsilon_0 r^2},\quad \frac{Q_\text{E}Q_\text{M}}{4\pi\varepsilon_0}=GMm$$

由不等式 $Q_\text{E}+Q_\text{M}\geqslant 2\sqrt{Q_\text{E}Q_\text{M}}$，可求得 Q 的最小值

$$\begin{aligned}Q_{\min}&=2\sqrt{Q_\text{E}Q_\text{M}}=2\sqrt{4\pi\varepsilon_0 GMm}\\&=2\sqrt{\frac{6.67\times10^{-11}\times5.98\times10^{24}\times7.34\times10^{22}}{9.00\times10^9}}=1.14\times10^{14}(\text{C})\end{aligned}$$

（2）记 $Q_\text{E}=aM$，$Q_\text{M}=am$，则

$$Q=a(M+m),\quad \frac{GMm}{r^2}=\frac{a^2Mm}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

于是有 $a=\sqrt{4\pi\varepsilon_0 G}$，即

$$Q=\sqrt{4\pi\varepsilon_0 G}(M+m)=\sqrt{\frac{6.67\times10^{-11}}{9.00\times10^9}}(5.98\times10^{24}+7.34\times10^{22})=5.21\times10^{14}(\text{C})$$

1.2　真空中有一点电荷 Q 固定不动，另一质量为 m、电荷为$-q$ 的质点，在它们之间的库仑力的作用下，绕 Q 做匀速圆周运动，半径为 r，周期为 T. 证明：

$$\frac{r^3}{T^2}=\frac{qQ}{16\pi^3\varepsilon_0 m}$$

证　设质点速度为 v，则 $v=2\pi r/T$. 根据牛顿第二定律，由库仑力提供质点圆周运动的向心力，即 $\dfrac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\dfrac{m(2\pi r/T)^2}{r}$，于是有 $\dfrac{r^3}{T^2}=\dfrac{qQ}{16\pi^3\varepsilon_0 m}$，证毕.

1.3　有三个点电荷，电量都是 $q=1.6\times10^{-19}\,\text{C}$，分别固定在边长为 $a=3.0\times10^{-10}\,\text{m}$ 的正三角形三个顶点，在这三角形中心 O，有一个质量为 $m=2.3\times10^{-26}\,\text{kg}$，电量为 $Q=-4.8\times10^{-19}\,\text{C}$ 的粒子.

（1）证明：这个粒子处在平衡位置（即作用在它上面的库仑力为零）；

（2）求这粒子以 O 为中心沿一轴线（该轴线过 O 并与三角形的平面互相垂直）作微小振动的频率 ν.

解 （1）处在正三角形中心 O 点的负电荷 Q，受三个顶点正电荷 q 的引力大小相等，均为 $|Q|q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$，$r=\sqrt{3}a/3$ 为 O 点至顶点间的距离. 三个力均指向顶点，两两夹角均为 120°，合力为零.

（2）过 O 点作 x 轴，与三角形所在平面垂直. 当粒子在 x 处时，三个点电荷对粒子的引力沿 x 轴方向的分量为

$$F=3\cdot\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0(r^2+x^2)}\cdot\frac{x}{\sqrt{r^2+x^2}}$$

沿垂直于 x 轴方向的分量为 0.于是粒子沿 x 轴的作微振动的运动方程如下：

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\frac{3Qqx}{4\pi\varepsilon_0(r^2+x^2)^{3/2}}\approx\frac{3Qqx}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

上式表明，粒子作简谐振动，角频率 $\omega=[-3Qq/(4\pi\varepsilon_0 mr^3)]^{1/2}$. 于是

$$\begin{aligned}\nu&=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{-3Qq}{4\pi\varepsilon_0 mr^3}\right)^{1/2}\\&=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{3\times4.8\times10^{-19}\times1.6\times10^{-19}\times8.99\times10^9}{2.3\times10^{-26}\times(\sqrt{3}\times3\times10^{-10}/3)^3}\right]^{1/2}=2.1\times10^{13}\ \text{(Hz)}\end{aligned}$$

1.4 电量为 Q 的两个点电荷，相距 $2l$，在其连线的中垂面上放一点电荷 q_0，求证该点电荷在中垂面上受力的极大值的轨迹是一个圆，并给出该圆的半径.

解 设位于中垂面上的点电荷 q_0 离连线的距离为 r，则由题义，q_0 所受合力 F 与中垂面平行，且与连线垂直，其大小为 $F=2Qq_0r/[4\pi\varepsilon_0(l^2+r^2)^{3/2}]$. 当 $\mathrm{d}F/\mathrm{d}r=0$ 时，F 取极值，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{r}{(l^2+r^2)^{3/2}}\right)=0\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{(l^2+r^2)^{3/2}}-\frac{3r^2}{(l^2+r^2)^{5/2}}=0$$

由上式可解得 $r=l/\sqrt{2}$. 容易验证，该极值为极大值. 这说明，点电荷 q_0 在中垂面上受力极大所在位置的轨迹为一个半径为 $l/\sqrt{2}$ 的圆.

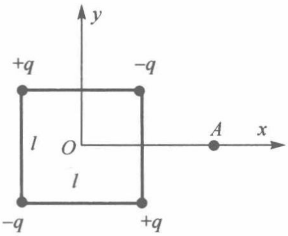
1.5 习题 1.5 图中的 q 和 l 都已知，这样的四个点电荷称作平面电四极子. 图中 A 点与电四极子在同一平面内，它到电四极子中心 O 的距离为 x，AO 与正方形的两边平行.

（1）求 A 点的电场强度 $\boldsymbol{E}$;

（2）当 $x\gg l$ 时，$\boldsymbol{E}$=?

解 （1）建立坐标系如图 1.5a 所示，图中用 a、b、c、d 标记四个点电荷的位置. 点 a、c 两处点电荷在 A 点合电场的方向沿 y 轴负向，表达式为

$$\boldsymbol{E}_{ac} = -2\times\frac{ql/2}{4\pi\varepsilon_0[(l/2)^2+(x+l/2)^2]^{3/2}}\boldsymbol{e}_y$$



习题 1.5 图

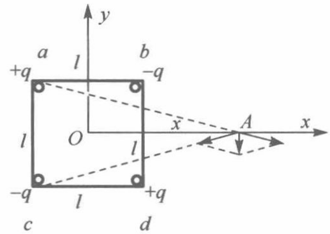


图 1.5a

b、d 两处点电荷在 A 点合电场的方向沿 y 轴正向，表达式为

$$\boldsymbol{E}_{bd} = 2\times\frac{ql/2}{4\pi\varepsilon_0[(x-l/2)^2+(l/2)^2]^{3/2}}\boldsymbol{e}_y$$

于是，A 点的总电场为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{ac}+\boldsymbol{E}_{bd} = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{[(x-l/2)^2+(l/2)^2]^{3/2}}-\frac{1}{[(x+l/2)^2+(l/2)^2]^{3/2}}\right\}\boldsymbol{e}_y$$

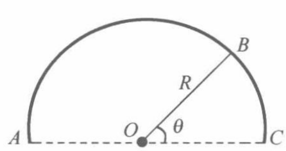
（2）当 $x \gg l$ 时

$$\frac{1}{[(x-l/2)^2+(l/2)^2]^{3/2}}-\frac{1}{[(x+l/2)^2+(l/2)^2]^{3/2}} \approx \frac{1}{(x^2-xl)^{3/2}}-\frac{1}{(x^2+xl)^{3/2}}$$

$$=\frac{1}{x^3}\left[\frac{1}{(1-x/l)^{3/2}}-\frac{1}{(x+x/l)^{3/2}}\right] \approx \frac{1}{x^3}\left(1+\frac{3l}{2x}-1+\frac{3l}{2x}\right)=\frac{3l}{x^4}$$

$$\boldsymbol{E} \approx \frac{3ql^2}{4\pi\varepsilon_0 x^4}\boldsymbol{e}_y$$

1.6　如习题 1.6 图所示，电荷分布在半径为 R 的半圆环上，线电荷密度为 $\lambda_0\sin\theta$，λ_0 为常数，θ 为半径 OB 和直径 AC 间的夹角．证明 AC 上任一点的电场强度都与 AC 垂直．



习题 1.6 图

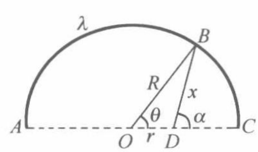


图 1.6a

证　设 D 为直径 AC 上任一点，D 到环心 O 的距离为 r，如图 1.6a 所示. 要证明 D 点的 $\boldsymbol{E}$ 垂直于 AC，只需证明 $\boldsymbol{E}$ 沿 AC 方向的分量为零即可.

设环的半径为 R，则 B 处弧元 $R\mathrm{d}\theta$ 上的电荷量为 $\mathrm{d}q=\lambda_0\sin\theta R\mathrm{d}\theta$，它在 D 点产生的电场强度 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 的大小为

$$\mathrm{d}E=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}=\frac{\lambda_0 R\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

式中，x 是 B 到 D 的距离，其值为 $x=\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta}$. $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 沿 AC 方向的分量为

$$\mathrm{d}E_{//}=\mathrm{d}E\cos\alpha=\frac{\lambda_0 R\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\cdot\frac{R\cos\theta-r}{x}=\frac{\lambda_0 R}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R\sin\theta\cos\theta-r\sin\theta}{(R^2+r^2-2Rr\cos\theta)^{3/2}}\mathrm{d}\theta$$

$$E_{//}=\frac{\lambda_0 R}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\frac{R\sin\theta\cos\theta-r\sin\theta}{(R^2+r^2-2Rr\cos\theta)^{3/2}}\mathrm{d}\theta=\frac{\lambda_0 R}{4\pi\varepsilon_0}(I_1+I_2)$$

式中

$$I_1=R\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{(R^2+r^2-2Rr\cos\theta)^{3/2}}=R\int_{-1}^{1}\frac{u\,\mathrm{d}u}{(R^2+r^2-2Rru)^{3/2}}$$

$$=R\frac{2}{(-2Rr)^2}\left[\sqrt{R^2+r^2-2Rru}+\frac{R^2+r^2}{\sqrt{R^2+r^2-2Rru}}\right]_{-1}^{1}=\frac{2r}{R(R^2-r^2)}$$

其中用到不定积分公式

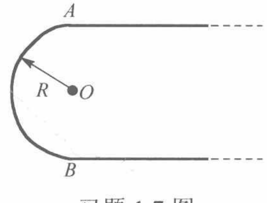
$$\int\frac{u\,\mathrm{d}u}{(a+bu)^{3/2}}=\frac{2}{b^2}\left(\sqrt{a+bu}+\frac{a}{\sqrt{a+bu}}\right),\quad (a=R^2+r^2,b=-2Rr)$$

$$I_2=-r\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{(R^2+r^2-2Rr\cos\theta)^{3/2}}=r\int_1^{-1}\frac{\mathrm{d}u}{(R^2+r^2-2Rru)^{3/2}}$$

$$=\frac{1}{R}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2+r^2-2Rru}}\right]_1^{-1}=-\frac{2r}{R(R^2-r^2)}$$

I_1 和 I_2 互抵，电场切向分量 $E_{//}=0$，亦即 $\boldsymbol{E}$ 垂直于 AC，证毕.

1.7　一无限长均匀带电导线，线电荷密度为 λ，一部分弯成半圆形，其余部分为两条无穷长平行直导线，两直线都与半圆的直径 AB 垂直，如习题 1.7 图所示，求圆心 O 处的电场强度.



习题 1.7 图

解　根据对称性可以判断，O 点的电场与两直线平行，只需计算平行分量. 用电场强度叠加原理求解，先计算半圆上的电荷对 O 点电场的贡献. 设圆的半径为 R，圆上任意一点的位置由通过该点的矢径与直径 AB 之间的夹角 θ 表示，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$. 考察位于 θ 处的线电荷元 $\mathrm{d}q=\lambda R\mathrm{d}\theta$，它在 O 点产生的电场强度的平行分量为（背离圆弧、指向右侧为正）

$$\mathrm{d}E_{1//}=\frac{\lambda R\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\sin\theta=\frac{\lambda\sin\theta\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

将上式过 $(0,\pi)$ 积分，求得整个半圆弧电荷对 O 点电场的贡献：

$$E_1=\int_0^{\pi}\frac{\lambda\sin\theta\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

再求两条半无穷直线电荷对 O 点电场平行分量的贡献，它正好等于单根半无穷直线电荷贡献的 2 倍. 考虑其中一条半无穷长直线电荷，以其与半圆弧连接处为起点，沿直线取坐标 x，则位于该处的线电荷元 $\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}x$ 在 O 点产生的电场强度的平行分量（向右为正）为

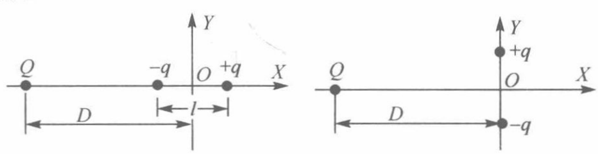
$$\mathrm{d}E_{2//}=-\frac{\lambda\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)}\cdot\frac{x}{(R^2+x^2)^{1/2}}=-\frac{\lambda x\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)^{3/2}}$$

过 $(0,\infty)$ 积分后加倍，求得两条半无穷长直线电荷对 O 点电场的总贡献为

$$E_2=-2\cdot\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{(R^2+x^2)^{3/2}}=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}}\right]_0^{\infty}=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

将两部分贡献求和得 $E=E_1+E_2=0$，O 点电场为零.

1.8　把电偶极矩为 $\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{l}$ 的电偶极子放在点电荷 Q 的电场内，$\boldsymbol{p}$ 的中心 O 到 Q 的距离为 D，如习题 1.8 图所示. 若 $\boldsymbol{p}$ 分别（1）平行于 OQ，（2）垂直于 OQ，求偶极子所受的力和力矩.



习题 1.8 图

解　（1）$\boldsymbol{p}//\overline{OQ}$ 时，偶极子受力

$$\boldsymbol{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-qQ}{(D-l/2)^2}+\frac{qQ}{(D+l/2)^2}\right]\boldsymbol{e}_x=-\frac{QD\boldsymbol{p}}{2\pi\varepsilon_0[D^2-(l/2)^2]^2}$$

以偶极子中心为参考点计算它受的力矩

$$\boldsymbol{L}=\frac{-qQ\boldsymbol{e}_x}{4\pi\varepsilon_0(D-l/2)^2}\times\left(\frac{-l}{2}\boldsymbol{e}_x\right)+\frac{qQ\boldsymbol{e}_x}{4\pi\varepsilon_0(D+l/2)^2}\times\left(\frac{l}{2}\boldsymbol{e}_x\right)=0$$

（2）$\boldsymbol{p}\perp\overline{OQ}$ 时，偶极子受力只有 $\boldsymbol{y}$ 方向分量，$\boldsymbol{x}$ 方向分量为零，结果为

$$\boldsymbol{F}=2\times\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0[D^2+(l/2)^2]}\cdot\frac{l/2}{[D^2+(l/2)^2]^{1/2}}\boldsymbol{e}_y=\frac{Q\boldsymbol{p}}{4\pi\varepsilon_0[D^2+(l/2)^2]^{3/2}}$$

仍以偶极子中心为参考点，仅力的 x 分量对力矩有贡献，所受力矩为

$$\boldsymbol{L}=\left(\frac{-l}{2}\boldsymbol{e}_y\right)\times\frac{-qQD\boldsymbol{e}_x}{4\pi\varepsilon_0[D^2+(l/2)^2]^{3/2}}+\left(\frac{l}{2}\boldsymbol{e}_y\right)\times\frac{qQD\boldsymbol{e}_x}{4\pi\varepsilon_0[D+(l/2)^2]^{3/2}}$$

$$=-\frac{qQDl\boldsymbol{e}_z}{4\pi\varepsilon_0[D^2+(l/2)^2]^{3/2}}=\frac{QD\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{e}_x}{4\pi\varepsilon_0[D^2+(l/2)^2]^{3/2}}$$

1.9　有两个同心的均匀带电球面，内、外半径分别为 R_1 和 R_2，外球面的电荷面密度为 $+\sigma$，球外各处的电场强度都是零，试求：

（1）内球面上的电荷面密度；

（2）两球面间离球心为 r 处的电场强度 $\boldsymbol{E}$；

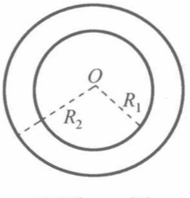
（3）小球面内的电场强度 $\boldsymbol{E}$.

解　（1）如习题 1.9 图所示，由题意，半径为 R_2 的外球带电 $Q_2=4\pi\sigma R_2^2$，球外电场等于零，即 $E(r>R_2)=0$. 于是由高斯定理

$$\oint\!\!\oint_{S(r>R_2)}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}Q=\frac{1}{\varepsilon_0}(Q_1+Q_2)=0$$

可推得内球带电量和面电荷密度如下：

$$Q_1=-Q_2=-4\pi\sigma R_2^2,\quad \sigma_1=Q_1/(4\pi R_1^2)=-\sigma R_2^2/R_1^2$$



习题 1.9 图

（2）以 O 为球心作半径为 $r(R_1<r<R_2)$ 的球高斯面 S_r，由对称性可知面上 $\boldsymbol{E}$ 沿径向方向，大小均匀，由高斯定理推得

$$\oint\!\!\oint_{S_r}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=E\oint\!\!\oint_{S_r}\mathrm{d}S=E\cdot4\pi r^2=\frac{1}{\varepsilon_0}Q_1=-\frac{1}{\varepsilon_0}Q_2$$

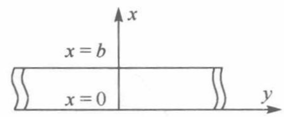
从而求得两球面间离球心为 r 处的电场强度为

$$E=\frac{-Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=-\frac{\sigma R_2^2}{\varepsilon_0 r^2},\quad \boldsymbol{E}=-\frac{\sigma R_2^2\boldsymbol{r}}{\varepsilon_0 r^3},\quad (R_1<r<R_2)$$

（3）以 O 为球心作半径为 $r(r<R_1)$ 的球高斯面 S_r，运用高斯定理，经过类似推导得

$$\oint\!\!\!\oint_{S_r} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = E\oint\!\!\!\oint_{S_r} \mathrm{d}S = 0,\quad E=0,\quad \boldsymbol{E}=0\quad (r<R_1)$$

1.10　如习题 1.10 图所示，一厚度为 b 的无限大均匀带电板置于真空中，电荷体密度为 $\rho = kx(0 \leqslant x \leqslant b)$，其中 k 是一正的常数，试求空间各点的电场强度.



习题 1.10 图

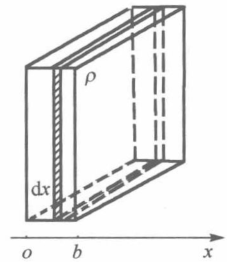


图 1.10a

解　(1) 如图 1.10a 所示. 平板外侧任意点 $P_1(x<0)$ 和 $P_2(x>b)$ 的电场可视为带电板各薄层产生的电场的叠加. 在 $\boldsymbol{x}$ 处厚度为 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 的薄板在 P_1 点产生的电场大小为

$$\mathrm{d}E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho \mathrm{d}x}{2\varepsilon_0} = kx\frac{\mathrm{d}x}{2\varepsilon_0}$$

式中，σ 是厚度为 $\mathrm{d}x$ 的薄板上的电荷面密度. 叠加所有薄板，可得电场强度的大小为

$$E = \int_0^b \mathrm{d}E = \frac{1}{2\varepsilon_0}\int_0^b kx\mathrm{d}x = \frac{kb^2}{4\varepsilon_0}$$

显然，P_1 点的电场沿 x 轴负向，P_2 点的电场沿 x 轴正向，即

$$\boldsymbol{E}_1 = -\frac{kb^2}{4\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_x\quad (x<0),\quad \boldsymbol{E}_2 = \frac{kb^2}{4\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_x\quad (x>b)$$

式中，$\boldsymbol{e}_x$ 为沿 x 轴正向的单位矢量.

(2) 平板内部某点 $P(0<x<b)$ 的电场是该点左右两部分产生电场的叠加，左边部分（$0,x$）产生的电场沿 x 轴正向；右边部分（x,b）产生的电场沿 x 轴负向；两部分产生的合成电场等于

$$\boldsymbol{E} = \int_0^x \frac{kx\mathrm{d}x}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_x - \int_x^b \frac{kx\mathrm{d}x}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_x = \frac{kx^2}{4\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_x - \frac{k(b^2-x^2)}{4\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_x = \frac{k(2x^2-b^2)}{4\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_x\quad (0<x<b)$$

1.11　根据量子力学，氢原子在正常状态下核外电荷的分布如下：离核心 r 处，电荷的体密度 $\rho(r) = -q\mathrm{e}^{-2r/a}/(\pi a^3)$，式中 $q = 1.60\times 10^{-19}\,\mathrm{C}$ 是核外电荷总量的绝对值，$a = 5.29\times 10^{-11}\,\mathrm{m}$ 是玻尔半径. 试求：

(1) 核外电荷的总电量；

(2) 核外电荷在 r 处的电场强度 $\boldsymbol{E}$.

解 （1）因 $\rho=-\dfrac{q}{\pi a^3}\mathrm{e}^{-2r/a}$ 是球对称分布，故核外总电量为

$$Q=\iiint_V \rho\mathrm{d}V=-\frac{q}{\pi a^3}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2r/a}\cdot 4\pi r^2\mathrm{d}r=-\frac{4q}{a^3}\int_0^\infty r^2\mathrm{e}^{-2r/a}\mathrm{d}r$$

由不定积分公式

$$\int_0^\infty x^n\mathrm{e}^{-bx}\mathrm{d}x=\frac{n!}{b^{n+1}}$$

得

$$Q=-\frac{4q}{a^3}\frac{2}{(2/a)^3}=-q=-1.60\times10^{-19}\ (\mathrm{C})$$

可见核外电荷的总电荷量等于电子的电荷量.

（2）由对称性和高斯定理得

$$\oiint_S \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\frac{q}{\pi\varepsilon_0 a^3}\int_0^r \mathrm{e}^{-2r/a}\cdot 4\pi r^2\mathrm{d}r=-\frac{4q}{\varepsilon_0 a^3}\left(-\frac{ar^2}{2}\mathrm{e}^{-2r/a}+a\int_0^r \mathrm{e}^{-2r/a}r\mathrm{d}r\right)$$

$$=-\frac{4q}{\varepsilon_0 a^3}\left(-\frac{1}{2}ar^2\mathrm{e}^{-2r/a}-\frac{1}{2}a^2r\mathrm{e}^{-2r/a}+\frac{1}{2}a^2\int_0^r \mathrm{e}^{-2r/a}\mathrm{d}r\right)$$

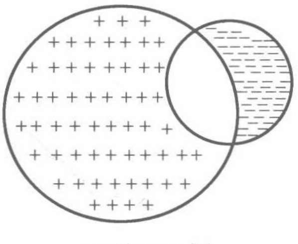
$$=-\frac{4q}{\varepsilon_0 a^3}\left(-\frac{ar^2}{2}\mathrm{e}^{-2r/a}-\frac{a^2r}{2}\mathrm{e}^{-2r/a}-\frac{a^3}{4}\mathrm{e}^{-2r/a}+\frac{a^3}{4}\right)$$

$$=\frac{q}{\varepsilon_0}\left(\frac{2r^2}{a^2}+\frac{2r}{a}+1\right)\mathrm{e}^{-2r/a}-\frac{q}{\varepsilon_0}=4\pi r^2E$$

于是得核外电荷在 r 处产生的电场强度为

$$\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(\frac{2}{a^2}+\frac{2}{ar}+\frac{1}{r^2}\right)\mathrm{e}^{-2r/a}-\frac{1}{r^2}\right]\boldsymbol{e}_r$$

1.12 如习题 1.12 图所示，空间有两个球，球心间距离小于半径之和，因此有一部分重叠（见图）. 今使一球充满密度为ρ 的均匀正电荷，另一球充满密度为$-\rho$ 的均匀负电荷，以至于重叠区域无电荷. 求这重叠区域内的电场强度 $\boldsymbol{E}$，说明 $\boldsymbol{E}$ 是匀强电场.



习题 1.12 图

解　利用 1.5.1 节例 1.7 的结果，均匀带电球内的场 $\boldsymbol{E}=\rho\boldsymbol{r}/(3\varepsilon_0)$，$\rho$ 为电荷体密度，$\boldsymbol{r}$ 为球心到场点的位矢. 在重叠区内部，带正电荷的球产生的场为 $\rho\boldsymbol{r}/(3\varepsilon_0)$，$\boldsymbol{r}$ 为正电荷球心到场点的位矢；带负电荷的球产生的场为 $-\rho\boldsymbol{r}'/(3\varepsilon_0)$，$\boldsymbol{r}'$ 为负电荷球心到场点的位矢，成立 $\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}$，式中 $\boldsymbol{a}$ 为从正电荷球心到负电荷球心的常矢量. 重叠区内部的电场为上述两部分场的叠加，结果为

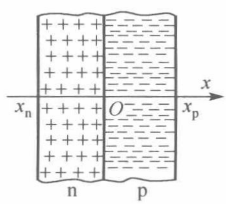
$$\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{r}-\frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})=\frac{\rho\boldsymbol{a}}{3\varepsilon_0}$$

$\boldsymbol{E}$ 为均匀场，$\boldsymbol{a}$ 为由正电荷球心指向负电荷球心的常矢量.

1.13　在半导体 pn 结附近总是堆积着正、负电荷，在 n 区内有正电荷，p 区内有负电荷，两区电荷的代数和为零. 我们把 pn 结看成一对带正、负电荷的无限大平板，它们相互接触（习题 1.13 图）. 取 x 轴的原点在 p、n 区的交界面上，n 区的范围是 $-x_{\mathrm{n}}\leqslant x\leqslant 0$，p 区的范围是 $0\leqslant x\leqslant x_{\mathrm{p}}$. 设两区内电荷体分布均匀，n 区电荷密度为 $N_{\mathrm{D}}e$，p 区电荷密度为 $-N_{\mathrm{A}}e$，称为突变结模型. 设 N_{D}、N_{A} 是常数，且 $N_{\mathrm{A}}x_{\mathrm{p}}=N_{\mathrm{D}}x_{\mathrm{n}}$，证明电场的分布为

（1）n 区：$E(x)=N_{\mathrm{D}}e(x_{\mathrm{n}}+x)/\varepsilon_0$；

（2）p 区：$E(x)=N_{\mathrm{A}}e(x_{\mathrm{p}}-x)/\varepsilon_0$.



习题 1.13 图

证　（1）由对称性，可知电场只有 x 分量. 显然在 $x<-x_{\mathrm{n}}$ 和 $x>x_{\mathrm{p}}$ 区有 $E=0$.

为求得 n 区电场，作高斯面，它是底面积为 S 的柱面，左侧底面位于左侧零磁场区，右侧底面位于 n 区（$-x_{\mathrm{n}}\leqslant x\leqslant 0$），运用高斯定理得

$$E(x)\cdot S=\frac{1}{\varepsilon_0}N_{\mathrm{D}}e\cdot S(x_{\mathrm{n}}+x)\quad\Rightarrow\quad E(x)=\frac{1}{\varepsilon_0}N_{\mathrm{D}}e(x_{\mathrm{n}}+x)\quad(-x_{\mathrm{n}}\leqslant x\leqslant 0)$$

证毕.

（2）为求得 p 区电场，作柱形高斯面，底面积为 S，左侧底面位于 p 区（$0\leqslant x\leqslant x_{\mathrm{p}}$），右侧底面位于右侧零磁场区，运用高斯定理得

$$-E(x)\cdot S=-\frac{1}{\varepsilon_0}N_{\mathrm{A}}e\cdot S(x_{\mathrm{p}}-x)\quad\Rightarrow\quad E(x)=\frac{1}{\varepsilon_0}N_{\mathrm{A}}e(x_{\mathrm{p}}-x)\quad(0\leqslant x\leqslant x_{\mathrm{p}})$$

证毕.

1.14　设气体放电形成的等离子体圆柱内的体电荷分布可表为 $\rho_e(r)=\rho_0[1+(r/a)^2]^{-2}$，$r$ 是到其对称轴的距离，ρ_0 是轴线上的电荷密度，a 是常数，求电场分布.

解　设所考察的场点离圆柱轴线的距离 r 远小于柱长，从而可将圆柱体作为无限长柱体处理. 由对称性，电场指向 r 方向，大小仅与 r 有关. 取高为 h、半径为 r 的柱形高斯面，则由高斯定理得

$$\oiint_{S_r}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=4\pi rhE=\frac{2\pi h}{\varepsilon_0}\int_0^r\rho_e r\mathrm{d}r=\frac{2\pi h\rho_0 a^4}{\varepsilon_0}\int_0^r\frac{r\mathrm{d}r}{(a^2+r^2)^2}$$

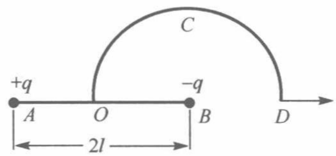
$$=\frac{\pi h\rho_0 a^4}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^2+r^2}\right)=\frac{\pi h\rho_0 a^2 r^2}{\varepsilon_0(a^2+r^2)}$$

$$E=\frac{a^2\rho_0 r}{2\varepsilon_0(a^2+r^2)},\quad \boldsymbol{E}=\frac{a^2\rho_0\boldsymbol{r}}{2\varepsilon_0(a^2+r^2)}$$

1.15　如习题 1.15 图所示，$AB=2l$，弧 OCD 是以 B 为中心，l 为半径的半圆. A 点有正电荷 $+q$，B 点有负电荷 $-q$. 求：

（1）把正电荷 Q 从 O 点沿弧 OCD 移到 D 点，电场力对它做了多少功？

（2）把负电荷 $-Q$ 从 D 点沿 AB 延长线移到无穷远处，电场力对它做了多少功？



习题 1.15 图

解　（1）由电场叠加原理，电场由 $+q$ 和 $-q$ 的电场叠加而成. 当正电荷 Q 沿 OCD 圆弧移动时，$-q$ 电场提供的电场力不做功，仅 $+q$ 电场提供的电场力做功. 又 $+q$ 的电场力做功与路径无关，故电场力对电荷 Q 所做的总功等于（取+所在位置为坐标原点）

$$\int_{OCD}Q\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{OD}Q\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_l^{3l}\frac{qQ\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{qQ}{6\pi\varepsilon_0 l}$$

（2）将负电荷 $-Q$ 从 D 移到无限远，电场力做功等于 $\pm q$ 提供的电场力做功之和（分别取 $+q$ 和 $-q$ 所在位置为坐标原点）

$$W_+=\int_{3l}^{\infty}\frac{-qQ\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{-qQ}{12\pi\varepsilon_0 l},\quad W_-=\int_l^{\infty}\frac{qQ\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 l},\quad W=W_++W_-=\frac{qQ}{6\pi\varepsilon_0 l}$$

1.16　证明：在无电荷分布的空间中，凡是电场线都是平行直线的地方，电场强度的大小必定处处相等. 换句话说，凡是电场强度的方向处处相同的地方，电场强度的大小必定处处相等.（提示：利用高斯定理和环路定理，分别证明沿同一电场线和不同电场线上任意两点的场强相等）

证　如习题 1.16 图所示，取柱形高斯面，柱轴与电场方向平行，底面积 ΔS 足够小，通过其侧面的电通量为零，由高斯定理得

$$-E_a\Delta S + E_b\Delta S = Q/\varepsilon_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad E_a = E_b$$

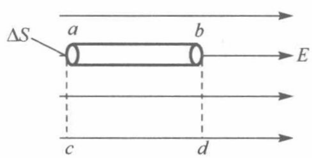
即同一电场线上任意两点的场强相等. 作矩形环路 $bacd$，其 ab 和 cd 两边与电场方向平行，由环路定理得

$$\int_{bacd} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{ba} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{ac} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{cd} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{db} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$$

由于 ac 和 db 两边与电场方向垂直，故上式右边第 2 项和第 4 项等于零；又因前面已经证明电场沿电场线均匀，故可将上式写为

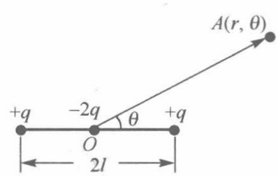
$$\int_{bacd} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -E_a\overline{ab} + E_c\overline{cd} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_a = E_c$$

即不同电场线上任意两点的场强相等. 于是，在无电荷分布的空间，凡是电场线都是平行直线的地方，电场强度必定处处相等，证毕.



习题 1.16 图

1.17　线电四极子如习题 1.17 图所示，求它在 $r \gg l$ 处的点 A（r,θ）处所产生的电势 U 和电场强度 $\boldsymbol{E}$.



习题 1.17 图

解　取无限远点为电势零点，则

$$U = \frac{-2q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+l^2-2lr\cos\theta}} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+l^2+2lr\cos\theta}}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[-2 + \frac{1}{\sqrt{1+(l/r)^2-2(l/r)\cos\theta}} + \frac{1}{\sqrt{1+(l/r)^2+2(l/r)\cos\theta}}\right]$$

对远处（$r \gg l$），利用泰勒展开式

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \cdots = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \cdots$$