俄罗斯数学精品译丛

"十二五"国家重点图书

Construction Theory of Function (I)

函数构造论（上）

[俄罗斯] 纳汤松 著 徐家福 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

俄罗斯数学精品译丛

“十二五”国家重点图书

函数构造论（上）

Construction Theory of Function (I)

· [俄罗斯] 纳汤松 著

· 徐家福 译

HITP

哈爾濱工業大學出版社

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书利用简单的分析工具(代数多项式与三角多项式)来讨论函数的逼近理论.本书主要介绍一致逼近理论,书中限于用古典分析的方法来处理函数逼近问题,述理说明,取材丰富,特别是对前苏联数学家在这方面的巨大成就进行了较多叙述,同时书中几乎未用到复变函数论方法.

本书可供数学专业大学生及高等数学研究人员参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

函数构造论.上/(俄罗斯)纳汤松著;徐家福译.
—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2016.1
(俄罗斯数学精品译丛)
ISBN 978—7—5603—5491—0

Ⅰ.①函… Ⅱ.①纳… ②徐… Ⅲ.①函数构造论
Ⅳ.①O174.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 252775 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 刘春雷
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451—86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 13.5 字数 252 千字
版 次 2016 年 1 月第 1 版 2016 年 1 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978—7—5603—5491—0
定 价 38.00 元

目录

引　论

函数构造论是数学分析的一个分支，它所研究的是利用最简单的分析工具来近似表达任意函数的问题.

在本书的第一篇中，我们将不去考虑非常广泛的函数类，而只限于研究下面两个重要的函数类：

Ⅰ. 定义在某一闭区间$[a,b]$上的连续实函数的集合，我们将用$C([a,b])$来表示.

Ⅱ. 定义在整个实轴$(-\infty,+\infty)$上的连续实函数，具有周期2π，因而对于任何x，都有

$$f(x+2\pi)=f(x)$$

今后我们用$C_{2\pi}$来表示所有这样的函数的集合.

我们用来近似地表示函数的那些最简单的分析工具有：对于函数类$C([a,b])$来说，便是通常的具有实系数的代数多项式

$$P(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n$$

而对于函数类$C_{2\pi}$来说，则为三角多项式，即形如

$$T(x)=A+(a_1\cos x+b_1\sin x)+\cdots+(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

的具有实系数A,a_k及b_k的函数.

最后我们应当解释，一个多项式$P(x)$(或$T(x)$)接近于某一函数$f(x)$这种说法的含义. 对于这个问题可以有各种不同的观点.

例如，像在本书第一篇中那样，如果对于一切 $x \in [a,b]$ 都有

$$|P(x)-f(x)|<\varepsilon$$

我们就说多项式 $P(x)$ 接近于 $C([a,b])$ 中的某一函数 $f(x)$，其中 $\varepsilon>0$ 是某一常数，它表征出所达到的逼近程度.

与此相仿，如果对于所有实数 x 都有

$$|T(x)-f(x)|<\varepsilon$$

我们就认为三角多项式 $T(x)$ 接近于函数 $f(x)\in C_{2\pi}$.

但是，由于把 x 换成 $x+2\pi$ 后，$T(x)$ 与 $f(x)$ 之值都不改变，因而任一个不等式只要在某一个长度为 2π 的闭区间上，例如在 $[0,2\pi]$ 上（甚至在右开左闭的区间 $[0,2\pi)$ 上）成立，它便“自然而然地”在整个实轴上都成立.

由于是用这一原则来估计用多项式逼近函数的程度，于是我们便把相应的理论称为函数的一致逼近理论.

不难看出，在所述的观点下，对于 $C([a,b])$ 中的函数来说，可以把量

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|P(x)-f(x)|$$

当作所达到的逼近程度的“度量”，而对于 $f(x)\in C_{2\pi}$，可以把量

$$\max_{-\infty\leqslant x\leqslant+\infty}|T(x)-f(x)|$$

当作所述的“度量”. 这就是所谓 $f(x)$ 与 $P(x)$（或对应地，$f(x)$ 与 $T(x)$）间的“距离”.

在本书第二篇中讲述平方逼近理论时，我们将研究相当广泛的函数 $f(x)$ 的近似表示，所用的分析工具，主要还是那些通常的代数多项式 $P(x)$ 以及三角多项式 $T(x)$，可是估计达到逼近程度的标准却改变了.

那就是，我们要用积分

$$\int_a^b[P(x)-f(x)]^2\mathrm{d}x$$

作为 $f(x)$ 与 $P(x)$ 之间的“距离的度量”，而对于估计三角多项式 $T(x)$ 与定义在 $[-\pi,+\pi]$ 上的函数 $f(x)$ 的偏差却引用积分

$$\int_{-\pi}^{\pi}[T(x)-f(x)]^2\mathrm{d}x$$

我们看到，这种观点的改变导向完全另外的理论上去，其问题与结果也都是两样.

最后，在第三篇中我们将研究内插问题，在那里我们并不用

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|P(x)-f(x)|$$

或

$$\int_a^b[P(x)-f(x)]^2\mathrm{d}x$$

这两个量作为多项式 $P(x)$ 与函数 $f(x)\in C([a,b])$“接近”程度的标准，而使

得 $P(x)$ 与 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的某些预先选定的点("内插结点")

$$x_1, x_2, \cdots, x_n$$

处的值相等.同样,可以提出用多项式 $T(x)$ 来逼近 $C_{2\pi}$ 中的函数 $f(x)$ 的问题,而诸结点都位于某一个长度为 2π 的闭区间上.

我们可以看到,对于这个问题的所有这些观点联系得如此密切,以至对应的理论深刻地相互贯穿着.各种代数的与分析的思想、方法与事实这种互相错综的结合,使得函数构造论除了它的重大实用价值之外,还是数学中最美丽的分支之一.

第一篇　一致逼近

第一章 魏尔斯特拉斯定理

§1 魏尔斯特拉斯第一定理

在一致逼近理论中，呈现在我们面前的第一个基本问题是：能不能用多项式去逼近任意的连续函数，而具有预先任意给定的精确度？1885 年，魏尔斯特拉斯对这个问题给出了肯定的答案，其结果可叙述为：

魏尔斯特拉斯第一定理 设 $f(x) \in C([a,b])$，对于任何 $\varepsilon > 0$，都存在这样的多项式 $P(x)$，使得对于一切 $x \in [a,b]$

$$| P(x) - f(x) | < \varepsilon$$

关于这个著名定理，现在有许多不同的证明方法. 我所要引用的一个证明，是以分析学中另一重要定理——C. H. 伯恩斯坦定理——为基础的.

引理 1.1 恒等式

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1 \tag{1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x) \tag{2}$$

都成立.

证明 恒等式(1)是极其显明的.如果在牛顿二项公式

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k} \tag{3}$$

中令 $a=x,b=1-x$ 就可以得到了.

第二个恒等式证明较难.在公式(3)中令 $a=z,b=1$,便得到恒等式

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k z^k=(z+1)^n \tag{4}$$

微分(4)并用 z 乘所得结果,便得

$$\sum_{k=0}^{n}kC_n^k z^k=nz(z+1)^{n-1} \tag{5}$$

微分(5)再用 z 乘所得结果,便得

$$\sum_{k=0}^{n}k^2C_n^k z^k=nz(nz+1)(z+1)^{n-2} \tag{6}$$

在恒等式(4),(5)及(6)中令

$$z=\frac{x}{1-x}$$

并用 $(1-x)^n$ 乘所得诸等式,于是便导出了三个新的恒等式

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=1 \tag{7}$$

$$\sum_{k=0}^{n}kC_n^k x^k(1-x)^{n-k}=nx \tag{8}$$

$$\sum_{k=0}^{n}k^2C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=nx(nx+1-x) \tag{9}$$

要想由此获得所需要的恒等式(2),只需用 $n^2x^2,-2nx$ 及1分别乘式(7),(8)及(9),并将所得结果相加即可.

推论 对于任何 x,都有

$$\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\leqslant\frac{n}{4} \tag{10}$$

因为

$$4x^2-4x+1=(2x-1)^2\geqslant 0$$

所以

$$x(1-x)\leqslant\frac{1}{4}$$

引理 1.2 设 $x\in[0,1]$,且 δ 是任意正数.用 $\Delta_n(x)$ 表示整数 $0,1,2,\cdots,n$ 中满足不等式

$$\left|\frac{k}{n}-x\right|\geqslant\delta \tag{11}$$

的那些 k 值所成的集合，则

$$\sum_{k\in\Delta_n(x)} C_n^k x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4n\delta^2} \tag{12}$$

证明 若 $k\in\Delta_n(x)$，根据式(11) 就有

$$\frac{(k-nx)^2}{n^2\delta^2} \geqslant 1$$

所以

$$\sum_{k\in\Delta_n(x)} C_n^k x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{n^2\delta^2}\sum_{k\in\Delta_n(x)}(k-nx)^2 C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

如果在右边的和中，遍取 $k=0,1,2,\cdots,n$ 以求和，则此和只可能增大，因为当 $x\in[0,1]$ 时所有新添的加数(对应于 $0,1,2,\cdots,n$ 中那些不含于$\Delta_n(x)$ 中的 k) 都不是负的，于是由不等式(10) 就立刻推出所需的不等式(12).

已证明的引理的含意，粗略地说，便是：当 n 很大时，在和

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k(1-x)^{n-k} \tag{13}$$

中起主要作用的只是满足条件

$$\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta$$

的那些 k 值所对应的加数，而其余的项对和的值几乎没有什么影响.

定义 1.1 设 $f(x)$ 为定义于闭区间$[0,1]$ 上的函数. 称多项式

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

为函数 $f(x)$ 的伯恩斯坦多项式.

不难预料，若 $f(x)$ 连续，则当 n 很大时这个多项式与 $f(x)$ 就相差极微. 事实上，我们已经指出了，和(13) 中 $\frac{k}{n}$ 远离 x 的那些项，几乎不起什么作用. 这对多项式 $B_n(x)$ 亦然. 由于因子 $f\left(\frac{k}{n}\right)$ 是有界的，所以在多项式 $B_n(x)$ 中，只有 $\frac{k}{n}$ 十分靠近 x 的那些加数才是重要的. 可是在这些项中，因子 $f\left(\frac{k}{n}\right)$ 几乎与 $f(x)$ 无异(连续性！). 这就意味着，如果用 $f(x)$ 来代替 $f\left(\frac{k}{n}\right)$ 的话，多项式 $B_n(x)$ 几乎没有改变. 换句话说，近似等式

$$B_n(x)\approx\sum_{k=0}^{n} f(x) C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

成立. 从而根据(1) 便立刻推得

$$B_n(x)\approx f(x)$$

以下所述的定理给出了这种带有启示作用的推理方法的精确形式：

伯恩斯坦定理 若 $f(x)$ 在闭区间$[0,1]$上连续,则对于 x 一致有

$$\lim_{n\to\infty} B_n(x)=f(x) \tag{14}$$

证明 用M表示$|f(x)|$的最大值.其次,取任意的$\varepsilon>0$,由于函数的一致连续性,可以求出这样的$\delta>0$,使得当

$$|x''-x'|<\delta$$

时便有

$$|f(x'')-f(x')|<\frac{\varepsilon}{2}$$

把这些作好后,我们从$[0,1]$中选取任意的x.

由(1)得

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x)\mathrm{C}_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

因而

$$B_n(x)-f(x)=\sum_{k=0}^{n}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right]\mathrm{C}_n^k x^k(1-x)^{n-k} \tag{15}$$

现在把整数$k=0,1,\cdots,n$分为两组:$\Gamma_n(x)$及$\Delta_n(x)$,而令

$$k\in\Gamma_n(x),\text{若}\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta$$

$$k\in\Delta_n(x),\text{若}\left|\frac{k}{n}-x\right|\geqslant\delta$$

与此相应,把和(15)也分成两组:$\sum_\Gamma$及$\sum_\Delta$.在其中的第一个和式中

$$\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

因而

$$\left|\sum\nolimits_\Gamma\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k\in\Gamma_n(x)}\mathrm{C}_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

又因

$$\sum_{k\in\Gamma_n(x)}\mathrm{C}_n^k x^k(1-x)^{n-k}\leqslant\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k x^k(1-x)^{n-k}=1$$

于是

$$\left|\sum\nolimits_\Gamma\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2} \tag{16}$$

在第二个和式中

$$\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\leqslant 2M$$

因而根据不等式(12)便得

$$\left|\sum\nolimits_{\Delta}\right| \leqslant 2M \sum_{k\in\Delta_n(x)} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{M}{2n\delta^2}$$

把这个不等式与不等式(16) 比较,我们便得

$$|B_n(x)-f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{M}{2n\delta^2}$$

若 n 充分大($n > N_\varepsilon$),则

$$\frac{M}{n\delta^2} < \varepsilon \tag{17}$$

因而

$$|B_n(x)-f(x)| < \varepsilon$$

因为由不等式(17) 所确定的 N_ε 并不依赖于所考虑的 x 值,所以定理获证.

现在我们便可以证明先前所提出的魏尔斯特拉斯定理.其实,如果闭区间 $[a,b]$ 与 $[0,1]$ 相同的话,则魏尔斯特拉斯定理便立刻可从伯恩斯坦定理推得①.今设闭区间 $[a,b]$ 异于 $[0,1]$,我们引入函数

$$\varphi(y)=f[a+y(b-a)]$$

来讨论.

这个函数是定义在 $[0,1]$ 上的连续函数,于是按照已证明的结果,就存在这样的多项式

$$Q(y)=\sum_{k=0}^{n} c_k y^k$$

使得对于一切 $y\in[0,1]$

$$\left| f[a+y(b-a)]-\sum_{k=0}^{n} c_k y^k \right| < \varepsilon \tag{18}$$

可是对于任意的 $x\in[a,b]$,分数 $\frac{x-a}{b-a}$ 都位于闭区间 $[0,1]$ 中,因之它可以代替(18) 中的 y,于是得

$$\left| f(x)-\sum_{k=0}^{n} c_k \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^k \right| < \varepsilon$$

这就表明多项式

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^k$$

逼近函数 $f(x)$ 至所需的精确度.

魏尔斯特拉斯定理还可以用别的方式来叙述:

---

① 然而,我们提出,在这种情形下,伯恩斯坦定理所给予我们的较魏尔斯特拉斯定理为多.因为它建立了完全确定的多项式 $B_n(x)$ 的形式,而后者在那时只确认了近似多项式的存在,并未给出其结构来.