应用数学

（上册）

主编 刘宗宝 屈寅春

高等教育出版社

应用数学

Yingyong Shuxue

（上册）

主　编　刘宗宝　屈寅春

编　王先婷　杨先伟　田　星　米倩倩　朱永强

[illegible]玲　黄　飞　吴吟吟　傅小波　朱　翔

高等教育出版社·北京

内容简介

本书按照学以致用、够用为度的原则，从贴近专业，贴近应用，贴近学生的学习实际出发，由长期从事高等数学教学经验丰富的教师编写完成。全书分上、下两册，上册共七章，包括函数与极限，导数、微分及其应用，不定积分，定积分及其应用，常微分方程以及数学软件 MATLAB 简介与应用。

本书内容由简单到复杂，从解决实际问题入手，引入数学概念，阐述数学思想方法，注重将理论和实践相结合，配有例题、练习题、习题、每一章节的复习题及知识的拓展提高部分。

本书可作为各类高职院校、成人教育、自学考试的教学用书，也可作为其他人员的自学与参考书。

图书在版编目（CIP）数据

应用数学．上册/刘宗宝，屈寅春主编．—北京：高等教育出版社，2014.9

ISBN 978-7-04-041125-6

Ⅰ．①应… Ⅱ．①刘… ②屈… Ⅲ．①应用数学-高等职业教育-教材 Ⅳ．①O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 211373 号

策划编辑 曹京华　责任编辑 王 冰　王 洋　版式设计 童 丹
插图绘制 黄建英　责任校对 王 雨　责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京中科印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×1092mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	15.5	版　　次	2014年9月第1版
字　　数	380千字	印　　次	2014年9月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	21.50元

物 料 号　41125-00

前　言

本书是在“系统改革高职课程体系”的大背景下，为了适应高职高专公共基础课的改革要求，抓好高职高专公共基础课的教材建设，体现现行高职高专公共基础课教学的基本要求，并结合高等职业教育的现状和发展趋势而编写的。

本书在编写过程中努力体现以下特点：

(1) 进一步优化课程体系，降低理论要求，扩大知识容量，强调实际应用，从而体现创新教学体系。

(2) 注重理论联系实际，由浅入深、由易到难，部分内容采用提出问题、分析问题、解决问题、最后总结出概念并推广的方式讲解，适合各类高职学校根据不同的教学要求实施分层次教学的需要。

(3) 为了便于巩固应掌握的基础知识和引导应用，书中配有大量的例题、练习题和习题，每章末还附有复习题；为某些相关专业选用的基本内容，也以 * 号标出。

(4) 内容叙述力求简明扼要，通俗易懂，深入浅出，富于启发性。

(5) 注意培养学生的数学素质和应用意识，激发学生的学习兴趣，培养学生自主学习，进而提高学生的综合素质和创新能力。

本书由无锡职业技术学院刘宗宝统稿；刘宗宝、屈寅春担任主编。全书分上、下册出版，上册共七章，其中第一章由朱永强、毛珍玲编写，第二章由黄飞、屈寅春编写，第三章由王先婷、刘宗宝编写，第四章由杨先伟、朱翔编写，第五章由米倩倩、田星编写，第六章由吴吟吟编写，第七章由傅小波编写。

本书由战学秋教授主审，他审阅过程中提出了许多宝贵意见和建议，在此表示感谢。

由于时间仓促，编者水平有限，书中缺点和错误之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2014 年 5 月

目　录

第1章　函数、极限与连续

在自然界和工程技术中，存在着各种各样不停变化且相互依赖、相互联系的量. 函数是对这些变量的变化关系最基本的数学描述，极限揭示了函数的变化趋势. 微积分就是以函数为研究对象、以极限为研究手段的最基础的数学理论和数学方法. 因此，函数与极限作为最基本的概念，是学习微积分学的重要基础. 本章将在复习并进一步加深理解函数概念的基础上，引入函数极限的概念，建立函数极限的运算法则，并讨论函数连续的有关内容.

§1.1　函数

1.1.1　函数的概念

1. 函数的定义

在某一变化过程中始终保持不变、取固定数值的量称为常量，如圆周率 π、物体的重力加速度等；在某一变化过程中可以取不同数值的量称为变量，如自然界中的温度、运动物体经过的路程等. 函数是对变量的变化关系最基本的数学描述.

定义 1　设 x 和 y 是两个变量，D 为一给定的数集. 如果对于 D 中的任意一个 x，按照某种对应法则 f，变量 y 都有唯一确定的值和它对应，则称这个对应规则 f 为定义在 D 上的一个**函数**，记作 $y=f(x)$. x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为这个函数的**定义域**.

当自变量 x 在定义域中取 x_0 时，与 x_0 对应的因变量 y 的值称为函数在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$. 当 x 取遍 D 中的所有值时，x 对应的函数值的全体组成的集合 $M=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的**值域**.

2. 函数的表示法

函数常用的表示方法有：表格法、图像法及公式法（解析法）.

表格法就是将函数自变量的取值与其对应的因变量值（函数值）列成一张表来表示函数的方法，如工业生产中有许多数据关系就是用表格表示的.

图像法是把函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 看作一个有序数对的集合：

$$C=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\},$$

集合 C 中的每个元素在坐标平面上表示一个点的坐标，由集合 C 中的点所形成轨迹就是这个函数的图像，如雷达散点图、人的心电图等均是用函数的图像法表示的.

解析法是直接用解析式来表示变量之间的关系，如 $y=\sqrt{x^2-1}$.

上面三种表示函数的方法各有不同的优点：表格法可以直接由自变量的值查得相应的函数值；图像法比较直观；解析法便于数学计算和理论研究.

函数的形式是多种多样的，除常见的幂函数、指数函数、三角函数等以外，还有如中学学过的数列，是以正整数为自变量的函数值列.

函数 $f(x)=[x]$ 称为**取整函数**，其图像如图 1－1 所示，为阶梯曲线. 例如，某厂每 5 分钟生产一台机器，则在 t 分钟内生产出的机器数为 $f(t)=\left[\dfrac{t}{5}\right]$，就是一个关于时间 t 的取整函数.

一个函数也可以在其定义域内的不同区间上用不同的解析式来表示，如

$$y=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0, \end{cases}$$

其函数图像如图 1－2 所示，这种函数称为**分段函数**.

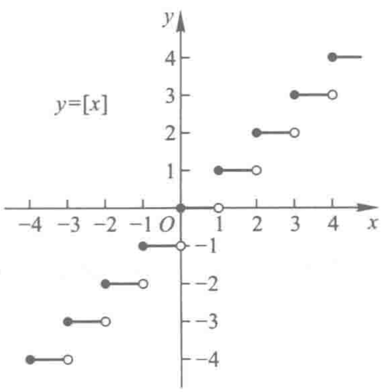


图 1－1

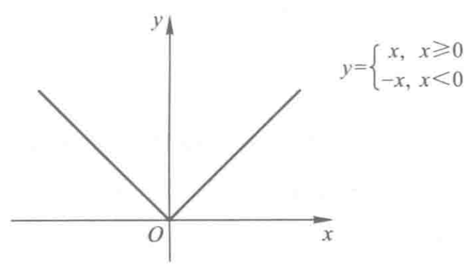


图 1－2

例如，在某电路中，电压与时间的函数关系为

$$u(t)=\begin{cases} \dfrac{2E}{\tau}t, & t\in\left[0,\dfrac{\tau}{2}\right), \\ -\dfrac{2E}{\tau}(t-\tau), & t\in\left[\dfrac{\tau}{2},\tau\right), \\ 0, & t\in[\tau,T]. \end{cases}$$

其定义域 D 为 $[0,T]$，函数图像如图 1－3 所示，该函数就是一个分段函数.

又如，函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1, & 当\ x>0, \\ 0, & 当\ x=0, \\ -1, & 当\ x<0 \end{cases}$$

称为符号函数，它的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $\{-1,0,1\}$，图像如图 1－4 所示，也是一个分段函数.

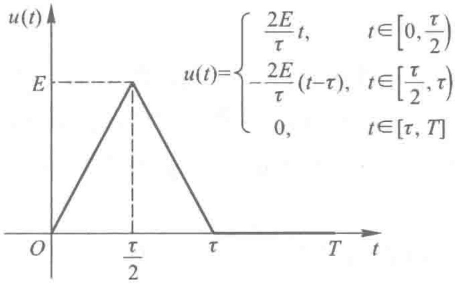


图 1－3

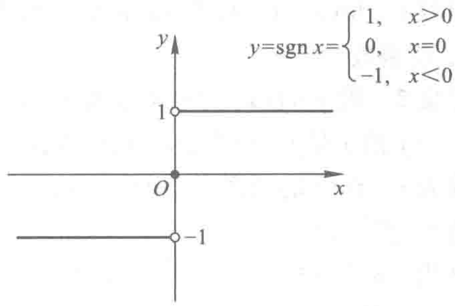


图 1－4

例 1 已知 $f(x)=x^2-1, g(x)=\begin{cases}x-1, & x>0,\\ 2-x, & x<0,\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$.

解 当 $x>0$ 时,

$$g(x)=x-1,\quad f[g(x)]=(x-1)^2-1=x^2-2x;$$

当 $x<0$ 时,

$$g(x)=2-x,\quad f[g(x)]=(2-x)^2-1=x^2-4x+3.$$

所以,

$$f[g(x)]=\begin{cases}x^2-2x, & x>0,\\ x^2-4x+3, & x<0.\end{cases}$$

显然,函数的定义域 D 与对应法则 f 唯一确定一个函数,因而定义域与对应法则称为函数的二要素.如果函数的两个要素相同,那么它们就是相同的函数,否则,就是不同的函数.

对于函数的定义域可分为两类情况,第一类是在实际问题中建立的函数关系,其定义域的范围受变量实际意义的约束;第二类是根据解析式本身的意义所确定,即其定义域为使解析式有意义的全体数值构成的集合.

例 2 求下列函数的定义域

(1) $y=\dfrac{x^2-4}{x+2}$;　　(2) $y=\ln(x+1)+\sqrt{9-x^2}$.

解 (1) 要使函数 y 有意义,必须使 $x+2\neq 0$,即 $x\neq -2$.所以函数 $y=\dfrac{x^2-4}{x+2}$ 的定义域为 $(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$.

(2) 要使函数 y 有意义,x 必须满足

$$\begin{cases}9-x^2\geqslant 0,\\ x+1>0,\end{cases}$$

解这个不等式组,得

$$-1<x\leqslant 3,$$

所以函数 $y=\ln(x+1)+\sqrt{9-x^2}$ 的定义域为 $(-1,3]$.

3. **反函数**

定义 2　设 $y=f(x)$ 的定义域为 D,值域为 M.如果对于 M 中每一个 y 值,D 中都有唯一且满足 $f(x)=y$ 的 x 值与之相对应,则可得到一个以 M 为定义域、y 为自变量、x 为因变量的函数,称此函数为 $y=f(x)$ 的**反函数**,记作 $x=f^{-1}(y)$.习惯上用 x 表示自变量、y 表示因变量,$x=f^{-1}(y)$ 可改为 $y=f^{-1}(x)$.

显然 $y=f(x)$ 也是 $y=f^{-1}(x)$ 的反函数,而且它们的图像关于直线 $y=x$ 对称.

求反函数的方法如下:

首先由 $y=f(x)$ 解出 $x=f^{-1}(y)$,然后将 $x=f^{-1}(y)$ 中 x,y 的位置互换.

例如,求 $y=x^3$ 的反函数,由 $y=x^3$ 解出 $x=y^{\frac{1}{3}}$,然后将 $x=y^{\frac{1}{3}}$ 中 x 与 y 的位置互换得 $y=x^{\frac{1}{3}}$,即 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 为 $y=x^3$ 的反函数.

关于反函数的存在性,有如下的定理.

定理　单调函数必有反函数,且单调函数与其反函数之间具有相同的单调性.

关于函数的单调性在下一小节将会详述.

事实上,若函数 $y=f(x)\ (x\in D)$ 值域为 M,则由 $f(x)$ 在 D 上的单调性可知,对任一 $y\in M$, D 内必定只有唯一的 x 满足 $f(x)=y$,从而推得 $y=f(x)\ (x\in D)$ 的反函数必定存在,其单调性也是显然的.

我们知道,正弦函数 $y=\sin x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $[-1,1]$,而对于任一 $y\in[-1,1]$,在 $(-\infty,+\infty)$ 内有无穷多个 x 与之对应,因此,$y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内不存在反函数.但如果把正弦函数的定义域限定在它的一个单调区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上,由上面反函数的存在定理可知,这样得到的函数 $y=\sin x\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$ 就存在反函数了.这个反函数称为**反正弦函数**,记作 $y=\arcsin x$,它的定义域是 $[-1,1]$,值域是 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$,如图 1-5 所示.

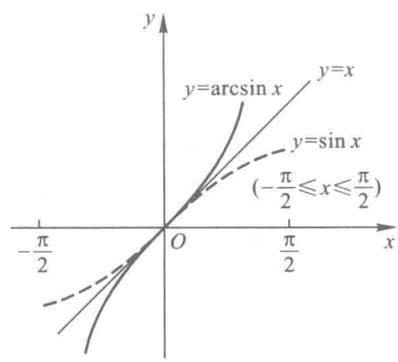


图 1-5

类似地有:定义在区间 $[0,\pi]$ 上的余弦函数 $y=\cos x$ 的反函数称为**反余弦函数**,记作 $y=\arccos x$,它的定义域是 $[-1,1]$,值域是 $[0,\pi]$;定义在区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内的正切函数 $y=\tan x$ 的反函数称为**反正切函数**,记作 $y=\arctan x$,它的定义域是 $(-\infty,+\infty)$,值域是 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$;定义在区间 $(0,\pi)$ 内的余切函数 $y=\cot x$ 的反函数称为**反余切函数**,记作 $y=\operatorname{arccot} x$,它的定义域是 $(-\infty,+\infty)$,值域是 $(0,\pi)$.

以上四个函数 $y=\arcsin x,y=\arccos x,y=\arctan x,y=\operatorname{arccot} x$ 统称为**反三角函数**(图像和性质见表 1-1).

1.1.2 函数的几种特性

设函数$f(x)$在某区间I上有定义.

1. 奇偶性

设I为一个关于原点对称的区间,若对于任意$x\in I$,都有$f(-x)=-f(x)$,则称$f(x)$为奇函数;若$f(-x)=f(x)$,则称$f(x)$为偶函数.显然,奇函数的图像关于原点对称,偶函数的图像关于y轴对称.例如,$y=x^3$在$(-\infty,+\infty)$内是奇函数,$y=x^4+3x^2$在$(-\infty,+\infty)$内是偶函数,$y=\sin x+1$在$(-\infty,+\infty)$内是非奇非偶的函数.

2. 单调性

若对于区间I内的任意两点x_1,x_2,当$x_1<x_2$时,有$f(x_1)<f(x_2)$,则称$f(x)$在区间I上单调增加,区间I称为单调增加区间;当$x_1<x_2$时,有$f(x_1)>f(x_2)$,则称$f(x)$在区间I上单调减少,区间I称为单调减少区间.单调增加区间或单调减少区间统称为单调区间.例如,$y=x^2$在$(-\infty,0]$内是单调减少的,在$[0,+\infty)$内是单调增加的.但$y=x^2$在$(-\infty,+\infty)$内不是单调函数.

3. 周期性

若存在一个常数$T\neq 0$,使得对于任意的$x\in I$,有$x+T\in I$,且使

$$f(x+T)=f(x)$$

恒成立,则称函数$f(x)$为周期函数,常数T称为函数$f(x)$的周期.周期函数的周期通常是指它的最小正周期.例如,$y=A\sin(\omega x+\varphi)$是以$\frac{2\pi}{\omega}$为周期的周期函数.

4. 有界性

若存在一个正数M,使得对于区间I上的任意x,都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立,则称函数$f(x)$在区间I上有界,否则称函数$f(x)$在区间I上无界.例如,$f(x)=\sin x$在其定义域内是有界函数.

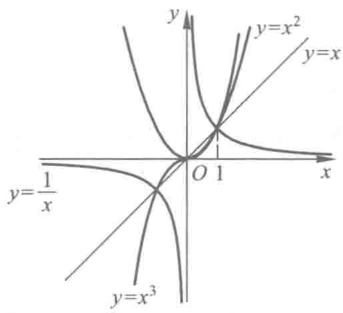
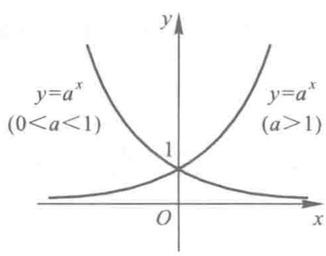
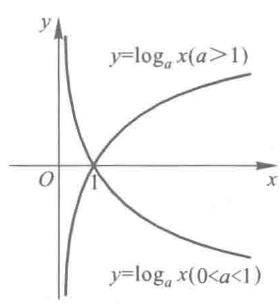
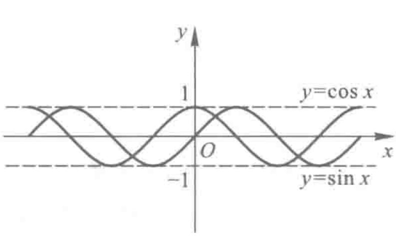
注意 函数的有界性与区间I有关,如$f(x)=\frac{1}{x}$在区间$(0,1)$上是无界的,但在区间$[1,+\infty)$上却是有界的.

1.1.3 初等函数

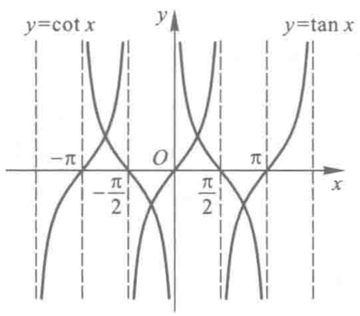
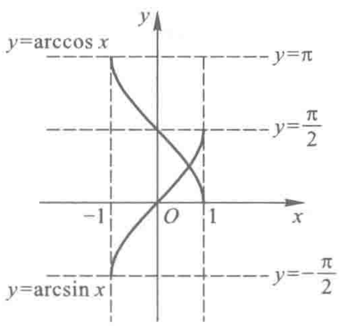
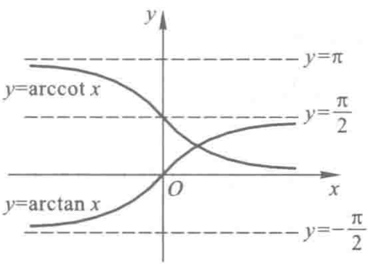
1. 基本初等函数

我们把学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.为便于应用,现将常用的基本初等函数的定义域、值域、图像和性质列表如下(表1-1).

表 1-1

函数	图像	性质
幂函数 $y=x^{\alpha}$ $(\alpha\neq 0)$		定义域、值域与 α 有关； 都过(1,1)； $\alpha>0$ 时，在 $(0,+\infty)$ 上单调增加； $\alpha<0$ 时，在 $(0,+\infty)$ 上单调减少
指数函数 $y=a^x$ $(a>0,a\neq 1)$		定义域为 $(-\infty,+\infty)$， 值域为 $(0,+\infty)$； 都过(0,1)； $a>1$ 时是增函数； $0<a<1$ 时是减函数
对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0,a\neq 1)$		定义域为 $(0,+\infty)$， 值域为 $(-\infty,+\infty)$； 都过(1,0)； $a>1$ 时是增函数； $0<a<1$ 时是减函数
三角函数 $y=\sin x$ $y=\cos x$		定义域为 $(-\infty,+\infty)$， 值域为 $[-1,1]$； $y=\sin x$ 是奇函数； $y=\cos x$ 是偶函数； 周期为 2π

续表

函数	图像	性质
三角函数 $y=\tan x$ $y=\cot x$		$y=\tan x$ 的定义域为 $\left\{x\,\middle\vert\, x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$; $y=\cot x$ 的定义域为 $\{x\mid x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$; 值域均是$(-\infty,+\infty)$; 周期均为 π; 奇函数
*反三角函数 $y=\arcsin x$ $y=\arccos x$		$y=\arcsin x$ 的定义域为$[-1,1]$, 值域为$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$; 奇函数,增函数,有界. $y=\arccos x$ 的定义域为$[-1,1]$, 值域为$[0,\pi]$; 减函数,有界
*反三角函数 $y=\arctan x$ $y=\operatorname{arccot} x$		$y=\arctan x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$, 值域为$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$; 奇函数,增函数,有界. $y=\operatorname{arccot} x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$, 值域为$(0,\pi)$; 减函数,有界

2. 复合函数

在实际应用中,我们常见的函数并非就是基本初等函数本身或由它们仅仅通过四则运算所得到的. 例如,自由落体的动能 E 是速度 v 的函数 $E=\dfrac{1}{2}mv^2$,而速度 v 又是时间 t 的函数 $v=gt$,因而,动能 E 通过速度 v 的关系,构成关于 t 的函数关系式为 $E=\dfrac{1}{2}m(gt)^2$. 类似地由三角函数 $y=\sin u$ 与幂函数 $u=x^2$ 可构成函数 $y=\sin x^2$. 对于这样的函数,给出如下定义.

定义 3　设 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1,而 $u=g(x)$ 的定义域为 D 且值域 $M=\{u\mid u=g(x),x\in D\}$,若 $M\cap D_1\neq\varnothing$,那么 y 通过 u 的关系构成 x 的函数,称该函数为由 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)$ 复合而成的函数,简称**复合函数**,记作

$$y=f[g(x)],$$

其中 u 称为中间变量.

注意 (1) 并非任何两个函数都可构成复合函数. 例如,函数 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=-x^2-1$ 就不能复合成一个复合函数,因为 $y=\sqrt{u}$ 的定义域 $D_1=[0,+\infty)$, $u=-x^2-1$ 的值域 $M=(-\infty,-1]$,所以 $D_1\cap M=\varnothing$,即 $y=\sqrt{-x^2-1}$ 没有意义,不能复合;又如,$y=\arcsin u$ 与 $u=x^2+2$ 也不能复合成一个函数,因为 u 的值域为 $[2,+\infty)$,不包含在 $y=\arcsin u$ 的定义域 $[-1,1]$ 内,因而不能复合;

(2) 复合函数可以有多个中间变量,即复合函数可以由多个函数复合而成,复合的过程就是把中间变量依次代入的过程;

(3) 若对复合函数进行分解,一般情况下,分解得到的每一个函数都应该是基本初等函数或是由基本初等函数经过有限次四则运算所得到的函数.

例 3 求由下面函数复合而成的函数.

(1) $y=u^3$, $u=\sin x$; (2) $y=\ln u$, $u=(x+1)^2$.

解 (1) 将 $u=\sin x$ 代入 $y=u^3$ 中,即得所求复合函数 $y=\sin^3 x$.

(2) 将 $u=(x+1)^2$ 代入 $y=\ln u$ 中,即得所求复合函数 $y=\ln(x+1)^2$.

例 4 指出下列函数的复合过程:

(1) $y=\sqrt{x^3-2x^2+5}$; (2) $y=\arcsin(\ln x)$;

(3) $y=e^{\sqrt{1+x^2}}$; (4) $y=(\arctan\sqrt{x})^2$.

解 (1) $y=\sqrt{x^3-2x^2+5}$ 由 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=x^3-2x^2+5$ 复合而成.

(2) $y=\arcsin(\ln x)$ 由 $y=\arcsin u$ 与 $u=\ln x$ 复合而成.

(3) $y=e^{\sqrt{1+x^2}}$ 由 $y=e^u$, $u=\sqrt{v}$, $v=1+x^2$ 复合而成.

(4) $y=(\arctan\sqrt{x})^2$ 由 $y=u^2$, $u=\arctan v$, $v=\sqrt{x}$ 复合而成.

3. 初等函数

由基本初等函数和常数经过有限次的四则运算和有限次复合步骤所构成的,并能用一个解析式表示的函数叫做**初等函数**.

例如,$y=\ln(x^2+\sin x)$, $y=\dfrac{\arccos\dfrac{1}{x}}{2x^2+1}$, $y=e^{\cos^2 x}\tan x$ 等都是初等函数.

1.1.4 建立函数关系举例

在实际中,许多变量之间的关系都可用函数关系来刻画. 因而,运用数学工具来解决这些问题的关键,首先就是要使这些问题数学化,给这些问题建立适当的数学模型,确定变量间的函数关系. 一般地,建立函数关系的步骤如下:

(1) 分析出问题中的常量与变量,分别用字母表示;

(2) 根据所给条件,运用数学、物理等相关知识,确定等量关系;

(3) 写出函数解析式,指明定义域.

例 5 如图 1－6 所示，用一块边长为 a 的正方形铁皮，在其四角各截去一个边长为 x 的小正方形，然后把四边折起来做成一个无盖的容器，求容器的容积与 x 之间的函数关系.

解 设容器的容积为 V，由于铁皮四角各截去了一个边长为 x 的小正方形，所以容器底面的边长为 $a-2x$，高为 x，于是容器的容积为

$$V=(a-2x)^2\cdot x.$$

由于截去的小正方形的边长必须满足 $0<x<\frac{a}{2}$，所以函数的定义域为 $\left(0,\frac{a}{2}\right)$.

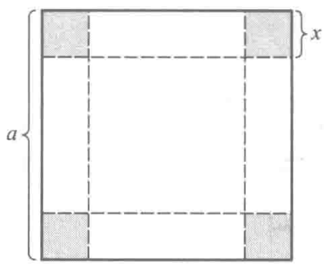


图 1－6

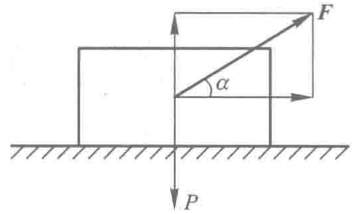


图 1－7

例 6 如图 1－7 所示，重力为 P（此处为大小）的物体置于地平面上，设有一与水平方向成 α 角的拉力，使物体由静止开始移动，求物体开始移动时拉力 F（此处为大小）与角 α 之间的函数关系.

解 由物理知识知，当水平拉力与摩擦力平衡时，物体开始移动，而摩擦力是与正压力 $P-F\sin\alpha$ 成正比的，设摩擦系数为 μ，则有：

$$F\cos\alpha=\mu(P-F\sin\alpha),$$

即

$$F=\frac{\mu P}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}.$$

显然这里 $0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$，所以这个函数的定义域为 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.

例 7 测量弓形零件 FAPBG 的直径时，可以用如图 1－8 所示的仪器，仪器的两尖点 A，B 间的距离为 100 mm，高度 x 可从千分表中读出，根据 x 的读数就可算出直径 D 的大小，试写出 D 与 x 之间的函数关系式.

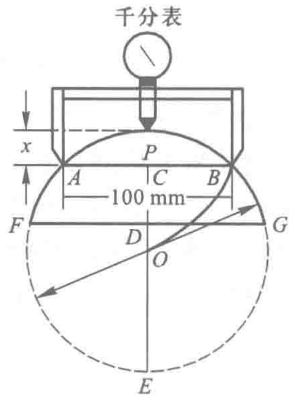


图 1－8

解 设圆心为 O，由 $PC=x$，得

$$OC=\frac{D}{2}-x.$$

在直角三角形 BOC 中，$BO^2=BC^2+OC^2$，即

$$\left(\frac{D}{2}\right)^2=50^2+\left(\frac{D}{2}-x\right)^2,$$

于是

$$D=\frac{2\,500}{x}+x,\quad x\in(0,+\infty)$$

这就是 D 与 x 之间的函数关系式.

例 8　在机械传动中常用的一种曲柄连杆机构造如图 1－9 所示，当主动轮匀速转动时，连杆 AB 带动滑块 B 作往复直线运动. 设主动轮半径为 r，转动角速度为 ω，连杆长度为 l，求滑块 B 的运动规律.

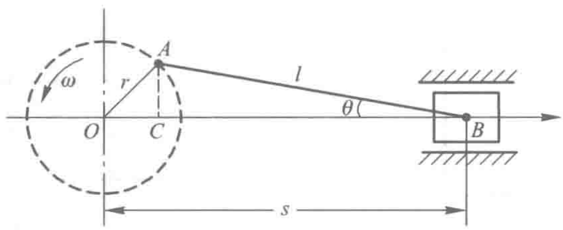


图 1－9

解　设滑块 B 到主动轮中心 O 的距离为 s，从点 A 向 OB 作垂线，垂足为 C，显然 $s=OC+CB$，$\angle AOC=\omega\cdot t$，其中时间 $t\geqslant 0$，OC 的长度为 $r\cos\omega t$，在 $\triangle OAB$ 中，由正弦定理得

$$\frac{r^2}{\sin^2\theta}=\frac{l^2}{\sin^2\omega t},$$

即

$$\sin^2\theta=\frac{r^2\sin^2\omega t}{l^2},\quad \cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\frac{r^2\sin^2\omega t}{l^2}},$$

故

$$CB=l\cos\theta=l\sqrt{1-\frac{r^2\sin^2\omega t}{l^2}}=\sqrt{l^2-r^2\sin^2\omega t}.$$

所以滑块 B 的运动规律为

$$s=OC+CB=r\cos\omega t+\sqrt{l^2-r^2\sin^2\omega t},\quad t\in[0,+\infty).$$

例 9　某工厂今年一、二、三月份的产品销量分别为 1(万件)、1.2(万件)和 1.3(万件)，呈上升趋势. 为了估测以后每个月的销量，拟选用二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 或指数函数型的 $y=a\cdot b^x+c$(a,b,c 皆为常数)加以模拟. 后来四月份的销量是 1.37(万件)，那么根据一、二、三月份销量所选定的两个模拟函数哪一个更好?

解　设 $f(x)=ax^2+bx+c$(x 是月份数，$f(x)$ 是销量函数)，则

$$\begin{cases} f(1)=a+b+c=1, \\ f(2)=4a+2b+c=1.2, \\ f(3)=9a+3b+c=1.3, \end{cases}$$

解得

$$a=-0.05,\quad b=0.35,\quad c=0.7.$$

于是

$$f(x)=-0.05x^2+0.35x+0.7.$$

设 $g(x)=a\cdot b^x+c$(意义同上),则

$$\begin{cases} g(1)=ab+c=1, \\ g(2)=ab^2+c=1.2, \\ g(3)=ab^3+c=1.3, \end{cases}$$

解得

$$a=-\frac{4}{5},\quad b=\frac{1}{2},\quad c=\frac{7}{5}.$$

于是

$$g(x)=-\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x+\frac{7}{5}.$$

从四月份的销量 1.37 看,$f(4)$ 和 $g(4)$ 比较起来,$g(4)$ 与 1.37 更接近,所以宜用 $g(x)$. 同时 $g(x)$ 是增函数,而 $f(x)$ 是先增后减,如果从销量呈上升趋势看也宜用 $g(x)$,所以采用 $g(x)=a\cdot b^x+c$ 为模拟函数较合理.

练习 1.1

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{2x^2-8}$;　　(2) $y=\dfrac{5x}{x^2+x-6}$;

(3) $y=\ln(3x-5)$;　　(4) $y=\arcsin 2x$.

2. 填空题:

(1) 判断单调性:$y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(-1,0)$ 内单调__________;$y=\arctan x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内单调__________.

(2) 判断奇偶性:$y=2x^3+3x$ 是__________函数;$y=\dfrac{1}{x^4-3x^2}$ 是__________函数;$y=x^2\cos x$ 是__________函数;$y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ 是__________函数.

(3) 判断有界性:$y=\sin x+\cos x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内__________;$y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内__________.

3. 将下列各题中的 y 表示为 x 的函数:

(1) $y=\ln u,u=x+\sin x$;　　(2) $y=u^2,u=x^3-2x+1$;