全国重点中学
高考标准化模拟试题

（数学分册）

全国重点中学
高考标准化模拟试题

（数学分册）

东北朝鲜民族教育出版社

责任编辑：刘忠基

全国重点中学
高考标准化模拟试题（数学分册）
东北朝鲜民族教育出版社出版

梅河口市美术印刷厂印刷　　吉林省新华书店发行
787×1092 毫米 16 开　　16 印张　　379 千字
1992 年 1 月第 1 版　　1992 年 1 月第 1 次印刷
ISBN 7－5437－1160－5/G・1093
印数：01－23 000 册　　定价：6.60 元

出版前言

按照国家教委的有关规定，从1992年起，高等学校入学考试将进行一系列改革，由原来的文理两科分为四个科目组，并实行会考制度。为适应这一改革，让考生取得优异成绩，顺利被高等学校录取，我们邀请北京、上海、天津、江苏、广东、福建、江西、河北、吉林等省市的重点中学中具有多年高考把关经验的高考指导教师编写了这套《全国重点中学高考标准化模拟试题》，分为语文、数学、外语三个分册。这套书有如下特点：一是题型新颖。针对近年来高考试题的题型特点及今后命题方向，采用标准化命题方式，与高考试题题型靠近。二是荟萃精华。本套书的试题提供学校均系全国最有名望的重点中学，撰稿人对高考命题的范围、趋势、信息最灵通，对高考内容掌握最准确。试题是从众多训练题中精选出来的，可谓精华中之精华。三是科学系统。按知识内容编排。概括了教材中重点、难点及高考内容的知识点。每一套试题又独立成体系，题后附有详细的解答方法和答案。经过模拟训练，使考生既熟悉标准化试题的题型特点，掌握标准化试题的答题方法、要领，又能对应考知识进行系统、科学的总结，查缺补漏，找到薄弱环节。

数学分册由章新、祝成亮、晁振英主编，参加编写工作的还有：陈桦、郗昌盛、林守经、陈贵瑶、袁文彰、付振、李天民、邢贵芬、郝秀琴、张淑秀等。本书还收进了一些省市比较优秀的考前综合练习题，谨此致谢。

目　　录

标准化模拟试题（一）

一、选择题（本题满分 45 分，共 15 个小题，每个小题都给出代号为 A、B、C、D 四个结论，其中只有一个是正确的，把你认为正确的结论的代号写在题后的圆括号内，每一个小题选对得 3 分，不选或选错一律得 0 分.）

1. 已知集合 M 和集合 N，那么 $M\cap N=N$ 的充要条件是（　）

(A) $M\subseteq N$.　(B) $M\supset N$.　(C) $M=N$.　(D) $M\supseteq N$.

2. 已知直线 L 的方程是 $2x-y+3=0$，它关于直线 $y=-x$ 对称的直线 L' 的方程是（　）

(A) $2y-x+3=0$.　(B) $2y-x-3=0$.　(C) $2y+x-3=0$.　(D) $2x-y+3=0$.

3. 两个面平行且相似、其余各面都是梯形的几何体是这个几何体为棱台的（　）

(A) 充要条件.　(B) 充分但不必要条件.

(C) 必要但不充分条件.　(D) 既非充分也非必要条件.

4. $\{b_n\}$是等比数列，S_n 是它的前 n 项和，则有（　）

(A) $\{S_n\}$一定是等比数列.　(B) $\{S_n\}$一定是等差数列.

(C) $\{S_n\}$可能是等比数列.　(D) $\{S_n\}$可能是等差数列.

5. 已知 $f(\cos x)=x$，并且 $x\in[0,\pi]$，那么 $f(-\frac{1}{2})$的值是（　）

(A) $-\frac{1}{2}$.　(B) $-\frac{\pi}{3}$.　(C) $\frac{2}{3}\pi$.　(D) $\cos\left(-\frac{1}{2}\right)$.

6. 已知 $f(x)$是一次函数，并且 $f[f(x)]=9x+8$，那么 $f(x)$是（　）

(A) $3x+2$.　(B) $-3x-4$.　(C) $3x+2$ 或 $-3x-4$.　(D) 不能确定.

7. 下列命题正确的是（　）

(A) 若一直线上有两点到一平面距离相等，则这条直线平行于这个平面.

(B) 一直线与一平面内无数条直线都垂直，那么这条直线垂直于这个平面.

(C) 两条平行线在同一平面内的射影，仍然是两条平行线.

(D) 三条侧棱长相等，侧面与底面所成的角也都相等的三棱锥必定是正三棱锥.

8. $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$的极限值为（　）

(A) 不存在.　(B) $\frac{1}{2}$.　(C) 0.　(D) 1.

9. 若$(1-2x)^5$ 展开式中的第 2 项小于第 1 项，且不小于第 3 项，则实数 x 的取值范围是（　）

(A) $x<-\frac{1}{10}$.　(B) $-\frac{1}{10}<x\leqslant 0$.　(C) $-\frac{1}{4}\leqslant x<-\frac{1}{10}$.　(D) $-\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant 0$.

10. 把半圆弧六等分，以这些分点(包括直径的两端点)为顶点可作钝角三角形的个数为（　）

(A) 30.　(B) 25.　(C) 20.　(D) 15.

11. 设双曲线的左、右焦点分别是 F_1、F_2，左、右顶点是 M、N，若$\triangle PF_1F_2$ 的顶点 P 在

双曲线上，则$\triangle PF_1F_2$的内切圆与边F_1F_2的切点位置是（　）

(A) 在线段MN内部.　(B) 在线段F_1M内部或线段NF_2内部.

(C) 点M或点N.　(D) 不能确定.

12. 若极坐标方程$\rho=\dfrac{\sec^2\dfrac{\theta}{2}}{2\mathrm{tg}^2\dfrac{\theta}{2}+1}$是一圆锥曲线，则它的焦点到其相对应准线的距离是（　）

(A) $\dfrac{1}{3}$.　(B) $\dfrac{2}{3}$.　(C) 1.　(D) 2.

13. F_1为椭圆$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$的右焦点，$AB$为过原点的弦，则$\triangle ABF_1$面积的最大值为（　）

(A) 20.　(B) 15.　(C) 13.5.　(D) 12.

14. 若$\log_a\sin\alpha<\log_b\sin\alpha<0$，其中$\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，则$a$、$b$满足的条件是（　）

(A) $a>b>1$.　(B) $b>a>1$.　(C) $0<a<1<b$.　(D) $0<b<1<a$.

15. 已知直角$\triangle ABC$的两直角边分别为3cm和4cm，分别以它的三条边为轴将三角形旋转一周，得到三个旋转体，那么这三个旋转体的表面积中，最小的值是（　）

(A) $15\pi\mathrm{cm}^2$.　(B) $16.8\pi\mathrm{cm}^2$.　(C) $20\pi\mathrm{cm}^2$.　(D) $24\pi\mathrm{cm}^2$.

二、填空题(每小题4分，共20分，只要求直接填写结果)

16. 等差数列$\{a_n\}$中，$a_7=9$，$a_{13}=-2$，那么a_{25}的值是________.

17. 函数$y=\sqrt{\log_{\frac{\pi}{2}}(\arcsin x)}$的定义域为________；值域为________.

18. 函数$y=2\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)\left(\dfrac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{7}{3}\pi\right)$的反函数为________.

19. 以a、$2a$为边长的矩形$ABCD$的对角线BD为棱，把矩形折成120°的二面角，那么AC与BD所成角的大小为________.

20. a、b是不大于6的非负整数，在形如$a+bi$的数中，一共能组成________个不同的虚数.

三、解答题(本题满分55分，共6个小题)

21. (本小题共7分)

已知$\cos\theta=\dfrac{3}{5}$，$\cos(\theta+\varphi)=-\dfrac{12}{13}$，若$\theta$，$\varphi$都是锐角，求$\sin\varphi$的值.

22. (本小题共8分)

点P的直角坐标$(x、y)$满足：

$$\begin{cases}\log_a x\cdot\log_a y-2\log_a xy+4=0, & ①\\ xy=a^2+a^3. & ②\end{cases}$$

(其中$a>0$，且$a\neq1$)，试求P点的轨迹并画图.

23. (本小题共10分)

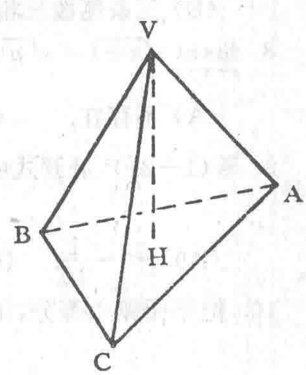

图1-1

如图1-1. 三棱锥$V-ABC$的高VH过底面$\triangle ABC$的垂心H，侧面VBC与底面成60°角，且$VB=VC$，若$BC=2$，

求此三棱锥的体积.

24.（本小题共10分）

如图1-2. 已知 z_1、z_2 在复平面上对应的点分别为 P、Q，且 $|z_2|=4$，$4z_1^2-2z_1z_2+z_2^2=0$.

(1) 求 P、Q 与原点 O 所成 $\triangle OPQ$ 的面积.

(2) 求 $|(z_1+1)^2(z_1-2)|$ 的最小值和最大值.

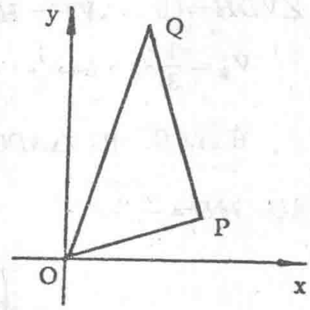

图 1-2

25.（本小题共10分）

$\{a_n\}$ 是等差数列，$\{b_n\}$ 是等比数列，数列 $\{c_n\}$ 中，$c_n=a_n-b_n$，已知 $c_1=0$，$c_2=\frac{1}{6}$，$c_3=\frac{2}{9}$，$c_4=\frac{7}{54}$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和；并求 $\{|c_n|\}(n\geqslant 2)$ 中最小的项.

26.（本小题共10分）

抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$ 的焦点为 F，问：是否存在内接等腰直角三角形，该三角形的一条直角边过 F？若存在，存在几个？若不存在，说明理由.

[参考答案]

一、选择题

D B C D C　　C D A B A　　C D D B B.

二、填空题

16. -24.　17. $[\sin 1, 1]$，$[0,1]$.　18. $y=\frac{4}{3}\pi-2\arcsin\frac{x}{2}$，$x\in[-2, 2]$.

19. $\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{3}$.　20. 42.

三、解答题

21. 解：$\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}$，$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，$\therefore \theta+\varphi\in(0,\pi)$，则有

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2}=\frac{4}{5}$.

$\sin\theta(\theta+\varphi)=\sqrt{1-\cos^2(\theta+\varphi)}=\sqrt{1-(-\frac{12}{13})^2}=\frac{5}{13}$.

于是，
$$\begin{aligned}\sin\varphi&=\sin[(\theta+\varphi)-\theta]\\&=\sin(\theta+\varphi)\cos\theta-\cos(\theta+\varphi)\sin\theta\\&=\frac{5}{13}\cdot\frac{3}{5}-(-\frac{12}{13})\cdot\frac{4}{5}=\frac{63}{65}.\end{aligned}$$

22. 解：由①得 $(\log_a x-2)(\log_a y-2)=0$，

$\therefore \log_a x=2$，$\log_a y=2$，$\therefore x=a^2$，$y=a^2$.

从 $x=a^2$ 及②得 $y=1+a$.　③

③代入 $x=a^2$，得 $x=(y-1)^2(y>1$ 且 $y\neq 2)$；

类似地，由 $y=a^2$ 得 $y=(x-1)^2(x>1$ 且 $x\neq 2)$，所求 P 点的轨迹是如图1-3所示的两条抛物线弧.

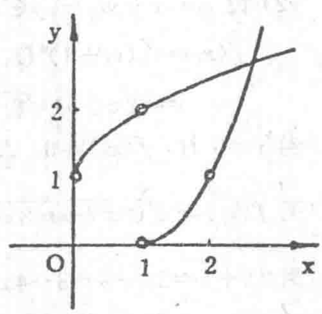

图 1-3

23. 解：作 $VH\perp$ 底面 ABC 于 H，则垂足 H 是$\triangle ABC$ 的垂心，连 AH 延长交 BC 于 D，$AD\perp BC$. 连 VD，由三垂线定理得 $VD\perp BC$. $\because VB=VC$，$\therefore D$ 是 BC 中点，得 $AB=AC$，$\angle VDH=60°$，$\therefore VH=HD\cdot \mathrm{tg}60°=\sqrt{3}HD$.

$V_{锥}=\frac{1}{3}S_{底}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}BC\cdot AD\cdot VH=\frac{1}{6}\cdot 2\cdot AD\cdot\sqrt{3}HD=\frac{\sqrt{3}}{3}AD\cdot HD.$

在$\triangle ABC$ 中，$\triangle ADC\backsim\triangle CDH$，$\therefore\frac{AD}{DC}=\frac{DC}{DH}$，$\therefore AD\cdot HD=DC^2=1$，$\therefore V_{锥}=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot AD\cdot HD=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

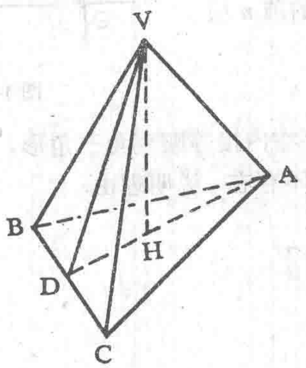

图 1-4

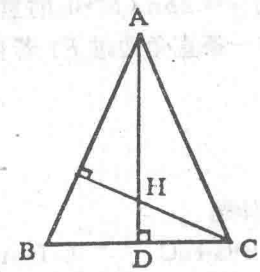

图 1-5

24. 解：(1) 由 $4z_1^2-2z_1z_2+z_2^2=0$，得 $4\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2-2\left(\frac{z_1}{z_2}\right)+1=0$ ($\because z_2\neq 0$)，

解得 $\frac{z_1}{z_2}=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{4}$，$\therefore z_1=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{4}z_2$，

$\therefore |z_1|=|\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i||z_2|=\frac{1}{2}|z_2|=2.$

设 $w_1=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i=\frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$，

$$w_2=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i=\frac{1}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right],$$

$\therefore\angle \mathrm{POQ}=\frac{\pi}{3}$，$\therefore S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}|z_1||z_2|\sin\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$.

(2) 设 $z_1=x+yi$，$x,y\in R$，则 $x^2+y^2=4$.

$$f(z_1)=|(z_1+1)^2(z_1-2)|=[(x+1)^2+y^2]\sqrt{(x-2)^2+y^2}$$
$$=(2x+5)\sqrt{8-4x}\quad(-2\leqslant x\leqslant 2).$$

当 $x=2$ 时，$f(z_1)=0$，$\therefore f(z_1)$最小值为 0.

又 $f(z_1)=\sqrt{(2x+5)(2x+5)(8-4x)}\leqslant\left[\frac{(2x+5)+(2x+5)+(8-4x)}{3}\right]^{\frac{3}{2}}=6\sqrt{6}$.

当 $2x+5=2x+5=8-4x$，即 $x=\frac{1}{2}$时，$f(z_1)$的最大值为 $6\sqrt{6}$.

25. 解：设数列$\{a_n\}$的首项为 a，公差为 d，数列$\{b_n\}$的首项为 b，公比为 q，由 $c_1=a-b=0$ 知，$a=b$，从而有

$$\begin{cases}a+d-aq=\dfrac{1}{6},\\ a+2d-aq^2=\dfrac{2}{9},\text{由此得出 } a=1,\ d=\dfrac{1}{2},\ q=\dfrac{4}{3}.\\ a+3d-aq^3=\dfrac{7}{54}.\end{cases}$$

$\therefore a_n=1+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}$； $b_n=\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$.

则 $S_n=[n+\frac{1}{2}n(n-1)\cdot\frac{1}{2}]-\frac{1}{1-\frac{4}{3}}\cdot[1-(\frac{4}{3})^n]=\frac{1}{4}n(n+3)-\frac{4^n}{3^{n-1}}+3.$

由 $c_n=a_n-b_n=\left(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$ 知，当 $2\leqslant n\leqslant 4$ 时，$c_n>0$；当 $n\geqslant 5$ 时，$c_n<0$，并且随 n 的增大，c_n 递减，可见数列 $\{|c_n|\}$ 中最小项应在 $|c_2|$，$|c_3|$，$|c_4|$，$|c_5|$ 中选择. $\because |c_2|=\frac{1}{6}$，$|c_3|=\frac{2}{9}$，$|c_4|=\frac{7}{54}$，$|c_5|=\frac{13}{81}$，可见，$|c_4|$ 最小，这表明 $\{|c_n|\}$ 中最小项是它的第 3 项(因为 $n\geqslant 2$)，该项的值是 $\frac{7}{54}$.

26. 解：设 AC 倾斜角为 θ，$\theta\in\left(\theta,\frac{\pi}{2}\right)$，设 $l=|AC|=|BC|$，由过焦点弦长公式 $l=\frac{2p}{\sin^2\theta}$.

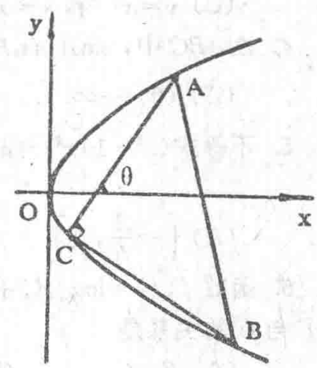

图 1-6

由抛物线方程得 $y_1{}^2-y_2{}^2=2p(x_1-x_2)$，

$\therefore y_1+y_2=2p\cdot\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}=2p\cdot\mathrm{ctg}\theta$，从而有

$$\begin{cases}y_1-y_2=l\sin\theta=2p/\sin\theta,\\ y_1+y_2=2p\,\mathrm{ctg}\theta.\end{cases}\quad ①$$

$$\begin{cases}y_2-y_3=l\cos\theta=\dfrac{2p\cos\theta}{\sin^2\theta},\\ y_2+y_3=-2p\,\mathrm{tg}\theta.\end{cases}\quad ②$$

由①得 $y_2=p\,\frac{\cos\theta-1}{\sin\theta}$；

由②得 $y_2=p\cdot\frac{\cos^2\theta-\sin^3\theta}{\sin^2\theta\cos\theta}$.

由 $y_2=y_2$，得 $\cos\theta-1=\frac{\cos^2\theta-\sin^3\theta}{\sin\theta\cos\theta}$.

$\therefore \sin\theta-\sin\theta\cos\theta=\cos^2\theta$.

即 $\quad \mathrm{tg}\theta=\sin\theta+\cos\theta. \qquad ③$

问题归结为三角方程③在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内是否有解，令 $y'=\mathrm{tg}\theta$，$y''=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$. 由三角函数的图象可知 y' 与 y'' 在 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{3}{8}\pi\right)$ 间有一个交点，故三角方程③在 $\left(\theta,\frac{\pi}{2}\right)$ 有一个解，由图形的对称性可知当 $\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时也有一个解，故本题有两个解，即存在两个等腰直角三角形满足题的条件.

标准化模拟试题(二)

一、选择题 **(本题满分 36 分，共 12 个小题，每个小题都给出代号为 A、B、C、D 的四个结论，其中只有一个是正确的，把你认为正确的结论的代号写在题后的圆括号内，每一个小题选对得 3 分，不选或选错一律得 0 分.)**

1. 已知 $P=\{x|x=n,\ n\in Z\}$，$Q=\{x|x=\frac{n}{3},\ n\in Z\}$，$S=\{x|x=n-\frac{1}{3},\ n\in Z\}$，则下列各式正确的是 ( )

(A) $S\cup Q=P$. (B) $Q\subset P$. (C) $P\cup S=Q$. (D) $P\subset Q$.

2. 设复数 z_1，z_2，且 $|z_1|=|z_2|=2$，$|z_1+z_2|=2\sqrt{3}$，则 $|z_1-z_2|$ 为 ( )

(A) 1. (B) $\sqrt{3}$. (C) 2. (D) 3.

3. 既是 $(0,+\infty)$ 上的增函数，又关于 $y=x$ 对称的函数是 ( )

(A) $y=\log_a x$ 和 $y=a^x(x>0)$. (B) $y=x^2$ 和 $y=\sqrt{x}$ $(x>0)$.

(C) $y=x^{-\frac{2}{3}}$ 和 $y=x^{-\frac{3}{2}}$ $(x>0)$. (D) $y=\sin x$ 和 $y=\sqrt{x}$ $(x>0)$.

4. $\triangle ABC$ 中，$\sin A:\sin B:\sin C=m:(m+1):2m$，那么 m 的取值范围是 ( )

(A) $(0,+\infty.)$. (B) $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$. (C) $(1,+\infty)$. (D) $(2,+\infty)$.

5. 不等式 $(a^2-1)x^2-(a-1)x-1<0$ 对任意实数 x 都成立，则实数 a 的取值范围是 ( )

(A) $\left(-\frac{3}{5},1\right]$. (B) $(-1,1)$. (C) $(-1,1]$. (D) $\left(-\frac{3}{5},1\right)$.

6. 函数 $f(x)=\log_{0.1}(3+2x-x^2)$ 定义域为 F，函数 $g(x)=\arcsin|x-2|$ 的值域为 G，那么 F 与 G 的关系是 ( )

(A) $F=G$. (B) $G\subset F$. (C) $F\subset G$. (D) $F\cap G=\phi$.

7. 若函数 $y=3+a^{x-1}(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 的反函数的图象必过定点 P，则 P 的坐标是 ( )

(A) $(3,1)$. (B) $(3+a,2)$. (C) $(4,2)$. (D) $(4,1)$.

8. 要使圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 与 x 轴的两个交点分别位于原点的两侧，那么必须有条件 ( )

(A) $D^2+E^2-4F>0$，$F>0$. (B) $D<0$，$F>0$. (C) $D\neq 0$，$F>0$. (D) $F<0$.

9. 把直角坐标平面的 x 轴作为棱，折成 $120°$ 的二面角，原来平面上两点 $A(4,3)$，$B(0,-5)$ 间的距离变为 ( )

(A) $5\sqrt{2}$. (B) $4\sqrt{5}$. (C) $\sqrt{65}$. (D) $\sqrt{50-3\sqrt{41}}$.

10. 平行四边形两邻边的长为 3 和 5，分别以两邻边为轴旋转一周所形成几何体体积之比为 ( )

(A) 5:3. (B) 25:9 (C) 125:27 (D) 随平行四边形锐角而变.

11. 下面有四个命题，其中正确命题的个数是 ( )

(1) 直线 $L\perp$ 平面 M 内无数条直线，是 $L\perp M$ 的充分条件.

(2) 垂直于同一直线的两条直线必互相平行.

(3) 平行于同一平面的两条直线必平行.

(4) 如果平面 $\alpha \perp$ 平面 β，且 $\alpha \cap \beta = b$，又 $l \perp b$，则 $l \perp \alpha$.

(A) 0 个.　　(B) 1 个.　　(C) 2 个.　　(D) 3 个.

12. 抛物线 $y=ax^2(a>0)$ 与直线 $y=kx+b\ (k\neq 0)$ 有两个公共点，其横坐标为 x_1，x_2，而 x_3 是直线与 x 轴的交点的横坐标，则 x_1，x_2，x_3 的关系式为　　(　　)

(A) $x_3=x_1+x_2$.　　(B) $x_3=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$.

(C) $x_1x_2=x_2x_3+x_1x_3$.　　(D) $x_1x_3=x_2x_3+x_1x_2$.

二、填空题(本题满分 24 分，共 6 个小题，只要求直接写出结果)

13. 已知圆柱的轴截面是边长为 2 和 4 的矩形，则圆柱的体积是________.

14. 双曲线顶点 $A(2, -1)$，$A'(2, 5)$，它的一条渐近线与直线 $3x-4y=0$ 平行，则双曲线的准线方程为________.

15. $(x^3-2x)^7$ 展开式的中间项系数为________.

16. 函数 $y=\sqrt{\log_2 \dfrac{1}{\sin x}}$ 的单调递增区间为________.

17. 已知数列 $\{\log_{n+1}(n+2)\}$ $(n\in N)$，则数列前 62 项之积为________.

18. 若 $f(x)=1+\lg(x+2)$，则 $f^{-1}(3)=$________.

三、解答题(本题满分 60 分，共 6 个小题)

19. (本小题满分 8 分)

若 $\sin(\pi+\alpha)=-\dfrac{24}{25}$，$\alpha\in\left(\dfrac{5}{2}\pi, 3\pi\right)$，试求 $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)$、$\sin 2\alpha$、$\sin\dfrac{\alpha}{4}$ 的值.

20. (本小题满分 8 分)

解不等式 $\log_{\frac{1}{2}}|x|+\log_{\frac{1}{2}}|x-1|>-1$.

21. (本小题满分 10 分)

如图 2-1. 四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是直角梯形，$BA\perp AD$，$CD\perp AD$ 且 $AB=\dfrac{1}{2}CD=2$，侧面 $PAD\perp$ 底面 $ABCD$，侧面 PBC 是边长为 10 的正三角形，求侧面 PAD 与侧面 PBC 所成的角.

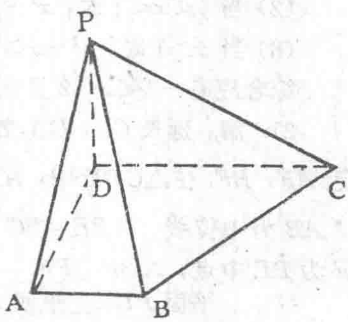

图 2-1

22. (本小题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$，并且满足条件：存在 $x_1\neq x_2$，使 $f(x_1)\neq f(x_2)$，又对于任何 x 和 y，$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ 成立. 证明：(1) $f(0)=1$；(2) $f(x)>0$ 对任何 x 都成立.

23. (本小题满分 12 分)

已知定点 $A(-1, 0)$，$B(0, 2)$，过 A 点斜率为 m 的直线 l_1 交曲线 $y=\sqrt{x}$ 于 P、Q 两点，(P、Q 不重合)，线段 PQ 的中点为 M，过点 M、B 的直线 l_2 交 x 轴于 N.

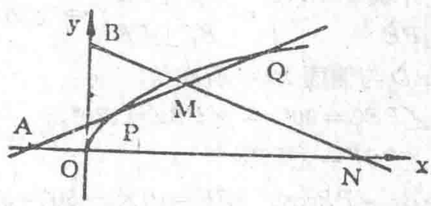

图 2-2

(1) 当 m 为何值时，N 点在 A 点右侧或左侧？

(2) 当 $BM /\!/ x$ 轴时，求线段 PQ 的长.

24.（本小题满分 12 分）

设 z_1，z_2，…，z_n 是a^n ($a>0$)的 n 个 n 次方根，$b_1=z_1+\frac{1}{z_1}$，$b_2=z_2+\frac{1}{z_2}$，…，$b_n=z_n+\frac{1}{z_n}$.

(1) 求 b_n 的复数表达式.

(2) 求 $S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$.

[参考答案]

一、选择题

D C B B A　B D D C A　A C

二、填空题

13.　4π 或 8π.　14. l_1：$y=\frac{1}{5}$，l_2：$y=\frac{19}{5}$.　15. -280 和 560.

16. $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\pi\right)$ ($k\in Z$).　17. 6.　18. 98.

三、解答题

19. $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{24-7\sqrt{3}}{50}$，$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{336}{625}$，$\sin\frac{\alpha}{4}=\frac{2}{5}\sqrt{5}$.

20. 解：原不等式变为：$\log_{\frac{1}{2}}|x^2-x|>\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$，其中 $x\neq0$，$x\neq1$.

(1) 当 $x<0$ 时，$x^2-x>0$，$\therefore x^2-x-2<0\Rightarrow-1<x<2$，$\therefore-1<x<0$.

(2) 当 $0<x<1$ 时，$x^2-x<0$，$-x^2+x-2<0$，由于 $\Delta<0$，$\therefore x\in R$，$\therefore 0<x<1$.

(3) 当 $x>1$ 时，$x^2-x>0$，$x^2-x-2<0\Rightarrow-1<x<2$，$\therefore 1<x<2$.

综合应有 $-1<x<2$ 且 $x\neq0$，$x\neq1$.

21. 解：延长 CB，DA 交于 E，取 PE 中点 F，连 AF，BF. 在$\triangle CDE$ 中，$AB\parallel CD$，$AB=\frac{1}{2}CD$，$\therefore AB$ 为中位线，$\therefore BE=BC=10$，$\therefore BE=PB$. $\because$ F 为 PE 中点，$\therefore BF\perp PE$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{平面 } PDA\perp\text{平面 } ABCD,\\ \text{平面 } PDA\cap\text{平面 } ABCD=AD,\\ AB\perp AD,\\ AB\subset\text{平面 } ABCD\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}AB\perp\text{平面 } PAD,\\ BF\perp PE\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}AF\perp PE\\ BF\perp PE\end{array}\right\}\Rightarrow\angle AFB\text{ 即为侧}$$

面 PAD 与侧面 PBC 所成角.

$$\left.\begin{array}{l}\angle PBC=60^\circ\Rightarrow\angle PBE=120^\circ,\\ \angle PBF=\angle FBE\end{array}\right\}\Rightarrow\angle PBF=$$

$60^\circ\Rightarrow BF=PB\cos\angle PBF=10\times\cos60^\circ=5$.

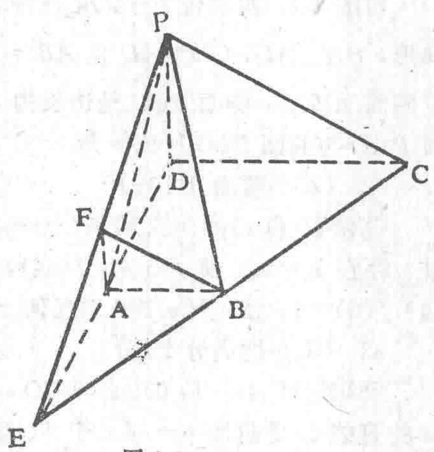

图 2-3

由 $AB\perp$平面 $PAD\Rightarrow AB\perp AF$，$\therefore\sin\angle AFB=\frac{AB}{BF}=\frac{2}{5}$，$\therefore\angle AFB=\arcsin\frac{2}{5}$.

本题还可以通过计算 $EC^2=PC^2+PE^2$ 得出$\angle EPC$ 为直角，由三垂线逆定理证出$\angle CPD$

即为所求二面角的平面角，也可用射影的面积比求角的余弦值.

22. 证明：(1) 令 $x_1=0$，$x_2=0$，由 $f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$，

则 $f(0+0)=f(0)\cdot f(0)$，即 $f(0)[f(0)-1]=0$.

$\therefore f(0)=1$ 或者 $f(0)=0$.

若 $f(0)=0$，令 $x_1=0$，$x_2=1$.

则 $f(0+1)=f(0)\cdot f(1)=0\times f(1)=0$，即 $f(1)=0$，

则有 $0\neq1$，$f(0)=f(1)=0$，这与 $x_1\neq x_2$，$f(x_1)\neq f(x_2)$相矛盾，

故 $f(0)\neq0$，$\therefore f(0)=1$

(2) 由 $f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=f\left(\frac{x}{2}\right)\cdot f\left(\frac{x}{2}\right)=f^2\left(\frac{x}{2}\right)\geqslant0$.

下面证明 $f\left(\frac{x}{2}\right)\neq0$.

1° 当 $x=0$ 时，由(1)的证明 $f(0)=1$，$f(0)\neq0$.

2° 当 $x\neq0$ 时，若存在 x_1 使 $f(x_1)=0$，则 $2x_1\neq x_1$.

有 $f(2x_1)=f(x_1+x_1)=f(x_1)\cdot f(x_1)=0\times0=0$，即 $f(2x_1)=0$，此与 $x_1\neq x_2$，$f(x_1)\neq f(x_2)$相矛盾，$\therefore f(x_1)\neq0$.

综合 1° 2° 可知，不论 x 为任何实数 $f(x)\neq0$，故 $f(x)>0$.

23. 解：l_1 与 $y=\sqrt{x}$ 相交，则 $m>0$.

由 l_1：$y=m(x+1)$. ①

C：$y^2=x$. ②

①②联立得 $y^2-\frac{1}{m}y+1=0$. ③

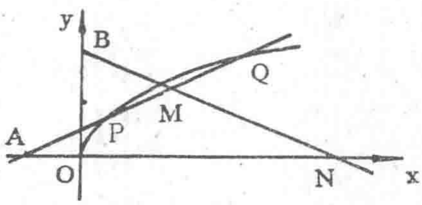

图 2-4

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，$M(x_0,y_0)$，

则 $y_1+y_2=\frac{1}{m}$，$y_1y_2=1$，$y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{1}{2m}$.

$\because \Delta=\frac{1}{m^2}-4>0$，$\therefore 0<m<\frac{1}{2}$.

当 $y_0>2$，N 在 A 点左侧$\Rightarrow\frac{1}{2m}>2$，即 $0<m<\frac{1}{4}$；

当 $y_0<2$，N 在 A 点右侧$\Rightarrow\frac{1}{2m}<2$，即$\frac{1}{4}<m<\frac{1}{2}$.

(2) 当 $BM/\!/x$ 轴，$y_0=2\Rightarrow m=\frac{1}{4}$，则

$$|PQ|=\sqrt{(1+\frac{1}{m^2})[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}=2\sqrt{51}.$$

24. 解：(1) $a^n=a^n(\cos0+\mathrm{i}\sin0)$. a^n 的 n 个 n 次方根为 $a\left[\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right]$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$.

$\therefore z_1=a$，$z_2=a\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)$，$z_3=a\left(\cos\frac{4\pi}{n}+i\sin\frac{4\pi}{n}\right)$，$\cdots$，

$z_n=a\left(\cos\frac{n-1}{n}2\pi+i\sin\frac{n-1}{n}2\pi\right)$.

设 $z_0=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$，则 $z_2=az_0$，$z_3=az_0^2$，$\cdots$，$z_n=az_0^{n-1}$，$\frac{1}{z_n}=\frac{1}{az_0^{\,n-1}}=\frac{1}{a}\bar{z}_0^{(n-1)}$，

$\therefore b_n = a z_0^{n-1} + \frac{1}{a}\bar{z}^{n-1}$.

(2) $b_1 = a + \frac{1}{a}$, $b_2 = a z_0 + \frac{1}{a}\bar{z}_0$, $b_3 = a z_0^2 + \frac{1}{a}\bar{z}_0^2$, $\cdots$, $b_n = a z_0^{n-1} + \frac{1}{a}\bar{z}_0^{n-1}$.

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n = a(1 + z_0 + z_0^2 + \cdots + z_0^{n-1}) + \frac{1}{a}(1 + \bar{z}_0 + \bar{z}_0^2 + \cdots + \bar{z}_0^{n-1})$$

$$= a\,\frac{1 - z_0^n}{1 - z_0} + \frac{1}{a}\,\frac{1 - \bar{z}_0^n}{1 - \bar{z}_0}\ (z_0^n = 1,\ \bar{z}_0^n = 1) = a \cdot 0 + \frac{1}{a} \cdot 0 = 0.$$

标准化模拟试题(三)

一、选择题(本题满分 45 分,共 15 个小题,每个小题都给出代号为 A、B、C、D 的四个结论,其中只有一个是正确的,把你认为正确的结论的代号写在题后的圆括号内,每一个小题选对得 3 分,不选或选错一律 0 分.)

1. 对于集合 M, N 和全集 I, 已知 $M\subset N$, 那么下列集合是空集的为 ( )

(A) $M\cap N$. (B) $\overline{M}\cup N$. (C) $\overline{M}\cup\overline{N}$. (D) $M\cap\overline{N}$.

2. $x<0$ 是 $x^2>x$ 的 ( )

(A) 充分但不必要条件. (B) 必要但不充分条件.

(C) 充要条件. (D) 既不充分也不必要条件.

3. 若 k 为非零常数,下面命题正确的是 ( )

(A) $y=kx$ 为增函数. (B) $y=\frac{k}{x}$ 为减函数.

(C) $y=(k^2-k+1)^x$ 是减函数. (D) $y=\log_{(k^2-k+2)}x$ 是增函数.

4. $y=\log_{\sin 1}\cos x$ 的值域是 ( )

(A) $[-1, 1]$. (B) $(-\infty, +\infty)$. (C) $(-\infty, 0]$. (D) $[0, +\infty)$.

5. 当 $f(x-1)=x^2-4x$ 时,方程 $f(x+1)=0$ 的解集为 ( )

(A) $\{-2, 2\}$. (B) $\{-1, 1\}$. (C) $\{0, 2\}$. (D) $\{0, -2\}$.

6. $\sin\left[\frac{1}{2}\mathrm{arctg}(-2\sqrt{2})\right]$ 的值等于 ( )

(A) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. (B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. (C) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. (D) $-\frac{1}{3}$.

7. 函数 $y=\sin 3x$ 的图象可由 $y=\sin(3x+\frac{\pi}{4})$ 的图象经过如下平移得到 ( )

(A) 向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位. (B) 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位.

(C) 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位. (D) 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位.

8. 在 1000 和 9999 之间由四个不同数字组成而且个位数字和千位数字的差的绝对值是 2 的自然数有 ( )

(A) 672 个. (B) 784 个. (C) 840 个. (D) 896 个.

9. 对于任何 $\varphi\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 下列各式正确的是 ( )

(A) $\sin(\sin\varphi)<\cos\varphi<\cos(\cos\varphi)$. (B) $\sin(\sin\varphi)>\cos\varphi>\cos(\cos\varphi)$.

(C) $\sin(\cos\varphi)>\cos\varphi>\cos(\sin\varphi)$. (D) $\sin(\cos\varphi)<\cos\varphi<\cos(\sin\varphi)$.

10. 空间四个点,其中三点共线是四点共面的 ( )

(A) 充分不必要条件. (B) 必要不充分条件.

(C) 充要条件. (D) 既不充分又不必要条件.

11. 设圆 C 的方程为 $x^2+y^2-2x-2y-2=0$, 直线 L 的方程为 $(k+1)x-ky-1=0$, 对任意的实数 k, 圆 C 与直线 L 的位置关系为 ( )