高考成功导引

——数学

段云鑫　主编

科学普及出版社

高考成功导引

——数学

段云鑫 主编

科学普及出版社
·北京·

(京)新登字 026 号

图书在版编目(CIP)数据

高考成功导引:数学/段云鑫主编.—北京:科学普及出版社,1993.11
ISBN 7-110-03132-2

Ⅰ.高…
Ⅱ.段…
Ⅲ.数学-高中-升学考试-教学参考资料
Ⅳ.G6633.6

科学普及出版社出版
北京海淀区白石桥路 32 号　邮政编码:100081
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
北京市密云县印刷厂印刷
*
开本:787×1092 毫米　1/32　印张:14.5 插页:　字数:325 千字
1993 年11月第1版　1993 年11月第1次印刷
印数:1—3000 册　定价:9.50 元

内容提要

本书以《中学数学教学大纲》和《高考数学科说明》为依据，准确、全面、系统地阐述现行数学教材的基本概念、基础理论和基本技能，并突出了重点和难点．知识点归纳简明，覆盖率高；所选例题精当典型，富于启发性，反映了高考的最新信息．有利于考生提高复习效率和应试能力．

《高考成功导引》编辑委员会

高考成功导引——数学 主编　段云鑫
参加编写人员　朱国华　傅佑珊
责任编辑　李宝荣
封面设计　周秀璋
正文设计　高丽娜

出版说明

为了适应高等学校招生考试不断深化改革的新形势，帮助广大考生提高复习效率和应试能力，我们组织编写了这套《高考成功导引丛书》，共包括语文、数学、物理、化学、英语五个分册．

丛书以国家教委颁布的中学教学大纲和国家教委考试中心编发的高考各科考试说明为依据；以巩固知识，提高能力，准确简明，突出实用性为宗旨．各分册按教材划块或分章节编排．每部分设有：(1)知识要点：准确、全面、系统而又扼要地反映教材的重点和难点；(2)例题分析：结合近年高考试题的命题意图、题型特点，解题思路和技巧，以及考生答题的得失，进行辨析与探讨；(3)练习题：选题精当、典型、多样，富于启发性，并备有简要提示和答案，章节后附有单元测试题，书后附有高考模拟题．三者相辅相成，形成科学完整的体系，利于考生明确考试范围，融会贯通地掌握知识，并有效地把知识转化成能力．它是引导考生走上高考成功之路的良师，高三老师的助手，对于其它高中学生和自学青年也是一套有价值的参考书．

参加本丛书编写的主要是北京汇文中学、广渠门中学、50中等位于北京崇文区的重点中学的一些多年在高三任课的教师．他们大都教学经验丰富，著述颇丰．北京崇文区近几年高考成绩稳步提高，1992、1993 年跃居全市 18 个区县之首，和他们的骨干作用是密不可分的．丛书从一个侧面反映了他们的成功经验．它对于希望走向成功之路的广大考生，无疑

会有所启迪和帮助.

参加本丛书编写的还有北京西城区教研中心、北京教育学院西城分院、北京崇文区教研室、北京工业大学附中等单位的一些富有经验的教师和教研人员.

北京师范大学教育科学研究所所长闫金铎教授等参加了本丛书的指导工作,我们深表感谢.

这套丛书是老师们在百忙中抽出业余时间编写的,又限于我们的水平和经验,错漏之处,恳请读者斧正.

编委会

1993年6月

目　　录

第一部分　代数 …………………………………… (1)
第一章　函数与图象…………………………………… (1)
　第一节　集合与映射………………………………… (1)
　第二节　函数的基本知识…………………………… (8)
　第三节　幂函数、指数函数、对数函数 ……………… (21)
第二章　三角函数 ……………………………………… (43)
　第一节　三角函数的定义和性质 …………………… (43)
　第二节　三角函数式的恒等变形 …………………… (58)
第三章　反三角函数与三角方程 ……………………… (80)
　第一节　反三角函数 ………………………………… (80)
　第二节　三角方程 …………………………………… (89)
第四章　不等式 ………………………………………… (97)
　第一节　不等式的证明 ……………………………… (97)
　第二节　不等式的解法……………………………… (108)
第五章　数列、极限、数学归纳法…………………… (126)
　第一节　数列………………………………………… (126)
　第二节　数列的极限………………………………… (140)
　第三节　数学归纳法………………………………… (148)
第六章　复数…………………………………………… (156)
　第一节　复数………………………………………… (156)
　第二节　复数的应用………………………………… (173)
第七章　排列、组合与二项式定理 …………………… (187)

第一节　排列、组合 …………………………………… (187)
第二节　二项式定理………………………………… (196)
代数综合练习一……………………………………… (201)
代数综合练习二……………………………………… (210)
第二部分　立体几何 ………………………………… (217)
第八章　直线与平面………………………………… (217)
第一节　共面与异面问题………………………… (217)
第二节　平行与垂直问题………………………… (229)
第三节　空间角与距离问题……………………… (246)
第九章　多面体与旋转体…………………………… (265)
立体几何综合练习…………………………………… (282)
第三部分　平面解析几何 …………………………… (285)
第十章　直线………………………………………… (285)
第一节　直线……………………………………… (285)
第二节　曲线与方程……………………………… (298)
第十一章　圆锥曲线………………………………… (307)
第一节　圆………………………………………… (307)
第二节　椭圆……………………………………… (314)
第三节　双曲线…………………………………… (324)
第四节　抛物线…………………………………… (334)
第五节　坐标轴的平移…………………………… (344)
第十二章　参数方程、极坐标 ……………………… (354)
第一节　参数方程………………………………… (354)
第二节　极坐标…………………………………… (368)
解析几何综合练习…………………………………… (377)
第四部分　解选择题的常用方法简介 ……………… (387)

第五部分　综合训练试题 …………………………… (399)
综合训练试题一……………………………………………… (399)
综合训练试题二……………………………………………… (407)
综合训练试题三……………………………………………… (416)
综合训练试题四……………………………………………… (424)
综合训练试题五……………………………………………… (434)
综合训练试题六……………………………………………… (443)

第一部分　代数

第一章　函数与图象

第一节　集合与映射

知识要点

一、集合

1. 集合的基本概念：

(1) 把一些确定的对象看成一个整体就形成了一个集合。集合里的各个对象叫做集合的元素．a 是集合 A 中的元素表示成 $a \in A$，否则表示成 $a \notin A$.

(2) 特性：① 确定性，② 元素的互异性，③ 元素的无序性.

(3) 分类：① 有限集，② 无限集，③ 空集(记作 $\varnothing$)

(4) 表示法：① 列举法，② 描述法，③ 图示法.

(5) 常见数集：N(自然数集)，Z(整数集)，Q(有理数集)，R(实数集)，C(复数集).

2. 集合与集合的关系及运算

(1) 子集：如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，那么 A 叫做 B 的子集，记作 $A \subseteq B$.

真子集：如果 A 是 B 的子集，并且 B 中至少有一个元素不属于 A，那么 A 叫做 B 的真子集，记作 $A \subset B$.

集合相等：如果 $A \subseteq B$，并且 $B \subseteq A$，那么 $A = B$.

(2)　交集：由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组

成集合，叫做 A、B 的交集，记作 $A \cap B$.

(3) 并集：由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A、B 的并集，记作 $A \cup B$.

(4) 全集：与所要研究的问题有关的全部元素所组成的集合叫做全集，全集用 I 表示.

(5) 补集：已知全集 I，集合 $A \subseteq I$，由 I 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做 A 在 I 中的补集，记作 $\overline{A}$.

二、映射

1. 映射：设 A、B 是两个集合，如果按照某种对应法则 f，对于集合 A 中的任何一个元素，在 B 中都有唯一的元素和它对应，这样的对应(包括集合 A、B 及从 A 到 B 的对应法则 f) 叫做从集合 A 到集合 B 的映射，记作 $f: A \to B$. 其中，和 A 中的元素 a 对应的 B 中的元素 b 叫做 a 的象，a 叫做 b 的原象.

2. 一一映射：设 A，B 是两个集合，$f: A \to B$ 是从集合 A 到集合 B 的映射，如果在这个映射的作用下，对于集合 A 中的不同元素，在集合 B 中有不同的象，而且 B 中每一个元素都有原象，那么这个映射就叫做 A 到 B 上的一一映射.

三、在两个有因果关系的事件 A 和 B 之间的充要条件.

1. 如果 $A \Rightarrow B$，那么 A 是 B 成立的充分条件.

2. 如果 $B \Rightarrow A$，那么 A 是 B 成立的必要条件.

3. 如果 A 既是 B 成立的充分条件，又是 B 成立的必要条件，那么 A 是 B 成立的充要条件.

例题分析

例 1*　若 $A = \{x \mid x^2 < 21\}$，$a = 2\sqrt{5}$. 那么(　　)

* 本书中所有的选择题都只有一个结论正确，为节省篇幅，后面不再说明。

(A)$a \subseteq A$;(B)$\{a\} \in A$;(C)$a \notin A$;(D)$\{a\} \subset A$.

分析与解:要正确使用集合中的符号．元素与集合间用 $\in$、$\notin$ 号,集合与集合间用 $\subset$、$\subseteq$ 号．选(D).

例 2　数集 $X = \{(2n+1)\pi, n$ 是整数$\}$ 与数集 $Y = \{(4k \pm 1)\pi, k$ 是整数$\}$ 之间的关系是(　　)

(A)$X \subset Y$;　(B)$X \supset Y$;　(C)$X = Y$;

(D)$X \neq Y$.

分析与解:本题要从集合间的包含、等与不等的概念出发来考查。如果能判定 $X \supseteq Y$,同时 $Y \supseteq X$,则 $X = Y$(本题为1986 年全国高考题).

$\because \{2n+1, n \in Z\} = \{$奇数$\}$,　而 $4k \pm 1(k \in Z)$ 必为奇数,$\therefore$　$X \supseteq Y$.

反之,当 $x \in X$ 时,$x = (2n+1)\pi$,若 n 为奇数,即 $n = 2k - 1(k \in Z)$,则 $x = (4k-1)\pi, x \in Y$;若 n 为偶数,即 $n = 2k(k \in Z)$,则 $x = (4k+1)\pi, x \in Y$,故 $Y \supseteq X$.

由 $X \supseteq Y$ 且 $Y \supseteq X$ 可知 $X = Y$. 选(C).

例 3　设有非空集合 M、N,且 $M \subset N$,I 为全集,则下列集合中为空集的是(　　)

(A)$M \cap \overline{N}$;　(B)$M \cap N$;　(C)$\overline{M} \cap N$;　(D)$\overline{M} \cap \overline{N}$.

分析与解:可利用图 1—1 所示的图示法,直观得到 $M \cap \overline{N}$ 是空集。选(A).

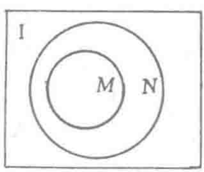

图 1 — 1

评注:利用圆、椭圆或其它封闭图形表示一个集合,这种图称为韦恩图(简称文氏图),运用图示法可以直观解决很多有关集合的问题.

例 4　设 $A=\{x|x^2-px+15=o\}$，$B=\{x|x^2-5x+q=o\}$，又 $A\cup B=\{2,3,5\}$，且 $A\cap B=\{3\}$，求 p 和 q.

分析与解：本题可以运用交集与并集的概念，同时利用一元二次方程根与系数的关系定理来考虑.

由 $x^2-px+15=0$，得

$$\begin{cases}x_1+x_2=p,\\x_1x_2=15.\end{cases}$$

由 $x^2-5x+q=0$，得

$$\begin{cases}x_3+x_4=5,\\x_3x_4=q。\end{cases}$$

又 $\because A\cup B=\{2,3,5\}$，且 $A\cap B=\{3\}$，

$\therefore$ 上述两个方程有一个公共根 3.

不妨令 $x_1=x_3=3$，　则 $x_2=\dfrac{15}{3}=5$，　$x_4=5-3=2$.

$\therefore p=3+5=8$，$q=3\times 2=6$.

例 5　已知 $I=\{$实数对$(x,y)\}$，$A=\{(x,y)|\lg(y-4)-\lg(x-2)=\lg 3\}$，$B=\{(x,y)|3x-y-2=0\}$，求 $\overline{A}\cap B$.

分析与解：实数对 (x,y) 与直角坐标平面上的点是一一对应的，所以本题可以结合图象来思考.

由　$\lg(y-4)-\lg(x-2)\doteq\lg 3$，得　$\dfrac{y-4}{x-2}=3$，

即　$3x-y-2=0$　$(x>2,y>4)$.

$\therefore$　集合 A 中的实数对在直角坐标平面上对应的图形是一条射线（不包括端点），

$\therefore$　$\overline{A}\cap B=\{(x,y)|3x-y-2=0,x\leqslant 2,y\leqslant 4\}$.

例 6　设集合 $A=\{2,4,a^3-2a^2-a+7\}$，$B=\{-4,a+3,a^2-2a+2,\ a^3+a^2+3a+7\}$，若 $A\cap B=\{2,5\}$，求

a.

分析与解：由 $A \cap B = \{2,5\}$ 知集合 A 中必含有元素 2 和 5，而 $A = \{2,4,a^3 - 2a^2 - a + 7\}$，所以有

$$a^3 - 2a^2 - a + 7 = 5.$$

解之，得 $a = 2$ 或 $a = -1$. 代入集合 B 验算知它们都适合题意.

例 7 设 $M\{(x,y) | x \in Z, |x| < 2, y \in N, x + y < 3\}$，$N = \{0,1,2\}$，$f:(x,y) \to x + y$ 是 M 到 N 的对应法则，试判断 f 是不是从 M 到 N 的映射？

分析与解：首先要解决集合 M 中的元素是什么？再判断是否从 M 到 N 的映射.

由 $x \in Z$，且 $|x| < 2$ 知 $x \in \{-1,0,1\}$，

又 $\because Y \in N, x + y < 3$，

$\therefore$ $M = \{(-1,1),(-1,2),(-1,3),(0,1),(0,2),(1,1)\}$.

$\because$ $f:(x,y) \to x + y$，

$\therefore$ M 中每个元素中一对数的和都在 $N = \{0,1,2\}$ 中能找到唯一的象.

$\therefore$ f 是从 M 到 N 的映射.

例 8 设甲是乙的充分不必要条件，乙是丙的充要条件，丁是丙的必要不充分条件，那么丁是甲的（　　）

(A) 充分不必要条件；(B) 必要不充分条件；

(C) 充要条件；(D) 既不充分也不必要条件.

分析与解：依题意，有

$$甲 \Rightarrow 乙 \Leftrightarrow 丙 \Rightarrow 丁,$$

所以丁 $\Leftarrow$ 甲，即丁是甲的必要不充分条件。选(B).

练 习 题

一、选择题:

1. 已知集合 P 和 Q,那么 $P \cap Q = Q$ 的充要条件是(　　)

(A)$P \subseteq Q$;(B)$P \supset Q$;(C)$P = Q$;(D)$P \supseteq Q$.

2. 设集合 $M = \{x \mid x^2 - x - 6 = 0\}$,全集 $I = R$,则 $\overline{M}$ 是(　　)

(A)$\{x \mid x \in R$ 且 $x \neq -2, x \neq 3\}$;

(B)$\{x \mid x = -2\} \cap \{x \mid x = 3\}$;

(C)$\{x \mid x < -2\} \cup \{x \mid -2 < x < 3\}$;

(D)$\{x \mid x \neq -2\} \cup \{x \mid x \neq 3\}$.

3. 满足关系 $\{0\} \subseteq M \subset \{0,1,2,3\}$ 的集合 M 有(　　)

(A)　5 个;　(B)6 个;　(C)7 个;　(D)8 个.

4. 设 $n \in N$, $P = \{x \mid x = n\}$, $Q = \left\{x \mid x = \dfrac{n}{2}\right\}$, $M = \left\{x \mid x = n - \dfrac{1}{2}\right\}$,那么下面正确的是(　　)

(A)　$Q = (P \cap M)$;　(B)　$Q = (P \cup M)$;

(C)　$Q \subset P$;　　　(D)　$Q \subset M$.

5. 下列各组的两个命题中,等价的是(　　)

(A)　$a \in A$ 与 $a \in A \cup B$;

(B)　$a \in A \cap B$ 与 $a \in A \cup B$;

(C)　$a \in A \cap B$ 与 $a \in B$;

(D)　$A \subseteq B$ 与 $A \cup B = B$.

6. 已知 f 是从集合 A 到集合 B 的一个对应,“f 不是一一映射”是“f 不是映射”的(　　)

(A)　充分条件;　(B)　必要条件;

(C)　充要条件;　(D)　既非充分又非必要条件.

7. 若按对应关系 $f: x \to y = x^2$，使集合 P 的元素 x 对应于集合 Q 的元素 y，在下列情况下，f 是从 P 到 Q 的一一映射的是（　　）

(A)　$P = R, Q = R$；

(B)　$P = R, Q = \{$非负实数$\}$；

(C)　$P = \{$非负实数$\}, Q = R$；

(D)　$P = \{$非负实数$\}, Q = \{$非负实数$\}$.

二.　填空题：

1. 已知 $I = R, A = \{x \mid x^2 - 2x > 0\}, B = \{x \mid x^2 - 2x - 3 \leqslant 0\}$. 则 $\overline{A} =$ ________，$A \cap B =$ ________；

2. 设 $I = \{$小于 13 的自然数$\}$，$T = \{$2 的倍数$\}$，$E = \{$3 的倍数$\}$，$F = \{$4 的倍数$\}$，则 $E = \{$3 的倍数$\}$，$F = \{$4 的倍数$\}$，则 $E \cap F =$ ________，$\overline{T \cup E} =$ ________；

3. 已知集合 $M = \{2, 5(m^2 - 3m - 1) + (m^2 - 5m - 6)i\}$，$N = \{1, 3\}$，且 $M \cap N = \{3\}$，则 $m =$ ________；

4. 若集合 $M = \{(x, y) \mid 2x - 5y = 4\}$，$N = \{(x, y) \mid 4x + ay =$

$- 3\}$，且 $M \cap N = \varnothing$，则 $a =$ ________；

5. 已知集合 $A = \left\{0, 1, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}$，$B = \{\sin\alpha \mid \alpha \in A\}$，若用列举法表示集合 B，则 $B =$ ________；

6. 给定映射 $f: (x, y) \to (x + y, x - y)$，在映射下，象 $(3, 1)$ 的原象是________；

7. 若集合 $A = \{1, 3, 5\}$，$B = \{4, 10, 16\}$ 之间能建立一一映射，则 A 到 B 的对应法则是　$x \to y =$ ________.

三、已知集合 A 和集合 B 各含有 12 个元素，$A \cap B$ 含有 4 个元素，试求同时满足下面两个条件的集合 C 的个数，