

高等师范院校教材

近世代数简明教程

马达才 陈演祥 李耀昭 贺家乐 编著

穆大禄 主审

河南教育出版社

高等师范院校教材

近世代数简明教程

马达才 陈演祥 李耀昭 贺家乐 编著

穆大禄 主审

河南教育出版社

内 容 提 要

本书根据国家教委拟定的《近世代数基础》教材编写大纲，结合多年教学实际编写的。全书共分六章，第一章主要介绍代数系等基本概念，后五章介绍基本的代数系——群、环、域、模、格。作为高校的一本基础研究课程，注重由浅入深，通俗易懂，简明扼要，推理清晰，以揭示基本概念的实质和科学知识的规律性，书中选编了一定数量的练习题，借以使读者从中体会到抽象代数的解题过程和方法。

本书适宜作高等师范院校，教育学院数学系、物理系教材，高师函授院校，电视大学，业余大学的教材或参考书。

高等师范院校教材

近世代数简明教程

马达才 陈演祥 李耀昭 贺家乐 编著

穆大禄 主审

*

河南教育出版社出版发行

信阳师范学院印刷厂印刷

*

850×1168毫米 1/32 6.75印张 164千字

1990年12月第1版 1990年12月 第1次印刷

印数：1~2000

ISBN 7-5347-0939-8 / G · 380

定价：2.60元

前 言

为适应教学改革的需要,我们依据高等师范院校《近世代数基础》教材编写大纲,结合多年教学和科研的实践编写了这本书。全书共分六章,第一章主要介绍代数系等基本概念,后五章介绍关于群、环、域、模、格的基本知识,对模、格这两章按照学生具体情况,可以选讲或全讲。

以往的教学实践表明,学生在学习这一课程时往往对抽象概念,理解不深不透,解题无从下手,掌握知识的连贯性比较差;又考虑到师范院校学生的特点,我们在编写的过程中,注意到由浅入深,通俗易懂,说理简明扼要,推理清晰严谨,各章均以较多的实例,揭示概念的实质和科学知识的规律性;在相邻学科中,注意避免概念的交叉重复;为了使读者充分体会到近世代数的基本证题方法,本书选编了相当数量的练习题,以期广泛的引起读者的兴趣,对于这些习题,解题思路和方法是多样的,以便于学生刻苦钻研,独立思考,起到对所学习的内容加深理解和灵活运用的作用。

在本书编写的过程中,由于吴品三先生热情鼓励,李修睦先生亲切关怀,高炳宋、许鸿厥先生无私帮助,因此本书得以顺利出版。廖祖华同志在编选习题方面提供不少有益的建议,谨此向他们表示谢意。

编 著 者

一九九〇年十二月

目 录

前 言

第一章 基本概念

§ 1	集合与映射	1
§ 2	等价关系与集合分类	6
§ 3	代数运算	14
§ 4	代数系同态与同构	21
§ 5	偏序关系 Zorn引理	29

第二章 群

§ 1	群的概念	35
§ 2	群的同构 循环群与变换群	42
§ 3	子群及其陪集	49
§ 4	正规子群	56
§ 5	群的同态基本定理	62
§ 6	群的直积	70

第三章 环

§ 1	环的概念	77
§ 2	子环 理想与商环	84
§ 3	环的同态基本定理	90
§ 4	素理想子环 极大理想子环	96
§ 5	商域	101
§ 6	主理想环里的因子分解	106

第四章 域

§ 1	最小域 添加	111
§ 2	单扩域	115
§ 3	有限扩域	120
§ 4	多项式的分解域	124
§ 5	有限域	130
§ 6	可分扩域	134

第五章 模

§ 1	模的定义	147
§ 2	模的同态与同构	153
§ 3	模的生成集	160
§ 4	模上的线性代数	167
§ 5	模对环研究的一些作用	

第六章 格

§ 1	格的定义及其性质	171
§ 2	模格	184
§ 3	分配格	191
§ 4	布尔代数	198

名词索引	206
------------	-----

第一章 基本概念

近世代数研究的主要对象是各种代数系。代数系是建立在集合和映射的概念之上的，因此集合和映射是近世代数中极为重要的基本概念。高等代数及其它有关课程对此已作过不少介绍。在这一章里，我们将简要罗列其部分内容，并进行必要的推广和补充，进而介绍近世代数中另外一些重要的基本概念。

§1 集合与映射

有限个集合的并和交的运算可以推广到任意多个集合上去。

定义1 设 $\{A_\alpha \mid \alpha \in I\}^{(1)}$ 是全集 U 的子族。集合 $\{x \mid$ 存在某个 $\alpha \in I$, 使 $x \in A_\alpha\}$ 称为族 $\{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$ 的并, 记为 $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$; 集合 $\{x \mid$ 对每一个 $\alpha \in I$, 都有 $x \in A_\alpha\}$ 称为族 $\{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$ 的交, 记为 $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ 。

特别, 当 $I = \phi$ 时, 规定

$$\bigcup_{\alpha \in \phi} A_\alpha = \phi, \quad \bigcap_{\alpha \in \phi} A_\alpha = U.$$

例1 若 $A_\alpha = (\alpha, \alpha + 1)$, $I = \mathbb{Z}$, 则有 $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \mathbb{R}$,

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \phi.$$

例2 若 $A_\alpha = (-1, \alpha)$, $I = (0, 1)$, 则有 $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha =$

注① I 是 A_α 的下标组成的集合, 称为指标集, α 在 I 中取值。 I 可以是有限集, 也可以是无限集。

$$(-1, 1), \bigcap_{\alpha \in I} A_{\alpha} = (-1, 0].$$

加氏积的概念, 是集合论中的重要概念. 在近世代数中, 应用加氏积这个重要工具, 能够将若干代数系构成一个新的代数系.

定义 2 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是 n 个非空集合, 那么由这些依次排列的 n 个集合所决定的集合 $\{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n\}$, 称为集合 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的加氏积, 记为 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ 或 $\prod_{i=1}^n A_i$. 当 $n=1$ 时, 规定 A_1 的加氏积就是其自身.

加氏积 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ 的元素是有序的 n 元组 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, 其中的第 i 个元取自第 i 个集合 A_i ($i = 1, 2, \dots, n$). 当且仅当对每一个 i ($i = 1, 2, \dots, n$) 都有 $a_i = b_i$ 时, 称加氏积的两个元 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 与 $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ 相等, 记为 $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$.

当这 n 个集合 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 不全相等时, 改变它们的排列顺序, 可得到不同的加氏积.

例 3 若 $A_1 = \{a, b, c\}$, $A_2 = \{x, y\}$, 则

$$A_1 \times A_2 = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y), (c, x), (c, y)\},$$

$$A_2 \times A_1 = \{(x, a), (x, b), (x, c), (y, a), (y, b), (y, c)\}.$$

易知, $A_1 \times A_2 \neq A_2 \times A_1$.

当 $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$ 时, 加氏积 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ 可简记为 A^n , 即 $A^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A, i = 1, 2, \dots, n\}$.

当 A 为实数集 R 时, 加氏积 R^n 就是通常的 n 维实向量空间.

在高等代数里我们知道, 集合 A 到集合 B 的一个映射 f , 记为 $f: A \rightarrow B$. f 是一个对应法则, 通过它, 对于每一个 $x \in A$, 存在唯一的 $y \in B$ 与 x 对应, y 称为 x 在 f 作用下的象, 记为 $f(x)$. 映射 f 也可由下式具体给出

$$f: x \mapsto y = f(x), \forall x \in A$$

x 称为 y 在 f 作用下的原象.

如果对 A 中任意两个元 a, b , 当 $a \neq b$ 时, 有 $f(a) \neq f(b)$, 则称 f 是 A 到 B 的单射; 如果对 B 中任意元 b , 在 A 中存在元 a , 使得 $f(a) = b$, 则称 f 是 A 到 B 的满射; 如果 f 既是单射, 又是满射, 则称 f 是 A 到 B 的双射.

容易看出, 当 f 是 A 到 B 的单射时, A 中不同的元有不同的象; 当 f 是 A 到 B 的满射时, B 中的每一个元都有原象; 当 f 是 A 到 B 的双射时, B 中的每个元都有原象, 并且原象是唯一的.

若 $S \subseteq A$, 则集合 $\{f(x) \mid x \in S\}$ 称为 S 在 f 作用下的象集, 记为 $f(S)$. 特别地, 当 $S = A$ 时, $f(A)$ 称为映射 f 的值域, 记为 $Im f$. 显然 $Im f \subseteq B$. 当 f 为满射, $Im f = B$.

若 $T \subseteq B$, 则集合 $\{x \mid x \in A, f(x) \in T\}$ 称为 T 在 f 作用下的完全原象, 记为 $f^{-1}(T)$. 显然 $f^{-1}(T) \subseteq A$. 若 T 为单元素集合 $\{b\}$, 则 $f^{-1}(T)$ 也可简记为 $f^{-1}(b)$. 当 f 是单射时, 对每一个 $b \in B$, $f^{-1}(b)$ 是单元素集合或空集. 当 f 是满射时对每一个 $b \in B$, $f^{-1}(b)$ 一定非空.

不难证明, 若 $S \subseteq A$, 则有 $S \subseteq f^{-1}(f(S))$; 若 $T \subseteq B$, 则有 $f(f^{-1}(T)) \subseteq T$.

设 f 和 g 都是集合 A 到集合 B 的映射, 若对每一个 $x \in A$, 都有 $f(x) = g(x)$, 则称映射 f 和映射 g 相等, 记为 $f = g$.

若 f 是 A 到 B 的映射, g 是 B 到 C 的映射, 则由 f 和 g 所确定的映射 $h: x \mapsto g[f(x)]$, $x \in A$, 称为映射 f 和 g 的合成, 记为 $g \circ f$, 即对于每一个 $x \in A$, $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$.

容易证明, 映射的合成满足结合律, 即若 f 是 A 到 B 的映射,

g 是 B 到 C 的映射, h 是 C 到 D 的映射, 则有

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

但是, 映射的合成不满足交换律.

集合 A 到自身的一个映射, 又称为集合 A 上的一个变换. 集合 A 上的恒等变换记为 I_A , 对每一个 $a \in A$, 都有 $I_A(a) = a$.

易证, 若 f 是集合 A 到 B 的映射, 则有

$$f \circ I_A = f, I_B \circ f = f.$$

关于映射, 下面的结论是非常重要的.

定理 1 设 f 是集合 A 到集合 B 的映射, 那么有:

$$(1) \quad f \text{ 为单射} \iff \exists g: B \rightarrow A, \text{ 满足 } g \circ f = I_A$$

$$(2) \quad f \text{ 为满射} \iff \exists h: B \rightarrow A, \text{ 满足 } f \circ h = I_B$$

$$(3) \quad f \text{ 为双射} \iff \exists \varphi: B \rightarrow A, \text{ 满足 } \varphi \circ f = I_A, \text{ 且 } f \circ \varphi = I_B.$$

证 (1) 先证充分性. 设存在 B 到 A 的映射 g , 使得 $g \circ f = I_A$, 于是, 对 A 中任意两个元 a, b , 当 $f(a) = f(b)$ 时, 有

$$a = I_A(a) = (g \circ f)(a) = g[f(a)] = g[f(b)] = (g \circ f)(b) = I_A(b) = b.$$

这就证明了 f 是单射.

反之, 设 f 是单射, 当 $b \in \text{Im } f$ 时, b 存在唯一的原象 $f^{-1}(b)$.

在 A 中选定一个元 a_0 , 作 B 到 A 的映射 g :

$$g(b) = \begin{cases} f^{-1}(b) & \text{当 } b \in \text{Im } f \\ a_0 & \text{当 } b \notin \text{Im } f \end{cases}$$

于是, 对任意 $a \in A$, 有

$$(g \circ f)(a) = g[f(a)] = f^{-1}[f(a)] = a = I_A(a)$$

即 $g \circ f = I_A$.

(2) 先证充分性. 设存在 B 到 A 的映射 h , 使得 $f \circ h = I_B$, 于是, 对任意 $b \in B$, 有

$$b = I_B(b) = (f \circ h)(b) = f[h(b)].$$

这表明, 存在 $h(b) \in A$, 使得 $f[h(b)] = b$. 从而知 f 是 A 到 B 的满射.

反之, 设 f 是满射. 于是, B 中任意元 b 在 f 作用下均有原象. 作 B 到 A 的映射 $h: b \mapsto x$, x 是 b 在 f 作用下的某一个原象, 即 $f(x) = b$. 对任意 $b \in B$, 有

$$(f \circ h)(b) = f[h(b)] = f(x) = b = I_B(b),$$

即 $f \circ h = I_B$.

(3) 因为双射既是单射, 又是满射, 由结论(1)和(2)立得充分性的证明.

反之, 设 f 是双射, 于是, 存在 B 到 A 的映射 g 和 h , 使得 $g \circ f = I_A$, $f \circ h = I_B$, 从而有

$$g = g \circ I_B = g \circ [f \circ h] = [g \circ f] \circ h = I_A \circ h = h.$$

若记 $g = h = \varphi$, 于是 $\varphi \circ f = I_A$, $f \circ \varphi = I_B$. ■

定理一中映射 g , h 和 φ , 分别称为映射 f 的左逆映射, 右逆映射和逆映射, 且分别记为 f_l^{-1} , f_r^{-1} 和 f^{-1} . 容易看出, 当 f 为单射时, 其左逆映射 f_l^{-1} 为满射; 当 f 为满射时, 其右映射 f_r^{-1} 为单射; 当 f 为双射时, 其逆映射 f^{-1} 为双射, 並且有 $(f^{-1})^{-1} = f$.

习 题

1. 设 $\{A_\alpha \mid \alpha \in I, A_\alpha \subseteq U\}$ 是全集 U 的子集族, $A \subseteq U$. 证明:

$$1) A \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup A_\alpha),$$

$$A \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap A_\alpha).$$

$$2) \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right)' = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha', \quad \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right)' = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha',$$

其中 A_α' 是 A_α 在 U 中的余集, 即 $A_\alpha' = U \setminus A_\alpha$.

2. 设 $A = \{a, b\}$, $B = \{x, y\}$. 求 $A \times B$, 2^A , $2^A \times 2^B$. 其中 2^A 是 A 的全体子集所成的子集族, 称为 A 的幂集. 即

$2^A = \{S \mid S \subseteq A\}$.

3. 设 f 是 A 到 B 的映射, g 是 B 到 C 的映射, 证明:

1) 若 f 和 g 都是单射, 则 $g \circ f$ 也是单射.

2) 若 f 和 g 都是满射, 则 $g \circ f$ 也是满射.

3) $g \circ f$ 若是单射, 则 f 是单射.

4) 若 $g \circ f$ 是满射, 则 g 是满射.

5) 若 f 和 g 都是双射, 则 $g \circ f$ 也是双射.

4. 设 f 是 A 到 B 的映射, $S \subseteq A, T \subseteq B$. 证明: $S \subseteq f^{-1}[f(S)]$; $f[f^{-1}(T)] \subseteq T$. 举例说明, 等号不一定成立. 进而指出等号成立的条件.

5. 设 f 是 A 到 B 的映射, $\{S_\alpha \mid \alpha \in I, S_\alpha \subseteq A\}$ 是 A 的子族. 证明:

1) $f(\bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} f(S_\alpha)$.

2) $f(\bigcap_{\alpha \in I} S_\alpha) \subseteq \bigcap_{\alpha \in I} f(S_\alpha)$.

并举例说明 2) 式中等号不一定成立.

6. 设 f 是 A 到 A 的满射 (或单射 f , 且 $f \circ f = f$), 证明 $f = I_A$.

7. 设 A 为有限集, 其元数 $|A| = n$.

1) 求出 A 到 A 的映射的个数; 求出 A 到 A 的双射的个数.

2) 若 f 是 A 到 A 的映射, 证明: f 是单射 $\iff f$ 是满射 $\iff f$ 是双射.

§2 等价关系与集合分类

本节讨论集合元素间的关系, 特别是等价关系. 这一概念的引入, 使我们能够对一个集合的元素进行分类. 而这一方法是近世代数中常用的一个基本方法.

定义 1 设 A 为非空集合. 加氏积 $A \times A$ 的一个子集 R , 称为集合 A 上的一个关系. 对 A 中的两个元 a, b , 当 $(a, b) \in R$

时,称元 a, b 有关系 R ,记为 aRb ;当 $(a, b) \notin R$ 时,称元 a, b 没有关系 R ,记为 $a\bar{R}b$.

例1 设 $A = \{a, b, c\}$, 令

$$R = \{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a)\}$$

则 $R \subseteq A \times A$. 由定义1, R 是集合 A 上的一个关系,并且有 aRa , bRb , aRb , bRa 及 $a\bar{R}c$, $c\bar{R}a$, $b\bar{R}c$, $c\bar{R}b$ 等等.

例2. 设 $A = \mathbb{N}$, 令

$$R = \{(m, n) \mid m \mid n, \text{即} \exists k \in \mathbb{Z}, \text{使得 } n = km, m, n \in \mathbb{N}\},$$

则 $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, R 是 $\mathbb{N}$ 上的一个关系,并且有 $5R30$, $4R56$, $30\bar{R}5$, $7\bar{R}20$ 等等. 关系 R 就是正整数的一个整除关系.

$\mathbb{N}$ 上的这个关系也可以表示为:

$$mRn \iff m \mid n, m, n \in \mathbb{N}.$$

例3 设 $R[x]$ 是实系数多项式集合, 令

$$f(x)Rg(x) \iff f(0) = g(0), f(x), g(x) \in R[x]$$

易知 R 是 $R[x]$ 上的一个关系. 这个关系就是多项式常数项相等的关系.

例4 设 $(R)_n$ 是 n 阶实方阵集合, $n \geq 2$, 令

$$AR_1B \iff |A| = |B|, A, B \in (R)_n$$

则 R_1 是 $(R)_n$ 上的一个关系. 这个关系就是矩阵间行列式相等的关系. 如果令

$$AR_2B \iff r(A) = r(B) \quad (r(T) \text{ 表示矩阵 } T \text{ 之秩}),$$

$A, B \in (R)_n$, 则 R_2 也是 $(R)_n$ 上的一个关系.

例5 设 A 为非空集合, 令

$$SR_1T \iff S \cap T \neq \emptyset$$

$$SR_2T \iff S \subseteq T, S, T \in 2^A$$

则 R_1, R_2 都是 2^A 上的关系. 关系 R_1 就是子集间的相交关系, 关系 R_2 就是子集间的包含关系.

定义 2 设 R 是集合 A 上的一个关系,

(1) 如果对 所有 $a \in A$, 都有 aRa , 则称关系 R 具有反身性.

(2) 如果对 所有 $a, b \in A$, 当 aRb 时, 恒有 bRa , 则称关系 R 具有对称性.

(3) 如果对 所有 $a, b, c \in A$, 当 aRb, bRc 时, 恒有 aRc , 则称关系 R 具有传递性.

(4) 如果对 所有 $a, b \in A$, 当 aRb 且 bRa 时, 恒有 $a = b$, 则称关系 R 具有反对称性.

在例 1 中, 关系 R 具有对称性, 传递性, 但没有反身性和反对称性; 例 2 中的关系 R 具有反身性, 传递性, 反对称性, 但没有对称性; 例 3 中的关系 R 具有反身性, 对称性和传递性, 但没有反对称性.

定义 3 设 R 是集合 A 上的一个关系, 如果关系 R 同时具有反身性, 对称性和传递性, 则称关系 R 是集合 A 上的一个等价关系, 並记为 $\sim$.

例 6 设 $A = \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, 令 $x \sim y \iff n \mid (x - y)$, $x, y \in \mathbb{Z}$ 易知, $\sim$ 是 $\mathbb{Z}$ 上的一个关系. 又因为

(1) 对所有 $x \in \mathbb{Z}$, $n \mid (x - x)$, 因而有 $x \sim x$, 即关系 $\sim$ 具有反身性.

(2) 对所有 $x, y \in \mathbb{Z}$, 当 $x \sim y$ 时, 有 $n \mid (x - y)$, 从而 $n \mid (y - x)$, $y \sim x$, 即关系 $\sim$ 具有对称性.

(3) 对所有 $x, y, z \in \mathbb{Z}$, 当 $x \sim y, y \sim z$ 时, $n \mid (x - y)$, $n \mid (y - z)$, 从而 $n \mid (x - z)$, $x \sim z$, 即关系 $\sim$ 具有传递性.

由定义 3 关系 $\sim$ 是 $\mathbb{Z}$ 上的一个等价关系, 称为模 n 的同余关系. 当 $x \sim y$ 时, 称 x, y 关于模 n 同余, 记为 $x \equiv y \pmod{n}$, 或记为 $x \equiv y (n)$.

例 7 设 f 是集合 A 到 B 的映射, 令

$$a \sim b \iff f(a) = f(b), a, b \in A$$

易知, $\sim$ 是集合 A 上的一个关系。又因为

(1) 对所有 $a \in A$, $f(a) = f(a)$, 从而 $a \sim a$, 即关系 $\sim$ 具有反身性。

(2) 对所有 $a, b \in A$, 当 $a \sim b$ 时, $f(a) = f(b)$, 从而 $f(b) = f(a)$, $b \sim a$, 即关系 $\sim$ 具有对称性。

(3) 对所有 $a, b, c \in A$, 当 $a \sim b$, $b \sim c$ 时, $f(a) = f(b)$, $f(b) = f(c)$, 从而 $f(a) = f(c)$, $a \sim c$, 即关系 $\sim$ 具有传递性。

由定义, $\sim$ 是 A 上的一个等价关系, 它是由 A 到 B 的一个映射 f 所决定的。

容易验证, 例 3 中的关系 R 及例 4 中的关系 R_1 和 R_2 , 都是集合上的等价关系。

有了等价关系的概念, 可以引入集合元素分类的概念。

定义 4 设 $\sim$ 是集合 A 上的一个等价关系。 $a \in A$, 集合 $\{x \mid x \in A, x \sim a\}$, 称为由关系 $\sim$ 所决定的 a 所在的一个等价元素类, 简称 a 的等价类, 记为 $\bar{a}$ 。 A 的全体等价元素类的集合 $\{\bar{a} \mid a \in A\}$, 称为集合 A 关于等价关系 $\sim$ 的商集, 记为 $A/\sim$ 。

对每一个 $a \in A$, $a \in \bar{a}$, 从而 $\bar{a} \neq \emptyset$, 又 $\bar{a} \subseteq A$, 因而商集 $A/\sim$ 是集合 A 的子集族。

例 6 已经验证, 模 n 的同余关系是一个等价关系。对于任意 $m \in \mathbb{Z}$, m 所在的等价类 $\bar{m} = \{x \mid x \equiv m(n), x \in \mathbb{Z}\}$, 称为 m 的模 n 的剩余类。因为 $x \equiv m(n) \iff n \mid (x - m)$, 从而 $x = kn + m$, $k \in \mathbb{Z}$; 于是得 $\bar{m} = \{x \mid x = kn + m, k \in \mathbb{Z}\}$ 。

$\mathbb{Z}$ 关于这个等价关系的商集 $\mathbb{Z}/\sim$, 称为模 n 的剩余类集合, 记为 $\mathbb{Z}_n$ 。

命题 1 设 $\sim$ 是集合 A 上的一个等价关系, $a, b \in A$,

$$(1) \bar{a} = \bar{b} \iff a \sim b,$$

(2) 若 $\overline{a} \neq \overline{b}$, 则 $\overline{a} \cap \overline{b} = \phi$,

(3) $\bigcup_{a \in A} \overline{a} = A$.

证 (1) 设 $\overline{a} = \overline{b}$, 因 $a \in \overline{a}$, 从而 $a \in \overline{b}$, $a \sim b$. 反之, 设 $a \sim b$, 任取 $x \in \overline{a}$, 则 $x \sim a$, 由传递性得 $x \sim b$, $x \in \overline{b}$, 从而 $\overline{a} \subseteq \overline{b}$. 由对称性知, $b \sim a$, 同理可得 $\overline{b} \subseteq \overline{a}$, 于是 $\overline{a} = \overline{b}$.

(2) 反证法, 假设 $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \phi$, 则存在 $x \in \overline{a}$ 且 $x \in \overline{b}$, 于是 $x \sim a$, $x \sim b$. 由对称性及传递性知, $a \sim b$. 由结论 1 得 $\overline{a} = \overline{b}$, 与题设条件矛盾. 因此, $\overline{a} \cap \overline{b} = \phi$.

(3) 由 $\overline{a} \in A$ 得 $\bigcup_{a \in A} \overline{a} \subseteq A$. 任取 $a \in A$, 因 $a \in \overline{a}$, 从而

$a \in \bigcup_{a \in A} \overline{a}$, 即 $A \subseteq \bigcup_{a \in A} \overline{a}$. 于是得到 $\bigcup_{a \in A} \overline{a} = A$. ■

在例 6 中, 设 $m \in Z$, m 除以 n 所得余数为 k , 则 $m \sim k$, $\overline{m} = \overline{k}$, 由于 $0 \leq k \leq n-1$, 因而得到 $Z_n = \{ \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{n-1} \}$.

定义 5 设 A 为非空集合, $\Sigma = \{ A_\alpha \mid \alpha \in I, A_\alpha \neq \phi \}$ 是集合 A 的子集族, 如果满足

(1) 当 $A_\alpha \neq A_\beta$ 时, $A_\alpha \cap A_\beta = \phi$, $\alpha, \beta \in I$,

(2) $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = A$.

则称子集族 Σ 是集合 A 的一个分类. 每一个 A_α 称为一个类, 当 $x \in A_\alpha$ 时, 称 x 为 A_α 的一个代表元.

集合 A 的一个分类, 相当于把 A 分成一些互不相交的非空子集的并.

容易看出, 等价关系与集合分类之间有着密切的关系. 这就是下面的定理.

定理 1 集合 A 上的一个等价关系决定 A 的一个分类, 反之, 集合 A 的一个分类决定 A 上的一个等价关系。

证 设 $\sim$ 是集合 A 上的一个等价关系, 由命题 1 的结论 (2)、(3), 可知商集 $A/\sim$ 是集合 A 的一个分类。

反之, 设 $\Sigma = \{A_\alpha \mid \alpha \in I, A_\alpha \neq \phi\}$ 是集合 A 的一个分类, 令

$$a \sim b \iff a, b \text{ 属于同一个类 } A_\alpha, \alpha \in I.$$

易知, $\sim$ 是集合 A 上的一个等价关系。事实上

(1) 对任意 $a \in A$, a 与 a 属于同一个类 A_α , 从而 $a \sim a$, 即关系 $\sim$ 具有反身性。

(2) 对 $a, b \in A$, 当 $a \sim b$ 时, a, b 属于同一个类 A_α , 从而 b, a 同属于这个类 A_α , $b \sim a$, 即关系 $\sim$ 具有对称性。

(3) 对 $a, b, c \in A$, 当 $a \sim b, b \sim c$ 时, a, b 属于同一类 A_α , b, c 属于同一个类 A_β , 于是 $b \in A_\alpha \cap A_\beta$, $A_\alpha \cap A_\beta \neq \phi$. 假如 $A_\alpha \neq A_\beta$, 由于 Σ 是集合 A 的一个分类, 得 $A_\alpha \cap A_\beta = \phi$, 此矛盾表明, $A_\alpha = A_\beta$, 于是 a, c 属于同一个类 A_α , $a \sim c$, 即关系 $\sim$ 具有传递性。

综上所述, Σ 中的每一个类就是一个等价类, Σ 就是集合 A 关于这个等价关系的商集。■

最后, 我们来介绍一下, 利用等价关系, 将一个满射分解成两个映射的合成。

设 $\sim$ 是集合 A 上的一个等价关系, 令

$$\varphi: a \mapsto \overline{a}, \quad a \in A$$

则 φ 是集合 A 到商集 $A/\sim$ 的满射。映射 φ 称为 A 到 $A/\sim$ 的自然映射。

设 f 是集合 A 到集合 B 的满射, 令

$$a \sim b \iff f(a) = f(b), \quad a, b \in A$$

由例 7 知, $\sim$ 是集合 A 上的一个等价关系。自然, $A/\sim$ 就是一