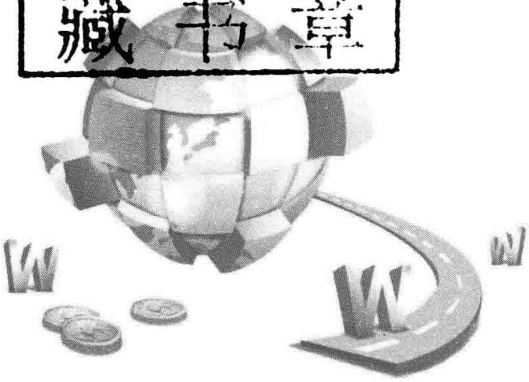
经济数学

安伯香◎主编

中国书籍出版社
China Book Press

经济数学

安伯香　主编



中国书籍出版社
China Book Press

图书在版编目（CIP）数据

经济数学 / 安伯香主编. -- 北京：中国书籍出版社, 2015.4

ISBN 978-7-5068-4839-8

Ⅰ. ①经… Ⅱ. ①安… Ⅲ. ①经济数学-高等职业教育-教材 Ⅳ. ①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 061793 号

经济数学

安伯香 主编

责任编辑 矫俊鹏
责任印制 孙马飞 马 芝
封面设计 管佩霖
出版发行 中国书籍出版社
地　　址 北京市丰台区三路居路 97 号（邮编：100073）
电　　话 （010）52257143（总编室）　（010）52257153（发行部）
电子邮箱 chinabp@vip.sina.com
经　　销 全国新华书店
印　　刷 青岛华星爱商彩印包装有限公司
开　　本 787 mm × 1092 mm 1 / 16
字　　数 313 千字
印　　张 16
版　　次 2015 年 4 月第 1 版　2015 年 4 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5068-4839-8
定　　价 38.00 元

前言

preface

为了适应高职高专教育发展的需要，满足高职高专教育应用型人才培养目标的要求，提升高等职业技术人才的综合能力和素质，切实贯彻融“教、学、做”为一体的教学理念，我们根据教育部制定的“高职高专教育高等数学课程教学基本要求”，本着重能力、重应用、重素质、求创新的总体思路，编写了本书。它针对当前高职高专教育的现状，认真分析、总结和吸收高职高专院校经济管理类专业经济数学教学教改经验，结合高职高专学生的特点和市场人才需求，从高职高专教育人才培养目标出发，充分考虑了高职高专经济管理类专业学生的知识需求和接受能力，以及不同专业或专业方向的要求，精选了教学内容。本教材在许多方面具有明显的高等职业教育的特色，主要体现在以下几个方面。

1. 以“必须够用”为原则，减弱了理论推导与证明，淡化了理论上的系统性。教材内容突出高职数学在专业课程和实际生活中的应用，理论知识以够用为度，体现高职高专特色。

2. 紧密结合专业，突出数学应用性。教材体系突出与经济管理类专业紧密结合，体现数学知识专业化、经济问题数学化，尽可能反映用数学知识解释经济现象，用数学方法解决经济问题，实现“教、学、用”融为一体，体现了教育部教学改革的精神。

3. 以案例驱动、问题导向、案例引入的方式，展开知识。数学概念以案例为背景导入，知识的展开以解决问题为导向，形成数学知识来源于实际问题，又反过来应用于实际问题，符合高职高专学生的认知规律。

4. 注重数学应用能力的培养，注重向学生展现方法和技能。为了培养学生应用数学知识解决实际问题的能力，本书在每节、每章后都配备了实训题目，特别注重那些与实际应用联系较多的知识、方法和技能的训练，目的是强化学生应用数学知识解决实际问题的能力，力图使学生具有举一反三、融会贯通的能力和创新能力。

本书由安伯香任主编，王洪明、刘金荣、王小琴、郑希锋、王翀任副主编。其中第一章由王小琴编写；第二章、第三章由王洪明编写；第四章由刘金荣编写；第五章由王翀编写；第六章由郑希锋编写；第七章、第八章由安伯香编写。

安伯香负责全书的统稿工作。

由于编者的水平所限，书中难免有不妥之处，敬请读者批评指正，以便进一步修改和完善，谨此致谢。

编　者

2014年10月

本书编委会

目　录

CONTENTS

第1章　函数、极限与连续

知识目标

1. 理解函数的概念,熟练掌握函数定义域和值域的求法,了解分段函数的特点.

2. 了解复合函数、初等函数的概念和性质,掌握复合函数的分解方法.

3. 理解极限的概念,了解极限的思想,掌握求极限的方法.

能力目标

1. 掌握常用经济函数的概念及相关运算,会计算个人所得税和银行各种存、贷款的利息,会根据实际问题建立经济函数关系式.

2. 能够分析典型的、常用的经济量之间的函数关系,能用常见的经济函数分析和解释经济现象.

函数是经济数学的主要研究对象，极限和连续是经济数学研究的基本工具.极限揭示了变量在一定的变化过程中的终极状态，极限的思想方法不仅是经济数学的基础,也在其他学科中有着广泛的应用.本章将在复习初等函数知识的基础上,学习极限的概念,讨论极限的运算方法,为进一步学习经济数学知识打下必要的基础.

第1节 认识函数

1.1.1 函数的概念

1. 函数的概念

引例1 (学生消费问题)学生小李的生活费为每月1000元,假定他吃饭用去x元,其他消费(购买日常用品等)用去y元,则$x+y=1000$. 显然吃饭费用x的多少,决定了他的其他消费y的额度,即

$$y=1000-x$$

引例2 某名品鞋店出售某名牌皮鞋的单价为500元/双,假定售出皮鞋数量为x,$x\in\{1,2,3,\cdots\}$,销售收入为y元,则$y=500x$.它反映了实际问题中销售量x与销售收入y之间的对应关系.

上述两个引例体现了在某一特定的过程中,两个变量的依赖关系(即对应法则),两个变量间的这种对应关系本质上就是函数关系.

一般有下列定义:

定义 设x,y是同一变化过程中的两个变量,若当x取其变化范围内任一值时,按照某种对应法则f,总能唯一确定变量y的一个值与之对应,则称y是x的函数,记作

$$y=f(x)$$

x叫作自变量,y叫作因变量. x的取值范围叫作函数的定义域,与x的值对应的y的值的集合叫作函数的值域.

当自变量x取数值x_0时,因变量y按照对应法则f所对应的数值,称为函数$y=f(x)$在点x_0处的函数值,记作$y=f(x_0)$.

求函数定义域时,应遵守以下原则:

(1)代数式中分母不能为零;

(2)偶次根式内表达式非负;

(3)基本初等函数要满足各自的定义要求;

(4)对于表示实际问题的解析式,还应保证符合实际意义.

2. 函数的性质

(1)奇偶性.

设函数$y=f(x)$的定义域D关于原点对称,

若$f(-x)=f(x)$,$x\in D$,则称$f(x)$为偶函数;

若$f(-x)=-f(x)$,$x\in D$,则称$f(x)$为奇函数.

偶函数的图像关于 y 轴对称,奇函数的图像关于原点对称.

(2)单调性.

若对于区间 I 内任意两点 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 I 上单调增加(图 1-1),区间 I 称为单调递增区间;若 $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 I 上单调减少(图 1-2),区间 I 称为单调递减区间.

单调增加与单调减少分别称为递增与递减.单调递增区间或单调递减区间统称为单调区间.

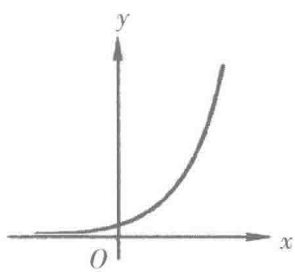


图 1-1

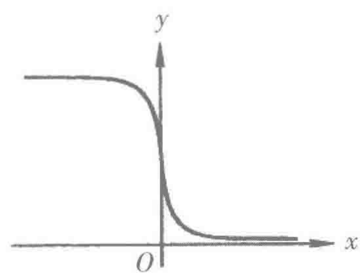


图 1-2

(3)周期性.

给定函数 $y=f(x)$, $x\in D$,若存在常数 T 使得 $x\in D\Longleftrightarrow x+T\in D$ 且 $f(x+T)=f(x)$, $x\in D$,则称 $f(x)$ 为周期函数,常数 T 称为周期.满足条件的最小正数 T 称为 $f(x)$ 的最小正周期,通常所说的周期函数的周期是指它的最小正周期. 例 $y=\sin x$, $y=\cos x$ 是周期为 2π 的函数.

3. 分段函数

引例 3 (产品销售) 某销售商规定,某产品销售量在 10 件以内(包括 10 件)时按每件 50 元销售,超过 10 件时,超过部分按每件优惠 10 元销售.试建立销售收入与销售量之间的函数关系,且求出某顾客购买 12 件产品需要花费多少元?

解:设销售量为 x,销售收入为 y,则可建立以下函数关系式:

$$y=\begin{cases}50x, & 0\leqslant x\leqslant 10\,(x\in \mathrm{N})\\ 50\times 10+40\times(x-10), & x>10\,(x\in \mathrm{N})\end{cases}$$

即
$$y=\begin{cases}50x, & 0\leqslant x\leqslant 10\,(x\in \mathrm{N})\\ 100+40x, & x>10\,(x\in \mathrm{N})\end{cases}$$

此函数关系就是产品的销售模型.

当 $x=12$ 时, $y=100+40\times 12=580$,即顾客购买 12 件产品需要花费 580 元.

像这样把定义域分成若干部分,函数关系由不同的式子分段表示的函数称为分段函数.

例 1 (个人纳税模型) 2011 年 6 月 30 日闭幕的十一届全国人大常委会第二十一

次会议，通过了修改个人所得税法的决定.根据这一决定，从 2011 年 9 月 1 日起，我国的个税起征点从每月 2000 元提高到 3500 元，原来 9 级税级减少到 7 级，应纳税所得额实行分段累积税率，个人应纳税款按表 1–1 计算.

表 1–1 个人所得税税率表

级数	全月应纳税所得额(超出 3500 元的部分)	税率(%)
1	不超过 1500 元的部分	3
2	超过 1500 元到 4500 元的部分	10
3	超过 4500 元到 9000 元的部分	20
4	超过 9000 元到 35000 元的部分	25
5	超过 35000 元到 55000 元的部分	30
6	超过 55000 元到 80000 元的部分	35
7	超过 80000 元的部分	45

试建立月工资收入与应缴纳税款的函数关系式.

解：设某人月工资收入为 x 元，应缴纳税款为 y 元.

按税法规定，当 $x \leqslant 3500$ 时，不必纳税，此时 $y=0$.

当 $3500<x \leqslant 5000$ 元时，其中 3500 元不纳税，纳税部分是 $x-3500$ 元，税率为 3%，这时应纳的税款为 $y=(x-3500)\times 3\%$.

当 $5000<x \leqslant 8000$ 元时，其中 3500 元不纳税，1500 元应纳 3%的税，即 $1500\times 3\%=45$ 元，再多余的部分是 $x-5000$ 元，税率为 10%，这时应纳的税款为 $y=45+(x-5000)\times 10\%$.

经过类似计算，可以得出应纳税款与收入的函数关系，即个人纳税模型：

$$y=\begin{cases} 0 & 0\leqslant x\leqslant 3500 \\ (x-3500)\times 3\% & 3500<x\leqslant 5000 \\ 45+(x-5000)\times 10\% & 5000<x\leqslant 8000 \\ 45+300+(x-8000)\times 20\% & 8000<x\leqslant 12500 \\ 345+900+(x-12500)\times 25\% & 12500<x\leqslant 38500 \\ 1245+6500+(x-38500)\times 30\% & 38500<x\leqslant 58500 \\ 7745+6000+(x-58500)\times 35\% & 58500<x\leqslant 83500 \\ 13745+87500+(x-83500)\times 45\% & x>83500 \end{cases}$$

问题：(1)小李每月工资 4600 元，他每年应向国家交税多少？

(2)刘教授前 11 个月的工资收入为 11 万,第 12 个月收入是 2 万,那他全年应交税多少?

思考:所有年收入 10 万的人,他们所交的个人所得税是不是都一样呢?试举实例说明.

1.1.2 初等函数

1. 基本初等函数

常函数:$y=c$(c 为常数).

幂函数:$y=x^{\alpha}$(α 为常数).

指数函数:$y=a^x$($a>0$,且 $a\neq 1$,a 为常数).

对数函数:$y=\log_a x$($a>0$,且 $a\neq 1$,a 为常数).

三角函数:$y=\sin x$,$y=\cos x$,$y=\tan x$,$y=\cot x$.

以上五类函数统称为基本初等函数.

2. 复合函数

引例 4 (公司员工的收入)某公司员工的收入 y 占公司利润的若干比例,而公司的利润 u 又取决于所销售商品的数量 x,因此该公司员工的收入由所销售商品的数量决定,这一变化过程中对应的三个变量,构成的对应关系就形成了 y 是 x 的复合函数.

定义 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$,u 是 x 的函数 $u=\phi(x)$,如果 $u=\phi(x)$的值域或其部分包含于 $y=f(u)$定义域中,则 y 通过中间变量 u 构成 x 的函数,称为 x 的复合函数,记为 $y=f[\phi(x)]$,其中 x 是自变量,u 是中间变量.

如 $y=2^u$,$u=\sin x$ 则由这两个函数组成的复合函数为 $y=2^{\sin x}$.

例 2 分析下列复合函数的结构

(1)$y=(2x-1)^3$;　(2)$y=\sin(x^2+1)$;　(3)$y=\ln\sin x$;　(4)$y=e^{(2x+1)^2}$;

解 (1)$y=(2x-1)^3$ 是由 $y=u^3$ 和 $u=2x-1$ 复合而成.

(2)$y=\sin(x^2+1)$是由 $y=\sin u$ 和 $u=x^2+1$ 复合而成.

(3)$y=\ln\sin x$ 是由 $y=\ln u$ 和 $u=\sin x$ 复合而成.

(4)$y=e^{(2x+1)^2}$ 是由 $y=e^u$,$u=v^2$ 和 $v=2x+1$ 复合而成.

3. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算而得到的,并且能用一个式子表示的函数,称为初等函数.

例如,$f(x)=2^{x^2+1}+5\ln^4 x$,$y=\sqrt{1-x^2}$,$y=\sqrt{\cot\dfrac{x}{3}}$,等都是初等函数.而 $y=1+x+x^2+x^3+\cdots$ 不满足有限次运算,$f(x)=\begin{cases} x & x\geqslant 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$ 不是用一个解析式子表示,因此都不是初等函数.

实训 1.1

1. 将下列各题中的 y 表示成 x 的函数.

(1) $y=u^3, u=\cos x$;

(2) $y=\ln u, u=\sin v, v=x^2+1$;

2. 分析下列函数的复合过程.

(1) $y=e^{\cos x}$　　　　(2) $y=\ln\sin(3x+1)$

3. 某销售商规定,某产品的销量在 5kg 内(含 5kg)时按每千克 25 元销售,超过 5kg 时,超过部分按每千克优惠 5 元销售,试建立销售收入与销售量之间的函数关系.

4. 乘坐火车时，铁路部门规定：随身携带物品不超过 20 千克免费，超过 20 千克部分，每千克收费 0.2 元，超过 50 千克部分，再加收 50%，应如何计算携带物品所交的费用.

5. 某公用电话市内的通话计费标准为 3 分钟内为 0.22 元，以后每分钟 0.11 元(不足 1 分钟按 1 分钟计算)，小李市内通话用时 9′41″，应付多少元？试给出通话费用与通话时间的函数关系式.

第 2 节　常用经济函数

在社会经济活动中，往往涉及一些经济变量，找出经济变量之间的函数关系，建立有关的经济数学模型，就成为用数学方法解决经济领域中问题的关键.下面我们介绍一些常用的经济函数模型.

1.2.1 需求函数与供给函数

1. 需求函数

一种商品的市场需求量与消费群体的人数、收入、习惯及该商品的价格等诸多因素有关，为简化问题的分析，我们只考虑商品价格对需求量的影响，而其他因素暂时保持某种状态不变，需求量 Q 可以看成价格 P 的一元函数，称为需求函数，记作

$$Q=Q(P)$$

一般地，价格 P 越高，需求量 Q 要下降；价格 P 越低，需求量 Q 要上升，所以需求函数为价格 P 的单调减少函数.

常见需求函数有以下几种类型：

(1)线性需求函数 $Q=a-bP$,其中 $b\geqslant 0,a\geqslant 0$,均为常数;

(2)二次需求函数 $Q=a-bP-cP^2$,其中 $a\geqslant 0,b\geqslant 0,c\geqslant 0$,均为常数;

(3)指数需求函数 $Q=ae^{-bq}$,其中 $a\geqslant 0,b\geqslant 0$,均为常数.

需求函数 $Q=Q(P)$ 的反函数就是价格函数,记作 $P=P(Q)$.

2. 供给函数

在市场经济规律作用下,某种商品的市场供给量将依赖于该商品的价格高低,价格上涨将刺激该商品的供给量增多,供给量 S 可以看成是价格 P 的函数,称为供给函数,记作

$$S=S(P)$$

一般地,供给函数为价格 P 的单调增加函数.

常见供给函数有以下几种类型:

(1)线性供给函数 $S=cP-d$,其中 $c>0$,为常数;

(2)二次供给函数 $S=a+bP+cP^2$,其中 $c>0$,为常数;

(3)指数供给函数 $S=ae^{dP}$,$a>0,d>0$.

3. 市场均衡

需求函数与供给函数可以帮助我们分析市场规律,由于需求函数 Q 是单调减少函数,供给函数 S 是单调增加函数,若把需求与供给曲线画在同一坐标系(图 1-3),它们将相交于一点(P_0,Q_0),这里的 P_0 就是供、需平衡的价格,叫作均衡价格,Q_0 就是均衡数量,此时我们称之为市场均衡.

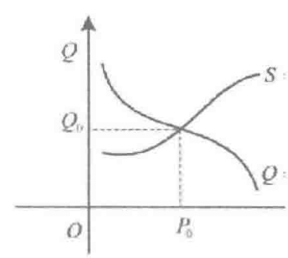


图 1-3

例 1 某种商品的供给函数和需求函数分别是

$$S=25P-10,Q=200-5P$$

求该商品的市场均衡价格和市场均衡数量.

解:按市场均衡条件 $Q=S$,即 $25P-10=200-5P$,则 $P_0=7$,此时 $Q_0=200-5\times 7=165$,即市场均衡价格为 7,市场均衡数量为 165.

1.2.2 成本、收入和利润函数

在生产和产品经营活动中,成本、收入和利润这些经济变量都与产品的产量或销售量 q 密切相关,它们都可以看成 q 的函数,分别称为总成本函数,记作 $C=C(q)$;收入函数,记作 $R=R(q)$;利润函数,记作 $L=L(q)$.

1. 总成本函数

总成本 C 由固定成本 C_0 和可变成本 C_1 两部分组成.固定成本 C_0 如厂房、设备、企业管理费等与产量 q 无关.可变成本 C_1 如原材料费、劳动者工资等随产量 q 的变化而变化,即 $C_1=C_1(q)$,这样总成本 $C=C_0+C_1(q)$.