

李成章教练奥数笔记

—— 第4卷 ——

李成章 著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

LI CHENG ZHANG JIAO LIAN AO SHU BI JI

李成章教练奥数笔记

第4卷

李成章 著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

本书为李成章教练奥数笔记第四卷,书中内容为李成章教授担任奥数教练时的手写原稿。书中的每一道例题后都有详细的解答过程,有的甚至有多种解答方法。

本书适合准备参加数学竞赛的学生及数学爱好者研读。

图书在版编目(CIP)数据

李成章教练奥数笔记. 第4卷/李成章著. —哈尔滨:
哈尔滨工业大学出版社, 2016. 1
ISBN 978-7-5603-5568-9

I. ①李… II. ①李… III. ①数学-竞赛题-题解
IV. ①O1-44
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 191110 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 杜莹雪
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 15.25 字数 169 千字
版 次 2016 年 1 月第 1 版 2016 年 1 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-5568-9
定 价 38.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

◎
目
录

一 覆盖与划分 //1

二 点染色问题 //42

三 染色图问题 //79

四 数学模型 //109

五 不变量 //145

六 分组法 //181

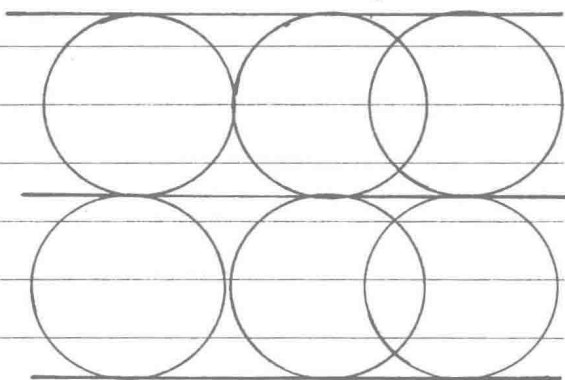
编辑手记 //223

一 覆盖与划分

1. 能否用无穷多个圆周末复盖整个平面, 使对平面上每点都恰有 1988 个不同的圆周通过? (1988 年环球城市数学竞赛)

解 可以实现.

首先用平行线族将平面划分成宽度为 1 的横条, 然后在横条中作一个圆与两边都相切, 再将此圆在横条中左右任意平移得无穷多个圆且在每个横条中都这样作圆.



这样一来, 对于每个横条内部的点 A , 都恰有一个圆的右半圆通过它, 也恰有一个圆的左半圆通过它. 对于横条边界上任一点 B , 横条中恰有一个圆与边界相切于点 B , 但另一相邻横条中也有一个圆切该边界于点 B , 所以也恰有两个圆过点 B . 可见, 平面上每点都恰有两个不同的圆经过. 从简单入手 几何变换构造法

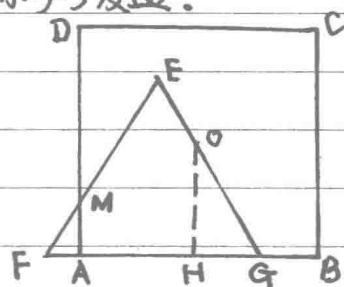
再依次用平行线族将平面划分成宽度为 2, 3, 4, ..., 994 的横条并像上面一样地在横条中作圆, 则对平面上每点, 每次都恰有两圆通过, 总计共有 1988 个圆通过.

12. 在边长为12的正方形中分佈着1990个点, 求证可以用一个边长为11的正三角形盖住其中至少498个点.

从数值特征入手 (1990年苏联教委推荐题, 《组合卷》10-17)

证 因为 $1990 = 497 \times 4 + 2$, 故由抽屉原理知, 只需证明边长为12的正方形可以被4个边长为11的正三角形所复盖.

将边长为11的正三角形的一条边放在正方形ABCD的边AB所在的直线上, 使 $\triangle EFG$ 的另一条边GE过正方形的中心O (如图). 于是



$$GB = HB - HG = 6 - \frac{6}{\sqrt{3}} = 6 - 2\sqrt{3}.$$

$$FA = FG - AG = FG + GB - AB$$

$$= 11 + (6 - 2\sqrt{3}) - 12 = 5 - 2\sqrt{3}.$$

几何变换构造法

$$AM = FA \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3} - 6 > 6 - 2\sqrt{3} = GB.$$

可见, 当将 $\triangle EFG$ 绕点O分别旋转 $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ 时, 分别得到3个边长为11的正三角形, 再加上 $\triangle EFG$ 共4个边长都是11的正三角形就完全盖住了正方形ABCD.

↓3 设 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 为平面上的 n 个不同的点, 使得每个 $\triangle P_i P_j P_k$ ($1 \leq i < j < k \leq n$) 的面积都不超过 1. 求证可以用一个面积不大于 4 的三角形盖住这全部 n 个点 (即这 n 个点全都在这个三角形的内部或边上). (1991 年澳大利亚, 《组合卷》10.18)

证 (1) 设 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 在同一条直线 l 上且 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 按顺序排列, $P_1 P_n = a$.

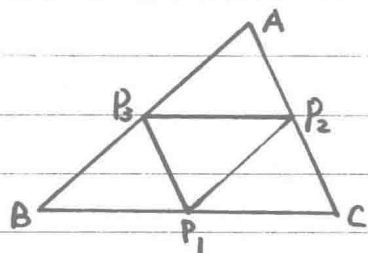
在直线 l 外取一点 P_0 , 使 P_0 到 l 的距离小于 $\frac{4}{a}$, 于是

$$S_{\triangle P_0 P_1 P_n} < \frac{1}{2} a \cdot \frac{4}{a} = 2 < 4,$$

且 $\triangle P_0 P_1 P_n$ 盖住了全部 n 个给定点, 即 $\triangle P_0 P_1 P_n$ 满足题中要求.

(2) 再设 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 不全共线, 不妨设在所有 $\triangle P_i P_j P_k$ ($1 \leq i < j < k \leq n$) 中, $\triangle P_1 P_2 P_3$ 的面积最大.

分别过点 P_1, P_2, P_3 作对边的平行线, 所作的 3 条直线围成的三角形记为 $\triangle ABC$, 则 $\triangle ABC$ 满足题中要求.



事实上, 因为 $S_{\triangle P_1 P_2 P_3} \leq 1$, 所以

$$S_{\triangle ABC} = 4 S_{\triangle P_1 P_2 P_3} \leq 4.$$

另一方面, 若有给定点在 $\triangle ABC$ 之外, 不妨设 P_i ($i \geq 4$) 在边 BC 所在直线的下方, 于是

$$S_{\triangle P_i P_2 P_3} > S_{\triangle P_1 P_2 P_3},$$

这与 $S_{\triangle P_1 P_2 P_3}$ 的最大性矛盾. 这表明 $\triangle ABC$ 必然盖住了全部 n 个给定点.

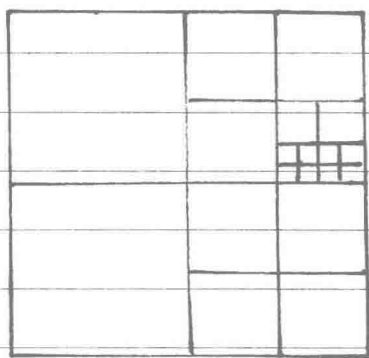
↓4 给定若干个正方形, 它们的面积之和等于4. 求证用这些正方形可以完全盖住一个面积为1的正方形.

(1979年, 《组合卷》12-2)

证 不妨设给定的所有正方形的边长 a 都小于1. 对每个边长 a , 取自然数 k , 使得 $2^{-k} \leq a < 2^{-(k-1)}$. 然后把每个给定的正方形都缩小成边长为 2^{-k} 的正方形, 于是这些缩小后的正方形的面积都大于原正方形面积的 $\frac{1}{4}$, 所以它们的面积之和大于1.

以下说的正方形除边长为1的大正方形外均指缩小后的给定正方形. 首先将边长为1的大正方形均分成4个边长为 $\frac{1}{2}$ 的正方形. 若给定边长为 $\frac{1}{2}$ 的正方形, 则把它重合于分出的边长为 $\frac{1}{2}$ 的方格中. 余下的小正方形的边长均 $\leq \frac{1}{4}$.

把这4个边长为 $\frac{1}{2}$ 的方格中尚未放入给定正方形的每个都均分成4个边长为 $\frac{1}{4}$ 的正方形方格, 然后将边长为 $\frac{1}{4}$ 的小正方形分别放入这些方格中. 继续这个过程, 直到大正方形被完全复盖或缩小正方形完全放完为止. 因为缩小后的给定



正方形的面积之和大于1, 故只能是若干个缩小后的给定正方形完全复盖边长为1的大正方形. 显然, 相应的原来给定的正方形便是完全盖住了边长为1的大正方形.

↓5 试证一个周长为 $2a$ 的多边形,总可以用一个直径为 a 的圆板片盖住. (1949年莫斯科,1956年波兰,《组合卷》12.6)

证 设 M 是一个周长为 $2a$ 的多边形,在 M 的周界上取两点 A 和 B ,使它们平分 M 的周界,即沿着 M 的周界从 A 到 B 和从 B 到 A 的长度都是 a .以线段 AB 的中点 O 为圆心,以 a 为直径作 $\odot O$,则 $\odot O$ 就完全盖住了多边形 M .

若不然,设在 M 周界上有点 P 在 $\odot O$ 之外,连结 PA, PB, PO ,于是有

$$OP > \frac{a}{2}.$$

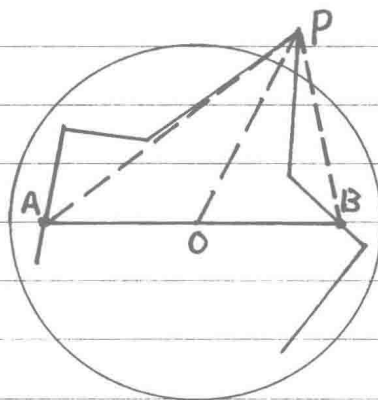
因为 PO 为 $\triangle PAB$ 的中线,所以

$$PA + PB > 2PO > a.$$

又因 A, P, B 都在 M 的周界上,且沿 M 的周界从 A 到 B 的长度为 a ,从而有

$$a \geq PA + PB > a,$$

矛盾,所以 $\odot O$ 一定盖住了多边形 M .



6. 如果边长为1的正方形可被3个直径都为 a 的圆纸片覆盖, 求 a 的最小值. (《湖南经典组合》233页例(2))

解 在边AD上取点E, K, 在边BC上取点F, L, 使得

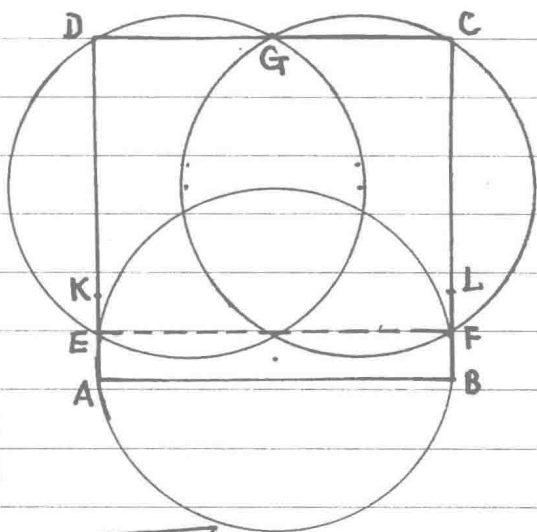
$$AE = EK = BF = FL = \frac{1}{8}.$$

记CD中点为G, 于是

$$GE = GF = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{65}}{8}.$$

$$AF = BE = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{65}}{8}.$$

分别以GE, GF为直径作 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$, 以矩形ABFE为内接矩形作 $\odot O_3$, 则此3圆片覆盖住正方形ABCD, 且3圆的直径都是 $a = \frac{\sqrt{65}}{8}$. 可见, 所求的直径 a 的最小值不大于 $\frac{\sqrt{65}}{8}$.



从举例入手

另一方面, 设有3个圆纸片 $\odot M_1, \odot M_2, \odot M_3$ 完全盖住正方形ABCD, 且3圆直径都是 $b < \frac{\sqrt{65}}{8}$. 由抽屉原理知, A, B, C, D4点中至少有两点被3圆之一复盖, 不妨设A和B同被 $\odot M_1$ 盖住. 因为

$$AF = BE = \frac{\sqrt{65}}{8} > b,$$

所以E, F $\notin \odot M_1$. 显然C, D, G $\notin \odot M_1$. 设G $\in \odot M_3$, 因为

$$GF = GE = \frac{\sqrt{65}}{8} > b,$$

所以E, F $\notin \odot M_3$. 从而必有E, F $\in \odot M_2$. 又因

$$KF = LE = \frac{\sqrt{65}}{8} > b,$$

所以 $K, L \notin \odot M_2$. 又因 $K, L \notin \odot M_1$, 所以 $C, D, K, L \in \odot M_3$.

但是

从层关系分析得

$$CK = \sqrt{1^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{5}{4} > b.$$

此与 $\odot M_3$ 直径为 b 矛盾. 所以, 所求的直径 a 的最小值为 $\frac{\sqrt{65}}{8}$.

(《竞赛知识篇》551页例3)

注 解法中只取 $AE = BF = \frac{1}{8}$. 固然会使求解简捷, 但却掩盖了思路, 未必要好. 应设 $AE = x$, $DE = 1 - x$, 而用 $EG = GF = AF$ 为关系式解出 $x = \frac{1}{8}$. 更自然:

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (1-x)^2} = \sqrt{GD^2 + DE^2} = GE = AF = \sqrt{AE^2 + EF^2} = \sqrt{1^2 + x^2}$$

$$\frac{1}{4} + 1 - 2x + x^2 = \frac{1}{4} + (1-x)^2 = 1 + x^2.$$

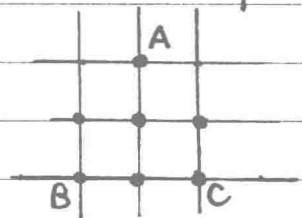
$$\frac{1}{4} - 2x = 0. \quad x = \frac{1}{8}. \quad (2014.5.6)$$

7 已知 2×2 的正方形纸片在边长为 1 的方格纸上盖住了不少于 7 个结点, 问它到底盖住了几个结点?

(1985 年莫斯科, 《组合卷》1-67)

解 如果正方形纸片盖住了相距 $2\sqrt{2}$ 的两个结点, 则显然是正方形的一条对角线的两个端点盖住的. 这时正方形纸片恰盖在 4 个方格上, 当然盖住了 9 个结点.

按已知, 正方形纸片至少盖住了 7 个结点. 若盖住 8 个, 则其中必有两个结点的距离为 $2\sqrt{2}$, 于是化为前一种情形. 若盖住 7 个结点且其中任何两个结点之间的距离都小于 $2\sqrt{2}$, 则只能是右图所示的 7 点, 这时 $\triangle ABC$ 的面积是 2, 恰为正方形纸片面积的一半.



在 2×2 的正方形中画出一个三角形, 当且仅当三角形的一条边在正方形的一条边上, 而第 3 个顶点在正方形的这条边的对边上时, 三角形的面积才能为 2. 因此, 既然正方形纸片盖住了 $\triangle ABC$, 就一定盖住了 2×2 的 4 个方格, 即盖住了 9 个结点.

另一方面, 2×2 的正方形纸片至多盖住 9 个结点, 故当正方形纸片至少盖住 7 个结点时, 恰盖住了 9 个结点.

8. 设有一个平面被4个半平面完全复盖, 求证必可从中去掉一个半平面, 使得余下的3个半平面仍能盖住整个平面.

(1951年匈牙利, 《组合卷》12.13题)

证1 设给定的4个半平面分别为 f_1, f_2, f_3, f_4 . 若结论不成立, 则存在点 $P_i \in f_i, i=1, 2, 3, 4$, 使得

$$P_i \notin f_j, j \neq i, i, j \in \{1, 2, 3, 4\}. \quad \textcircled{1}$$

(1) 若4点 $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ 中有3点共线, 不妨设 P_1, P_2, P_3 共线且 P_2 在线段 P_1P_3 上. 因为 $P_2 \in f_2$, 故 P_1 和 P_3 两点中至少有一点属于 f_2 , 此与 $\textcircled{1}$ 矛盾.

(2) 若4点 $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ 的凸包为四边形 $P_1P_2P_3P_4$, 则考察对角线 P_1P_3 与 P_2P_4 的交点 M . 设

$$M \in f_{i_0}, 1 \leq i_0 \leq 4,$$

于是 f_{i_0} 必盖住 P_1, P_3 之一, 也必盖住 P_2, P_4 之一. 这样一来, $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ 这4点中至少有两点属于 f_{i_0} , 此与 $\textcircled{1}$ 矛盾.

(3) 若4点 $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ 的凸包是三角形, 不妨设点 P_4 在 $\triangle P_1P_2P_3$ 之内部. 连结 P_1P_4 并延长交 P_2P_3 于点 M . 因为

$$P_4 \in f_4, P_1 \notin f_4,$$

所以 $M \in f_4$, 从而 f_4 至少盖住 P_2, P_3 之一, 矛盾.

证2 设给定的4个半平面分别为 $f_i, i=1, 2, 3, 4$, 若结论不成立, 则存在点 $P_i \in f_i, i=1, 2, 3, 4$, 使得

$$P_i \in f_i, P_i \notin f_j, j \neq i, i, j \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

连结 P_1P_2, P_1P_3, P_1P_4 并考察线段 P_1P_2 被复盖的情形.

首先注意, 若某个半平面复盖线段 AB 上的某点, 则该半平面至少复盖两个端点 A 和 B 之一.

因为 $P_1, P_2 \notin f_3, P_1, P_2 \notin f_4$, 所以半平面 f_3, f_4 都不能复盖线段 P_1P_2 上的任何一点. 换句话说, 必有 $P_1P_2 \subset f_1 \cup f_2$. 记半平面 f_1 的边界直线为 l_1 , 则 l_1 与 P_1P_2 相交, 记交点为 Q_2 . 同理可知, l_1 与 P_1P_3, P_1P_4 都相交, 记交点为 Q_3 和 Q_4 . 于是有

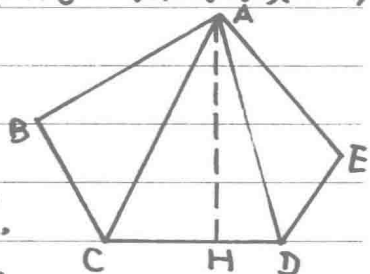
$$Q_i \in f_i, \quad i = 2, 3, 4.$$

不妨设 Q_3 在 Q_2 与 Q_4 之间. 因为 $Q_3 \in f_3$, 所以线段 Q_2Q_4 的两个端点 Q_2 和 Q_4 中至少有 1 点属于 f_3 , 矛盾.

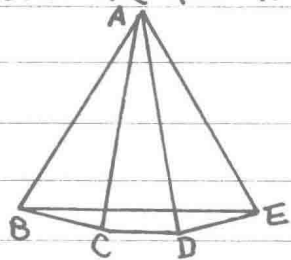
↓9 已知一个凸五边形的所有内角都是钝角, 求证必有它的两条对角线, 使得分别以这两条对角线为直径的两个圆面可以完全复盖住这个五边形. (1974年莫斯科, 《组合卷》12.4题)

证 记给定的凸五边形为 $ABCDE$ 并考察以它的两条对角线 AC , AD 为直径的两个圆面.

因为 $\angle B$ 和 $\angle E$ 都是钝角, 所以以两个圆面分别盖住 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$. 若 $\angle ACD$ 和 $\angle ADC$ 中有一个非锐角, 比如使 $\angle ADC \geq 90^\circ$, 则以 AC 为直径的圆面就盖住了 $\triangle ACD$, 从而两个圆面就完全盖住了五边形 $ABCDE$. 若 $\angle ACD$ 和 $\angle ADC$ 都是锐角, 则 $\triangle ACD$ 的高 AH 的重足 H 在线段 CD 内. 这时以 AC 和 AD 为直径的两个圆面分别盖住了 $\triangle ACH$ 和 $\triangle ADH$, 从而两个圆面也完全盖住了五边形 $ABCDE$.



注 由证明过程可知, 凸五边形中只要有3个内角非锐角, 结论就成立. 因为非锐角的3个内角中必有两个不相邻, 从而上述证明可照样进行. 但若5个内角中只有两个钝角且相邻, 结论就不一定成立了. 例如右图中是一个正三角形再上一个等腰梯形, $\angle C$ 和 $\angle D$ 是锐角而另3个内角都是钝角. 显然, 以任何两条对角线为直径的两个圆面都不能盖住整个五边形 $ABCDE$.

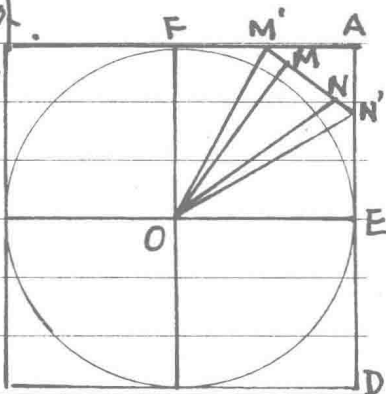


↓10 在边长为2的正方形内部放置一个边长为1的小正方形, 求证小正方形必盖住大正方形的中心. (1983年基辅, 《祖冲之》12·10题)

证 记边长为2的正方形为ABCD, 中心为O.

若结论不成立, 则点O在小正方形之外, 因而从点O到小正方形的某条边MN的距离大于1. 故M和N不能在大正方形的同一条边上. 作以点O为心, 1为半径的 $\odot O$, 则线段MN在圆外.

过中心O作与正方形ABCD的边平行的十字线, 将大正方形划分成4个面积为1的小正方形. 由于MN在 $\odot O$ 之外, 故它只能在某个小正方形的圆外部分中, 不妨设MN位于小正方形OEAF中. 双向延长MN, 记它与正方形OEAF的交点为M'和N', 于是有



$$S_{\triangle OMN} \leq S_{\triangle OM'N'} \leq \frac{1}{2} S_{OEAF} = \frac{1}{2}.$$

另一方面, 因MN=1而点O到MN的距离又大于1, 所以又有

$$S_{\triangle OMN} > \frac{1}{2}.$$

稍.

11 试证任一凸多边形中必有3个相邻顶点,使得过这3点的圆面必能盖住整个多边形. (1978年保加利亚,《组合卷》12.15)

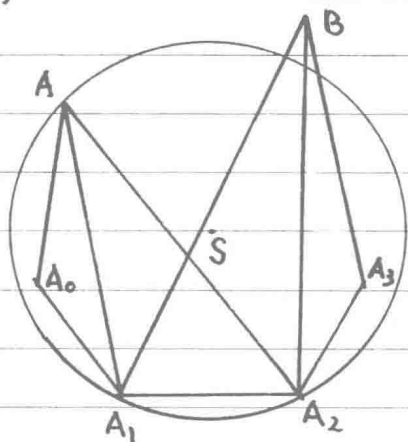
证 考察以有这样的圆,它过已知多边形的某3个顶点,其中两个顶点相邻而第3个顶点对前两点的张角不超过 90° .这种圆当然存在,比如当3个顶点相邻时以对应的圆即满足要求.在这些圆中取直径 d 最大的圆,则它的圆面即满足要求.

若不然,则或者 $\odot S$ 之外还有多边形的顶点,或者 $\odot S$ 不过多边形的3个相邻顶点.

设多边形在 $\odot S$ 上的3个顶点为 A, A_1, A_2 ,其中 A_1 和 A_2 是相邻顶点,多边形的顶点 B 在 $\odot S$ 之外,因为点 A 和 B 在直线 A_1A_2 的同侧,所以

$$\angle A_1BA_2 < \angle A_1AA_2 \leq 90^\circ.$$

于是由正弦定理知 $\triangle A_1A_2B$ 的外接圆的直径大于 $\odot S$ 的直径,这与 $\odot S$ 的直径的最大性矛盾,故知圆面 S 复盖了整个多边形.



由反证假设之顶点 A 与顶点 A_1, A_2 都不相邻,且 A_1, A_2 的各有一个相邻顶点 A_0, A_3 都在 $\odot S$ 之内.具体地说,顶点 A_0 和 A_3 分别位于以 AA_1, AA_2 为弦的弓形内部.显然, $\angle AA_1A_2$ 和 $\angle AA_2A_1$ 中至少有1个是钝角,不妨设 $\angle AA_2A_1$ 是钝角.于是有

$$\angle AA_0A_1 > 180^\circ - \angle AA_2A_1 > 90^\circ.$$

从而由正弦定理又知 $\triangle AA_0A_1$ 的外接圆的直径大于 $\odot S$ 的直径,矛盾.这表明 $\odot S$ 过 A_0, A_1, A_2 这3个相邻顶点.