“十二五”职业教育国家规划教材
经全国职业教育教材审定委员会审定

高等数学

Advanced Mathematics

（理工类）

東北大學出版社
Northeastern University Press

"十二五"职业教育国家规划教材
经全国职业教育教材审定委员会审定

高等数学

Advanced Mathematics

（理工类）

主　编：陈　伟　马凤敏　杨中兵
副主编：于　强　吴海燕　宋从之

东北大学出版社
·沈　阳·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学：理工类 / 陈伟，马凤敏，杨中兵主编．—2 版．—沈阳：东北大学出版社，2015．7
“十二五”职业教育国家规划教材
ISBN 978-7-5517-1003-9

Ⅰ．高…　Ⅱ．①陈…　②马…　③杨…　Ⅲ．①高等数学—高等职业教育—教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 151039 号

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110004
电话：024—83687331（市场部）　83680267（社务室）
传真：024—83680180（市场部）　83680265（社务室）
E-mail：*neuph @ neupress. com*
http：*//www. neupress. com*
印 刷 者：沈阳市第二市政建设工程公司印刷厂
发 行 者：新华书店总店北京发行所
幅面尺寸：185mm × 260mm
印　　张：16.75
字　　数：429 千字
出版时间：2015 年 7 月第 2 版
印刷时间：2015 年 7 月第 1 次印刷
责任编辑：刘宗玉
封面设计：唯　美
责任校对：申　骄
责任出版：唐敏志

ISBN 978-7-5517-1003-9　　　定　　价：29.80 元

第二版前言

本书自2009年出版已经使用六年，受到了部分高职院校老师、学生的欢迎，今年又被教育部审定为“十二五”职业教育国家规划教材. 这既是对这本书的肯定，也给我们提出了更加严格的要求. 同时，随着教学改革的不断深入和高职高专院校形势的变化，对高等数学课教学提出了新的要求，加之在教学实践中也发现书中的一些不足和欠缺，所以对本书的修订工作也被提到议事日程. 因此，我们决定对本书进行一次全面的修订.

这次修订工作的宗旨是在保持第一版“联系实际、深化概念、侧重计算、注重应用”特色的前提下，使教材更加贴近当前的教学实际、方便教学. 首先是对内容的调整，既有增删，又有改写，还对部分章节内容做了重新组合，使之更进一步突出数学的基本思想和基本方法，确保理论体系系统、完整；其次是继续增加实践环节，补充一些实际应用的例题和习题；对一些较难习题给出必要的提示；再次，是在各章后增加数学实验章节，介绍Mathematica软件包的应用，让学生能利用计算机解决数学问题，增强实际应用能力的培养.

许多专家对本书提出了宝贵意见，部分高职院校的老师也把他们使用过程中发现的问题和一些建设性意见反馈给我们，在这里，我们向他们致以衷心的感谢!

参加本书编写的还有朱贵凤、王学理. 由于作者水平所限，本书的不妥、疏漏、缺憾之处在所难免，衷心希望广大师生在使用过程中提出宝贵的改进意见.

编 者

2015年3月

第一版前言

近年来随着高职高专教学改革的不断深入，对数学课程的基本要求有了很大变化，并提出了一些新的要求. 如何实现高职高专学生的专业培养目标，与“工学结合”培养模式相适应；怎样才能在数学课程学时不断减少的情况下，为学生们打好数学基础，这些都给数学教学工作者提出了新的课题. 正是在这样的背景下，我们结合教学改革的实际要求和多年积累的一些成功经验，精心编写出这套《21世纪高职高专数学规划教材》，本书为其中的理工类《高等数学》.

本书是根据教育部“高职高专教育高等数学课程教学基本要求”而编写的，遵循“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，并充分考虑了相当多的学校高等数学课程学时减少这一实际情况. 为此，确立编写本书的指导思想为：联系实际，深化概念，侧重计划，注重应用. 本书具备如下特色：

1. 重视基本概念

在引入基本概念的时候，我们注意从实际问题出发，尽量借助于几何直观图形和物理意义来解释数学概念和定理，力求使抽象的数学概念形象化，同时注意基本理论的完整性和系统性. 在教学理念上不过分强调严密论证、研究过程，而更多的是让学生体会高等数学的思想方法，提高学生的逻辑思维能力.

2. 结合实际，注重实用

例题、习题中注重工程上或经济方面实际问题的选取，意在培养学生解决实际问题的意识和能力，最终实现培养应用性人才的高职高专教育目标.

3. 侧重运算、解题能力

在解题方法方面有较深入的论述，其用意在于让学生在掌握基本概念的基础上，熟悉运算过程、掌握解题方法，最后达到加快运算速度、提高解题能力的目的.

全书共十一章，依次为第一章函数与极限、第二章导数与微分、第三章中值定理与导数的应用、第四章不定积分、第五章定积分及其应用、第六章常微分方程、第七章空间解析几何与向量代数、第八章多元函数微分学、第九章多元函数积分学、第十章无穷级数、第十一章数学文化. 各章节后均配有习题，书后附有全部习题的参考答案. 标有 * 的内容是教学大纲不要求的内容.

由于水平所限，加之时间仓促，书中存在疏漏、不足之处在所难免，敬请广大师生不吝赐教，将不胜感谢.

编　者

2009年6月

目　　录

第一章　函数、极限与连续

高等数学研究的对象以变量为主，研究的主要内容是变量之间的依赖关系. 极限的概念是高等数学最基本的概念，也是一个很重要的概念，它是建立其他概念的基础. 本章还要讨论另一个问题，就是函数的连续性问题.

第一节　函数与极坐标

一、区间和邻域

设实数 a 和 b，且 $a<b$，数集

$$\{x \mid a<x<b\}$$

称为开区间，记做(a, b)，即

$$(a, b)=\{x \mid a<x<b\}.$$

数集

$$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

称为闭区间，记做$[a, b]$，即

$$[a, b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}.$$

类似地，

$$[a, b)=\{x \mid a \leqslant x<b\},$$
$$(a, b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}$$

称为半开半闭区间.

以上区间都称为有限区间，区间长度为 $b-a$. 此外，还有所谓的无限区间. 引进记号 $+\infty$（读做正无穷大）和 $-\infty$（读做负无穷大），例如

$$[a,+\infty)=\{x \mid a \leqslant x\},$$
$$(-\infty, b)=\{x \mid x<b\}.$$

全体实数的集合 **R** 也可记做$(-\infty,+\infty)$，它也是无穷区间.

设 δ 是任意正数，则开区间$(a-\delta, a+\delta)$称为点 a 的 δ 邻域，记做

$$U(a, \delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\},$$

如图 1-1 所示.

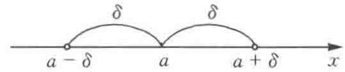

图 1-1

$$\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$$

称为点 a 的去心 δ 邻域，记做$\mathring{U}(a, \delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\ \delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

二、函数的概念

引例 设正方形的边长为 x，面积为 y，则 y 依赖于 x 的变化而变化，两者依赖关系可表示成

$$y=x^2$$

当 x 在区间 $(0,\ +\infty)$ 内任取一个数值时，都有一个确定的实数值与它对应，则称 y 是 x 的函数.

定义 设 D 是实数集 R 的非空子集，则从 D 到 R 的对应关系 f 称为定义在 D 上的函数，记做

$$y=f(x),\ x\in D.$$

其中，x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数 f 的定义域，记做 D_f. 集合 $R_f=\{y\mid y=f(x),\ x\in D\}$ 称为函数 f 的值域.

在平面直角坐标系下，点集

$$\{(x,\ y)\mid y=f(x),\ x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ $x\in D$ 的图像(如图 1-2 所示).

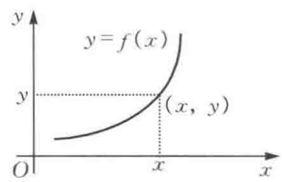

图 1-2

下面举几个函数的例子.

确定函数定义域的方法是：若给定函数表达式，则使该表达式有意义的自变量全体为其定义域. 若是实际问题，则使实际问题的自变量的全体为其定义域.

例 1 求函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域和值域，并画出其图像.

【解】 定义域

$$1-x^2\geqslant 0,\ 即\ D=[-1,\ 1].$$

值域 $R_f=\{y\mid 0\leqslant y\leqslant 1\}$. 图像为上半圆(如图 1-3 所示).

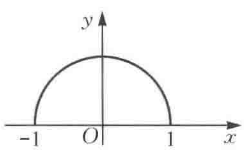

图 1-3

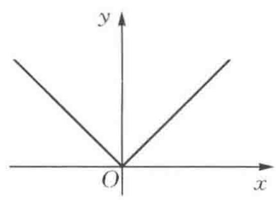

图 1-4

例 2 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,\ +\infty)$，值域 $R_f=[0,\ +\infty)$，图像如图 1-4 所示.

例 3 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

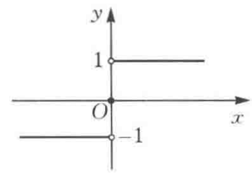

图 1-5

的图像如图 1-5 所示.

例 4　取整函数

$$y=[x]$$

表示不超过 x 的最大整数. 如 $[1.25]=1$, $[-1.5]=-4$, $[-1]=-1$, 图像如图 1-6 所示.

从例 2 到例 4 看到，有时一个函数要用几个式子来表示. 这种在自变量的不同变化范围中，对应关系用几个不同式子表示的函数，称为分段函数.

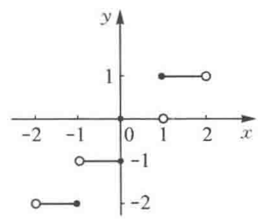

图 1-6

例 5　确定函数的表达式

设 $f(x-1)=\dfrac{x+3}{(x+1)^2}$, 求 $f(x)$.

【解】　令 $x-1=t$, 则 $x=t+1$, 即

$$f(t)=\frac{(t+1)+3}{(t+1+1)^2}=\frac{t+4}{(t+2)^2},$$

所以

$$f(x)=\frac{x+4}{(x+2)^2}.$$

例 6　设 $f(x)=\begin{cases}1+x, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f[f(x)]$.

【解】

$$\begin{aligned}f[f(x)]&=\begin{cases}1+f(x), & f(x)<0\\ 1, & f(x)\geqslant 0\end{cases}\\ &=\begin{cases}1+f(x), & x<-1\\ 1, & x\geqslant -1\end{cases}\\ &=\begin{cases}2+x, & x<-1\\ 1, & x\geqslant -1.\end{cases}\end{aligned}$$

三、初等函数

1. 基本初等函数

初等数学对下面 6 类函数的定义域、值域及函数的性态进行了讨论:

常数函数　$y=C$ （C 为常数）;

幂函数　$y=x^{\alpha}$ （$\alpha\in\mathbf{R}$）;

指数函数　$y=a^x$ （$a>0$, 且 $a\neq 1$）;

对数函数　$y=\log_a x$ （$a>0$, 且 $a\neq 1$）;

三角函数　$y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$ 等;

反三角函数　$y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\arctan x$ 等.

这 6 类函数统称为基本初等函数.

2. 反函数

在函数定义中，若 f 是从 D 到 R_f 的一一映射，则它的逆映射 f^{-1} 称为函数的反函数，记做 $x=f^{-1}(y)$. 显然，f^{-1} 的定义域为 R_f，值域为 D.

例如，函数 $y=x^3$，$x\in R_f$ 是一一映射，所以它的反函数存在，其反函数为 $x=y^{\frac{1}{3}}$，$y\in\mathbf{R}$. 函数与其反函数表示的是一条曲线，但是，习惯上写为 $y=x^{\frac{1}{3}}$，$x\in\mathbf{R}$.

一般地，函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 的反函数记做 $y=f^{-1}(x)$，$x\in R_f$. 把函数 $y=f(x)$ 和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像画在同一坐标平面上，这两个图像关于直线 $y=x$ 对称（如图 1-7 所示）.

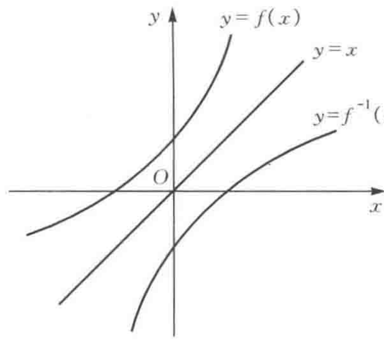

图 1-7

3. 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u=g(x)$ 在 D 上有定义，且 $g(D)\subset D_1$，则由

$$y=f[g(x)],\ x\in D$$

确定的函数称为由函数 $y=f(u)$ 和函数 $u=g(x)$ 构成的复合函数，它的定义域为 D，变量 u 称为中间变量.

不是任何两个函数都能构成复合函数，如 $y=\arcsin u$，$u=x^2+2$ 就不能构成复合函数. 两个及多个函数能够构成复合函数的过程叫**函数的复合运算**.

如函数 $y=\arcsin(x^2-1)$ 可以看成由函数 $y=\arcsin u$ 和 $u=x^2-1$ 复合而成的函数.

4. 四则运算

设函数 $f(x)$，$g(x)$ 的定义域分别为 D_1，D_2，记 $D=D_1\cap D_2$，且 $D\neq\varnothing$ （$\varnothing$ 是空集），在 D 上，通过加、减、乘、除四则运算可以定义新的函数

$$f(x)\pm g(x),\quad f(x)\cdot g(x),\quad \frac{f(x)}{g(x)}\ (g(x)\neq 0).$$

5. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合运算得到的且可用一个式子表示的函数称为初等函数. 例如

$$y=ax^2+bx+c,\quad y=\sin\frac{1}{x},\quad y=\mathrm{e}^{-x^2}$$

等都是初等函数.

不能认为分段函数就不是初等函数，如

$$y=\begin{cases} x, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

它就是 $y=|x|$，它也可以写成 $y=\sqrt{x^2}$，当然是初等函数.

四、函数的性质

1. 有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 若存在正数 M，使得对任意 $x\in D$，都有

$$|f(x)| \leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界. 如果这样的数 M 不存在，就称函数 $f(x)$ 在 D 上无界.

例如，$y=\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界；$y=e^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上无界.

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若对于 D 上的任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 D 上是单调增加的；若

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 D 上是单调减少的.

3. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 若对于任意 $x \in D$，都有

$$f(-x)=f(x),$$

则称函数 $f(x)$ 为偶函数；若对于任意 $x \in D$，都有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称函数 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于原点对称.

4. 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 若存在一个正数 T，使得对于任意 $x \in D$，有 $(x \pm T) \in D$，且

$$f(T+x)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的周期. 通常所说周期函数的周期是指最小正周期，即使上式成立的最小正数.

例如，函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数，函数 $y=\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

*五、参数方程

在取定的坐标系中，如果曲线上任意一点 $M(x, y)$ 中的 x，y 都是某个变量 t 的函数，即

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t). \end{cases} \tag{1-1}$$

并且对于 t 的每一个允许值，由方程组(1-1)所确定的点 $M(x, y)$ 都在这条曲线上，那么方程组(1-1)就叫做这条曲线的参数方程，联系 x，y 之间关系的变量 t 叫做参变量，简称参数. 参数方程中的参数既可以是有物理、几何意义的变量，也可以是没有明显意义的变量.

直线的参数方程：$\begin{cases} x=x_0+\alpha t, \\ y=y_0+\beta t; \end{cases}$ （t 为参数）

圆的参数方程：$\begin{cases} x=R\cos t, \\ y=R\sin t; \end{cases}$ （t 为参数）

椭圆的参数方程 $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t. \end{cases}$ （t 为参数）

下面再介绍两个参数方程.

星形线：星形线是内摆线的一种(如图1-8所示). 当半径为$\frac{a}{4}$的小圆在半径为a的大圆内沿圆周滚动时，小圆上定点轨迹的参数方程为

$$\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t.\end{cases}\quad (t\text{为参数})$$

化为直角坐标方程为

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}.$$

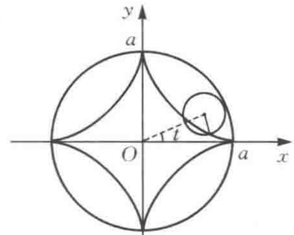

图1-8

摆线：半径为a的圆在直线上滚动，圆上定点的轨迹如图1-9所示. 摆线的参数方程为

$$\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t).\end{cases}\quad (t\text{为参数})$$

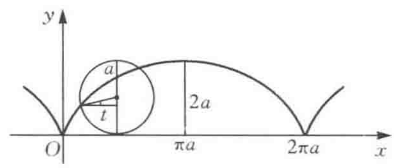

图1-9

*六、极坐标

在平面上定义由一定点和一条定轴所确定的坐标系称为极坐标系，其中定点称为极点，定轴称为极轴. 如图1-10所示. 极坐标系中的点P用有序数(r,θ)表示. 其中r表示点P到极点O的距离，θ表示射线OP与极轴正向的夹角. 这里

$$r\geqslant 0,$$
$$0\leqslant\theta<2\pi.$$

其中，r称为极径，θ称为极角.

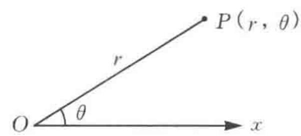

图1-10

若取极点作为原点，极轴作为x轴建立直角坐标系，这样得到极坐标与直角坐标的关系为

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta \tag{1-2}$$

或

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\ \tan\theta=\frac{y}{x}. \tag{1-3}$$

建立r与θ关系的等式称为极坐标方程，如

$$r=1$$

表示圆心在极点，半径为1的圆.

利用式(1-2)和式(1-3)，可以把直角坐标方程和极坐标方程进行互化.

例7 将极坐标方程

$$r=2a\cos\theta\quad(a>0)$$

化为直角坐标方程.

【解】 $r^2=2ar\cos\theta$，$r^2=x^2+y^2$，$x=r\cos\theta$，

故方程化为

$$x^2+y^2=2ax,$$

也可改写成

$$(x-a)^2+y^2=a^2.$$

这是以$(a,0)$为心，以a为半径的圆.