考研数学命题人士豪金系列丛书

2016

双色印刷+全真模拟+精彩解析

考研数学命题人全真终极冲刺8套卷

（数学一）

全国硕士研究生入学考试辅导用书编委会　编著
北京大学　尤承业　教授　清华大学　徐　荣　教授
北京大学　刘德荫　教授　首都师范大学　童　武　教授

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

考研数学命题人十豪金系列丛书

2016

双色印刷+全真模拟+精彩解析

考研数学命题人全真终极冲刺8套卷

（数学一）

全国硕士研究生入学考试辅导用书编委会 编著

北京大学 尤承业 教授 清华大学 徐荣 教授

北京大学 刘德荫 教授 首都师范大学 童武 教授

赠 1 本书每章习题答案与详解 + 2 篇北大、清华数学满分秘笈 + 2 套原命题组成员密押试卷 + 5 大考研命题人快速解题方法 + 8 小时命题人数学串讲精华

登录 www.buaapress.com.cn 获超多增值服务

北京航空航天大学出版社

BEIHANG UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书是作者在10多年收集、整理考研数学资料和进行考研数学辅导的基础上，通过对历年试题的精心研究和分析，并结合授课体会和学生的需要全新编写而成的。

本书由来自北京大学、清华大学和中国人民大学的原命题组组长、命题研究专家，以及一线教师组织编写。通过本书，考生不仅可以了解考研以来数学考试的全貌，而且可以方便地了解有关试题和信息，从中发现规律，进一步把握考试特点及命题思路，从容应考，轻取高分。

本书适用于参加研究生入学数学考试的广大考生。

图书在版编目(CIP)数据

2016考研数学命题人全真终极冲刺8套卷. 数学一 / 全国硕士研究生入学考试辅导用书编委会编著. -- 北京 : 北京航空航天大学出版社, 2015.6

ISBN 978-7-5124-1816-5

Ⅰ.①2… Ⅱ.①全… Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—习题集 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第149225号

2016考研数学命题人全真终极冲刺8套卷(数学一)

全国硕士研究生入学考试辅导用书编委会 编著

责任编辑 张冀青

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路37号(邮编100191) http://www.buaapress.com.cn

发行部电话:(010)82317024 传真:(010)82328026

读者信箱: bhpress@263.net 邮购电话:(010)82316936

北京宏伟双华印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本:787×1 092 1/16 印张:7.5 字数:192千字

2015年7月第1版 2015年7月第1次印刷

ISBN 978-7-5124-1816-5 定价:16.80元

编 委 会

前　　言

在考研数学复习的冲刺阶段，实战练习几套全真模拟试卷对于考生巩固复习效果、查漏补缺、克服薄弱环节、适应考试模式有着极为重要的作用。《2016 考研数学命题人全真终极冲刺 8 套卷（数学一）》是考研数学专家团队根据最新发布的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》精心打造而成的，试卷涵盖大纲所有知识点，命题思路贴近真题，有助于考生进行有效的自我检测，达到应考的最佳状态。

本书的特点：

一、专家团队倾力编写。《2016 考研数学命题人全真终极冲刺 8 套卷（数学一）》作者团队由数位命题组、阅卷组原成员组成，他们有着丰富的命题及阅卷经验，能够直击考研数学命题点，把握考研数学的命题方向。

二、内容全面，紧扣大纲。本书依据最新《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》编写，覆盖考纲规定的重要知识点，题型、题量、难易程度贴近考研真题，有助于考生适应考试模式，达到最佳应试状态。

三、价格低廉，性价比高。在保证试卷质量的前提下，严格控制定价，使本书成为市面上性价比极高的考研数学模拟卷，保证考生能以极低的价格买到最有帮助的考研书。

由于编写时间仓促，书中难免有错误和疏漏之处，欢迎广大读者和同行批评指正！

预祝广大考研学子在 2016 年全国硕士研究生入学考试中取得优异成绩！

本书编委会

2015 年 4 月

目　录

第一篇　全真终极冲刺 8 套卷

第二篇　参考答案及解析

第一篇

全真终极冲刺8套卷

全真模拟卷(一)

(本试卷满分 150 分,考试时间 180 分钟)

一、选择题:1 ~8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每题给出的四个选项中只有一个选项符合题目要求.

(1) 下列命题中正确的是 ( )

(A) 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,则 $a_n \geqslant \frac{1}{n}(n \geqslant N)$

(B) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

(C) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 至少有一个发散,则 $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ 发散

(D) 设 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n b_n|$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 都收敛

(2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{bx - \sin x}\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}\mathrm{d}t = 1$. 则常数 a,b 的值为 ( )

(A) $a = 4, b = 1$　　(B) $a = -4, b = 1$

(C) $a = 4, b = -1$　　(D) $a = -4, b = -1$

(3) $f(x) = (x^2 + x - 6)|x^3 - 4x|$ 的不可导点个数为 ( )

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

(4) 设 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的邻域内存在偏导数 $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$,且偏导数在点 (x_0,y_0) 不连续,则下列结论正确的是 ( )

(A) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微,且 $\mathrm{d}f\big|_{(x_0,y_0)} = f'_x(x_0,y_0)\mathrm{d}x + f'_y(x_0,y_0)\mathrm{d}y$

(B) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 不可微

(C) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 沿任何方向的方向导数存在

(D) 曲线 $\begin{cases} z = f(x,y) \\ x = x_0 \end{cases}$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处切线的方向向量为 $\boldsymbol{\tau} = [0,1,f'_y(x_0,y_0)]$. 其中 $z_0 = f(x_0,y_0)$

(5) 设 n 维列向量组: $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m (m < n)$ 线性无关,则 n 维列向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关的充分必要条件是 ( )

(A) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性表示

(B) 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示

(C) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 等价

(D) 矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$ 与矩阵 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)$ 等价

(6) $|A_{n\times n}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}$，$A_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式，则

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} =$ （　　）

(A) $-n$　　(B) n　　(C) $-n^2$　　(D) n^2

(7) 二维随机变量 (X,Y) 服从区域 D 上的均均分布，D 由 $y = 1 - x^2$ 和 x 轴围成，则 （　　）

(A) (X,Y) 关于 X，关于 Y 的边缘分布相同

(B) $P(Y > 1) = \frac{1}{2}$

(C) X,Y 相互独立

(D) X,Y 不独立

(8) 随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 在 $x = 1$ 处连续，且 $F(1) = 1$. 而随机变量 Y 为

$$Y = \begin{cases} a, & X > 1, \\ b, & X = 1, \\ c, & X < 1, \end{cases} \quad (abc \neq 0, \text{且互不相等})$$

则 $\mathrm{E}(Y) =$ （　　）

(A) c　　(B) b　　(C) a　　(D) $a + b + c$

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

(9) 设 $f(u)$ 有连续的二阶导数，且 $z = f(\mathrm{e}^x \sin y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \mathrm{e}^{2x} z$，则 $f(u) =$ ________.

(10) 曲线积分中曲线 c 是圆 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ y = z, \end{cases}$ 自点 $(1,0,0)$ 至点 $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 的一段弧，则 $I = \int_c \frac{1}{2} x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z =$ ________.

(11) 流速场 $\boldsymbol{v} = xyz$ 在单位时间内沿球面的 $\frac{1}{4}$，即 $\boldsymbol{\Sigma}: x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0$ 的外侧穿过的流量 $\boldsymbol{\Phi} =$ ________.

(12) 设 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^x t f(2x - t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\arctan x^2$，已知 $f(1) = 1$，则 $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x =$ ________.

(13) 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是 3 阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 第一行的 -2 倍加到第 3 行上得到矩阵 $\boldsymbol{A}_1$，将矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 列乘以 -2 得到矩阵 $\boldsymbol{B}_1$. 已知 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -2 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$，则矩阵 $\boldsymbol{AB} =$ ________.

(14) 设 X 是连续型随机变量，Y 是离散型随机变量. 其分布律为 $P(Y = y_i) = p_i (i = 1, 2, \cdots, n, \cdots)$. X 与 Y 相互独立，则对于任意实数 c，$P(X = Y + c) =$ ________.

三、解答题:15 ~ 23 小题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

设热水瓶内热水温度为 T,室内温度为 T_0,t 为时间(单位:小时). 由牛顿冷却定律知:热水温度下降速率与 $T-T_0$ 成正比. 当日室温 $T_0=22$℃,当 $t=0$ 时 $T=100$℃. 并知 24 小时后水瓶内温度为 60℃. 问几小时后,瓶内水温为 92℃.

(已知 $\ln 39=3.6636$,$\ln 35=3.5554$,$\ln 19=2.9445$)

(16)(本题满分 9 分)

设方程 $x^3-3x+q=0$ 有三个实根,求 q 的取值范围.

(17)(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有连续的一阶导数,试证:

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\leqslant\frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|+\int_a^b|f'(x)|\,\mathrm{d}x.$$

(18)(本题满分 10 分)

设 $f(x,y)$ 在单位圆 $x^2+y^2\leqslant 1$ 上有连续的偏导数,且在边界上取值为 0,$f(0,0)=2012$,求极限 $l=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\dfrac{-1}{2\pi}\iint\limits_{\varepsilon^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 1}\dfrac{xf'_x+yf'_y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(19)(本题满分 11 分)

(1) 求幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{3n+5}{n(n-1)}x^n$ 的收敛半径、收敛域及和函数;

(2) 求数项级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}(3n+5)}{n(n-1)}$ 的和.

(20)(本题满分 11 分)

已知 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,2,0,-2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (-1,4,2,a)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (3,3,-1,-6)^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1 = (1,5,1,-a)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_2 = (1,8,2,-2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_3 = (-5,2,m,10)^{\mathrm{T}}$ 是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的两个基础解系. 求 a,m 的值.

(21)(本题满分 11 分)

矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,矩阵 $\boldsymbol{B} = (k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^2$,$k$ 为实数.

(1) 求对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$,使 $\boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{\Lambda}$;

(2) 问 k 为何值时,$\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

(22)(本题满分 11 分)

某公司计划开发一种新产品,并试图确定该产品的产量,他们计划出售一件产品可获收入100元,而积压一件产品导致损失20元. 同时预测销售量 Y 服从指数公布,概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{5}\mathrm{e}^{-\frac{y}{5}}, & y > 0, \\ 0, & y \leqslant 0. \end{cases}$$

为了获得利润的数学期望最大,应生产多少件产品?(已知 $\ln 6 = 1.7918$).

(23)(本题满分 11 分)

某药厂称其研制的镇痛药比旧镇痛药疗效更好,即在相同剂量下新药镇痛时间比旧药镇痛时间延长多于3小时. 今从服新、旧药患者中各抽取7人,测得平均镇痛时间为24.2小时与20.0小时,而镇痛时间标准差分别为2.3小时,1.6小时,假定新、旧镇痛药镇痛时间都服从正态发布,且方差相等,从抽查结果看,能否认为新药达到公布的疗效,检验水平 $\alpha = 0.05$.

($t_{0.10}(12) = 0.6955$, $t_{0.05}(12) = 1.7823$, $t_{0.025}(12) = 2.1788$.)

全真模拟卷(二)

(本试卷满分150分,考试时间180分钟)

一、选择题1 ~ 8小题,每小题4分,共32分.下列每题给出的四个选项中只有一个选项符合题目要求.

(1) 设 $u_n \neq 0(n=1,2,\cdots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{u_n}=1$. 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$ ( )

(A) 发散　　(B) 绝对收敛

(C) 条件收敛　　(D) 敛散性由所给条件不能确定

(2) 设 $y=Cxe^{-x}$(C 是任意常数),它是微分方程 $y''+2y'+y=0$ 的 ( )

(A) 通解　　(B) 特解

(C) 不是方程的解　　(D) 是不含上述三个选项的情况

(3) 点 $P_1(4,3,10)$ 关于直线 $l:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-3}{5}$ 的对称点 P_2 为 ( )

(A) $P_2(-4,-3,-10)$　　(B) $P_2(1,5,9)$

(C) $P_2(2,9,6)$　　(D) $P_2(3,-11,-7)$

(4) 下列命题中不正确的是 ( )

(A) 设 $f(u)$ 连续,则曲线积分 $\int_L f(x^2+y^2)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)$ 在全平面与路径无关

(B) 曲线积分 $\int_L e^x\cos y\mathrm{d}x-e^x\sin y\mathrm{d}y$ 在全平面与路径无关

(C) 设 $P(x,y),Q(x,y)$ 在区域 D 内有一阶连续的偏导数,且 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ $((x,y)\in D)$,则曲线积分 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 在区域 D 内与路径无关

(D) 曲线积分 $\int_L \dfrac{-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\dfrac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$ 在包含原点的区域内不是与路径无关

(5) 对 n 元线性方程组,下列命题中正确的是 ( )

(A) 若 $r(\boldsymbol{A})=n$,则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

(B) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解,则非齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

(C) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有两个不同的解,则非齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解

(D) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有两个不同的解,则非齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解

(6) 已知3阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与3维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$,若向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关且 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\alpha}=3\boldsymbol{A\alpha}-2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}$,则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 $\lambda=1$ 的特征向量是 ( )

(A) $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{A\alpha}-3\boldsymbol{\alpha}$　　(B) $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{A\alpha}$

(C) $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{A\alpha}$　　(D) $\boldsymbol{\alpha}$

(7) 设 X 为一随机变量，若 $\mathrm{E}(X^2)=1.21, D(X)=0.21, \mathrm{E}(X)>0$，则必有 （ ）

(A) $P\{-1<X<1\}\geqslant 0.79$ (B) $P\{0<X<2\}\geqslant 0.79$

(C) $P\{|X+1|\geqslant 1\}\leqslant 0.21$ (D) $P\{|X|\geqslant 1\}\leqslant 0.21$

(8) 设总体 $X\sim N(0,1)$，而 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>3)$ 是取自总体 X 的简单随机样本，则下面统计量分布中不正确的是 （ ）

(A) $\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2\sim\chi^2(n)$ (B) $\dfrac{\sqrt{n-1}X_n}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n-1}X_i^2}}\sim t(n-1)$

(C) $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\sim N(0,1)$ (D) $\dfrac{\left(\dfrac{n}{2}-1\right)\sum\limits_{i=1}^{2}X_i^2}{\sum\limits_{i=3}^{n}X_i^2}\sim F(2,n-2)$

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

(9) 设 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有二阶导数，且 $y'\neq 0$，$x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数，将 $x=x(y)$ 满足的微分方程：$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}+(7y+\cos x)\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^3=0$ 变换为 $y=y(x)$ 满足的方程为________.

(10) 定积分 $I=\int_a^b x\sqrt{(x-a)(b-x)}\,\mathrm{d}x\,(b>a)=$ ________.

(11) 设 $y=y(x)$ 是由方程 $y^2+xy+x^2-x=0$ 确定的满足 $y(1)=-1$ 的连续函数，则极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{y(x)+1}=$ ________.

(12) 区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\geqslant 1 \text{ 且 } x^2+y^2-2x\leqslant 0\}$，则二重积分 $I=\iint\limits_D x(y+1)\mathrm{d}\sigma=$ ________.

(13) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$，其中 $\boldsymbol{P}$ 为 3 阶可逆矩阵，则 $\boldsymbol{B}^{2012}-2\boldsymbol{A}^2=$ ________.

(14) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$. 随机事件 $A=(X>\mu)$，$B=(X>\sigma)$，$C=(X>\mu+\sigma)$. 如果 $P(A)=P(B)$，则事件 $D=$（事件 A,B,C 至多有一个发生）的概率 $P(D)=$ ________.

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)（本题满分 9 分）

设 $f(x,y)=\dfrac{y}{1+xy}-\dfrac{1-y\sin\dfrac{\pi x}{y}}{\arctan x}\,(x>0,y>0)$，且 $g(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}f(x,y)$.

求：(Ⅰ) $g(x)$；(Ⅱ) $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)$.

(16)(本题满分 10 分)

(Ⅰ)若$f(x)$在$x=a$可导,试证:$|f(x)|$在$x=a$不可导的充分必要条件为$f(a)=0$且$f'(a)\neq 0$;

(Ⅱ)设$f(x)=g(x)\varphi(x)$,其中$g(x)$在$x=a$可导,$\varphi(x)$在$x=a$连续,但不可导.试证:$f(x)$在$x=a$可导的充分必要条件是$g(a)=0$.

(17)(本题满分 10 分)

设$f(u)$具有二阶连续导数,且$g(x,y)=f\left(\frac{y}{x}\right)+yf\left(\frac{x}{y}\right)$,求$x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

(18)(本题满分 10 分)

求锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面$z^2=2x$所割下曲面的面积.

(19)(本题满分 11 分)

利用$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$,计算广义积分$I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^3(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{x}}-1)}$.

(20)(本题满分 11 分)

n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 线性无关,且与非零向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 都正交. 试证:

(Ⅰ)$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关;

(Ⅱ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1},\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关.

(21)(本题满分 11 分)

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和都是 3, 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量;

(Ⅱ)求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 使 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$;

(Ⅲ)求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

(22)(本题满分 11 分)

设鸟笼中有 3 只黄雀,5 只麻雀,每次开笼门放飞一只鸟,当 3 只黄雀都飞出后,停止放飞,以 X 表示停止放飞后,留在笼中的麻雀数.

(Ⅰ)写出 X 的分布律;

(Ⅱ)求 $P(X>\mathrm{E}(X))$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{2\theta}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\theta}}\quad(-\infty<x<+\infty),$$

其中 $\theta>0$ 为未知参数,$X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是来自总体 X 的简单随机样本,

(Ⅰ)求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$;

(Ⅱ)讨论 $\hat{\theta}$ 的无偏性;

(Ⅲ)讨论 $\hat{\theta}$ 的相合性.

全真模拟卷(三)

(本试卷满分 150 分,考试时间 180 分钟)

一、选择题:1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求.

(1) 设 $x\to 0$ 时,$e^{\tan x}-e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小,则 n 为 ( )

(A)1 (B)2 (C)3 (D)4

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}(1+x)^{-\frac{2}{x}}, & x\neq 0\\ e^{-2}, & x=0\end{cases}$,则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 ( )

(A) 极限不存在 (B) 极限存在但不连续

(C) 连续但不可导 (D) 可导

(3) 设 $\varphi(x)$ 是连续函数,满足 $\varphi(x)=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\varphi(t\sqrt{x})\,dt$,则 $\varphi(x)$ 等于 ( )

(A)0 (B)x (C) $\sqrt{x}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{x}}$

(4) 设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2(R>0)$ 的上半球面的上侧,则 ( )

(A) $\iint\limits_{\Sigma} y^2\,dzdx\neq 0$ (B) $\iint\limits_{\Sigma} y\,dzdx\neq 0$

(C) $\iint\limits_{\Sigma} z\,dzdx\neq 0$ (D) $\iint\limits_{\Sigma} x\,dzdx\neq 0$

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵,$\boldsymbol{\xi}_1=(1,2,-2)^{T}$,$\boldsymbol{\xi}_2=(2,1,-1)^{T}$,$\boldsymbol{\xi}_3=(1,1,t)^{T}$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解向量,其中 $\boldsymbol{b}=(1,3,-2)^{T}$,则 ( )

(A)$t=-1$,必有 $r(\boldsymbol{A})=1$ (B)$t=-1$,必有 $r(\boldsymbol{A})=2$

(C)$t\neq -1$,必有 $r(\boldsymbol{A})=1$ (D)$t\neq -1$,必有 $r(\boldsymbol{A})=2$

(6)$\boldsymbol{A}$ 是3阶矩阵且 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有通解:$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$($k_1,k_2$ 为任意常数),又知 $\boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_3$,$\boldsymbol{P}$ 是三阶可逆矩阵,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & 1\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{P}$ 应该是 ( )

(A)$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3)$ (B)$(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1)$

(C)$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_3)$ (D)$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3)$

(7) 设连续型随机变量 X_1,X_2 相互独立,分布函数分别为 $F_1(x),F_2(x)$,概率密度分别为 $f_1(x),f_2(x)$,则随机变量 $\min(X_1,X_2)$ 的概率密度为 ( )

(A)$f_1(x)f_2(x)$ (B)$f_1(x)+f_2(x)$

(C)$f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$ (D)$f_1(x)(1-F_2(x))+f_2(x)(1-F_1(x))$