THE A-HARMONIC EQUATION AND ITS OBSTACLE PROBLEMS

A-调和方程及其障碍问题

佟玉霞　徐秀娟　谷建涛　著

清华大学出版社

THE A-HARMONIC EQUATION
AND ITS OBSTACLE PROBLEMS

A-调和方程及其障碍问题

佟玉霞 徐秀娟 谷建涛 著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

A-调和方程是 p-Laplace 方程和 p-调和方程的重要推广形式，在位势理论、拟共形映射理论和弹性理论等现代科学技术的许多领域中有着广泛的应用. 本书主要讲述形式各异的 A-调和方程及其障碍问题，内容包括 A-调和方程及其障碍问题的弱解和很弱解的若干性质，微分形式 A-调和方程的加权积分估计等.

本书适合高等学校数学与应用数学专业的本科生、研究生、教师及相关专业的科技工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

A-调和方程及其障碍问题/佟玉霞，徐秀娟，谷建涛著. --北京：清华大学出版社，2015
ISBN 978-7-302-41626-5

Ⅰ. ①A…　Ⅱ. ①佟…　②徐…　③谷…　Ⅲ. ①次调和函数–研究　Ⅳ. ①O174.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 228366 号

责任编辑：付弘宇　柴文强
封面设计：何凤霞
责任校对：焦丽丽
责任印制：刘海龙

出版发行：清华大学出版社
　　网　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　　地　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　编**：100084
　　社总机：010-62770175　　**邮　购**：010-62786544
　　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质　量　反　馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市金元印装有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：170mm×230mm　　**印　张**：11　　**字　数**：201 千字
版　　次：2015 年 12 月第 1 版　　**印　次**：2015 年 12 月第1 次印刷
印　　数：1～1000
定　　价：39.80 元

产品编号：063852-01

前　言

众所周知，许多重要的物理现象的数学模型都是二阶非线性椭圆方程或方程组. 如物理中的热平衡问题、渗流问题等. 正是由于非线性椭圆方程或方程组在微分方程（如 Monge-Ampere 方程）、微分几何（如调和映照）、流形上曲面之间的变换、拟正则映照、弹性力学（如 Lame-Navie 方程组，Beltrami-Michell 方程组、平面应力问题的 Levy 方程）、量子物理学（如薛定谔方程）、电磁学中的电动方程（如 Yang-Mills 方程）、控制论等方面的广泛应用, 使得研究二阶非线性椭圆方程或方程组的弱解的相关性质具有重要的理论和现实意义.

作为描写稳定和平衡等物理现象的 Laplace 方程, 它的解有许多重要性质, 这些性质在阐明物理现象、研究定解问题以及在其他数学理论中都起着重要作用. 近年来, 人们所做的一个重要工作是推广 Laplace 方程以使其理论能够应用到更为复杂的领域. Laplace 方程的一个重要推广是 p-Laplace 方程, 其研究结果能够应用于流体力学和弹性力学的领域. 引入张量后, p-Laplace 方程就可推广为更为广泛的 A-调和方程. A-调和方程是 p-Laplace 方程和 p-调和方程的重要推广形式, 在位势理论、拟共形映射理论和弹性理论等现代科学技术的许多领域中有着广泛的应用. 例如 R. P. Gilbert、P. Shi 和 Fang M. 将带有体积力和源的非等温非牛顿 H-S 流问题化成了 p-调和（或 A-调和）方程的边值问题 [1−3]. 形式各异的 A-调和方程成为连接数学与上述分支领域的桥梁, 进而为科学家和工程师们建立和研究数学建模提供了行之有效的工具和方法.

A-调和方程的理论和应用问题研究是目前国际上的热门研究课题. 20 世纪 80 年代初, Bojarski 和 Iwaniec 将空间拟正则映射理论与调和分析、高维奇异积分的 Calderon-Zygmund 理论和偏微分方程理论, 尤其是与 A-调和方程联系起来, 使得人们可以用这些现代工具研究和解决几何函数论的问题. 目前, 许多国际知名复分析专家, 如 O. Martio 和 T. Iwaniec 教授等都致力于本方向的理论研究与应用研究工作.

本书主要讲述 A-调和方程及其障碍问题的弱解和很弱解的性质, 以及微分形式 A-调和方程的加权积分估计. 其中大部分是作者近年来的科研成果. 全书共分为 6 章: 第 1 章是预备知识; 第 2、3 章讲述了 A-调和方程及其障碍问题的弱解 (很弱解) 的若干性质, 如正则性、有界性、唯一性、局部极值原理

等; 第 4、5 章讲述了微分形式 A-调和方程的加权积分估计和很弱解的性质; 第 6 章为相关问题.

本书的编著和出版得到了河北省重点学科 (华北理工大学应用数学)、河北省自然科学基金项目 (编号 A2013209278) 以及清华大学出版社大力支持, 并感谢北京交通大学郑神州教授和河北大学高红亚教授多年来的指导与帮助.

本书的主要内容是作者及其合作者近年来的科研成果, 同时参考了其他作者的文献. 由于本书是从大量文献中整理出来的, 书中出现疏漏或错误在所难免, 作者真诚地欢迎读者批评指正.

佟玉霞

目　　录

第 1 章 预备知识

椭圆方程理论在数学、物理学（如电学、热学、光学、电磁学、天体物理学、量子物理学等）、工程技术（如流体动力学、弹性力学等）以及实际生活中有着广泛的应用 [4]. A-调和方程是 p-Laplace 方程和 p-调和方程的重要推广形式, 非线性椭圆方程在微分几何、拟正则映照、非线性弹性力学、控制论等现代科学技术的许多领域中有着广泛的应用 [4−5]. 本章讲述研究 A-调和方程常用的 Sobolev 空间的基本知识 [6].

记 $\mathbf{R}^n(n \geqslant 2)$ 为 n 维 Euclid 空间. 两个向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$ 的内积记为

$$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i.$$

向量 x 的模为

$$|x|=\langle x,x\rangle^{1/2}.$$

记 $e_i, i=1,2,\cdots,n$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的标准正交基.

设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的集合. 若 Ω 为可测集, 则记 $|\Omega|$ 为 Ω 的 n 维 Lebesgue 测度.

函数 $f:\Omega\to\mathbf{R}$ 的支撑定义为

$$\operatorname{supp}(f)=\Omega\bigcap\overline{\{x:f(x)\neq 0\}}.$$

用 $C_0^\infty(\Omega)$ 表示所有在 Ω 上具有紧支撑的无穷次可微函数

$$\varphi:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$$

所形成的代数. 引入 n 重指标

$$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),$$

这里 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是非负整数, 记

$$|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n.$$

α 次微分算子为

$$D^{\alpha}=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}=\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

D^{α} 可作用于充分光滑的函数上. 约定 $0=(0,\cdots,0)$ 为 0 重指标, D^0 为恒等算子. 当 k 为非负整数时, 记 $D^k=\{D^{\alpha}\}_{|\alpha|=k}$.

对 $x\in\mathbf{R}^n$, $A\subset\mathbf{R}^n$, 定义 x 到 A 的距离为

$$\operatorname{dist}(x,A)=\inf_{y\in A}|x-y|.$$

A 的直径定义为

$$\operatorname{diam}(A)=\sup_{x,y\in A}|x-y|.$$

对任意 $A,B\subset\mathbf{R}^n$, A 与 B 的距离为

$$\operatorname{dist}(A,B)=\inf_{x\in A,y\in B}|x-y|.$$

设 $r>0$, $x\in\mathbf{R}^n$. 分别用

$$B(x,r)=B_r(x)=\{y\in\mathbf{R}^n:|x-y|<r\},$$

$$\overline{B}(x,r)=\overline{B}_r(x)=\{y\in\mathbf{R}^n:|x-y|\leqslant r\}$$

和

$$S(x,r)=S_r(x)=\{y\in\mathbf{R}^n:|x-y|=r\}$$

表示以 x 为中心, 以 r 为半径的球、闭球和球面. $\mathbf{R}^n$ 中单位球 $B(0,1)$ 的体积为

$$\omega_n=|B(0,1)|=\frac{\sigma_{n-1}}{n},$$

其中

$$\sigma_{n-1}=\frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}.$$

为单位球面 S(0,1) 的表面积.

记 $C^0(\Omega)=C(\Omega)$ 为所有在 Ω 上连续的函数的全体. 设 k 为非负整数 (可能为 ∞), $m\geqslant 1$ 为整数. 记

$$C^k(\Omega)=\{f:\Omega\to\mathbf{R}:\partial^{\alpha}f\in C^0(\Omega),0\leqslant|\alpha|\leqslant k\}.$$

$$C_0^k(\Omega)=C^k(\Omega)\bigcap\{f:\operatorname{supp}f\text{紧, 且}\subset\Omega\}.$$

$$C^k(\Omega,\mathbf{R}^m)=\{f=(f',\cdots,f^m):\Omega\to\mathbf{R}^m: f^i\in C^k(\Omega), i=1,\cdots,m\}.$$

设 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ 为给定的函数. 若 $\omega:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 满足下列条件:

(1) ω 非减;

(2) $\lim\limits_{t\to0^+}\omega(t)=0$;

(3) 对任意 $x,y\in\mathbf{R}^n$,

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\omega(|x-y|),$$

则称 ω 为 f 的连续模.

若 $\omega(t)=Kt^\alpha$, $0<K<\infty$, $0<\alpha\leqslant1$, 则称 f 满足具有常数 K 和指数 α 的 Hölder 条件. 此时

$$|f(x)-f(y)|\leqslant K|x-y|^\alpha.$$

当 $\alpha=1$ 时, 称 f 满足具有常数 K 的 Lipschitz 条件.

用符号 $C^{0,\alpha}(\Omega,\mathbf{R}^m)$, $0<\alpha\leqslant1$, 表示所有满足指数为 α 的 Hölder 条件的映射 $f:\Omega\to\mathbf{R}^m$ 的集合. 即

$$C^{0,\alpha}(\Omega,\mathbf{R}^m)=\{f:|f(x)-f(y)|\leqslant K|x-y|^\alpha\}.$$

称映射 f 属于 Hölder 空间 $C^{k,\alpha}(\Omega,\mathbf{R}^m)$, 其中 $k\geqslant1$ 为整数, $0<\alpha\leqslant1$, 若 $f\in C^k(\Omega,\mathbf{R}^m)$, 且 f 的所有小于等于 k 阶的偏导数属于 $C^{0,\alpha}(\Omega,\mathbf{R}^m)$. 即

$$C^{k,\alpha}(\Omega,\mathbf{R}^m)=\{f:\partial^\alpha f\in C^{0,\alpha}(\Omega,\mathbf{R}^m), 0\leqslant|\alpha|\leqslant k\}.$$

$C^{k,\alpha}(\Omega,\mathbf{R}^m)$ 在范数

$$\begin{aligned}\|f\|_{C^{k,\alpha}(\Omega,\mathbf{R}^m)}\ &=\max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant k}\sup_{x\in\Omega}|\partial^\alpha f(x)|\\&\quad+\sup_{|\alpha|=k}\sup_{x,y\in\Omega,x\neq y}\frac{|\partial^\alpha f(x)-\partial^\alpha f(y)|}{|x-y|^\alpha}\end{aligned}$$

之下成为 Banach 空间.

设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$, $1\leqslant p\leqslant\infty$. $L^p(\Omega)$ 定义为在 Ω 中的所有 p 次可积的可测函数 $f:\Omega\to\mathbf{R}$ 的集合, 即

$$L^p(\Omega)=\left\{f(x):\int_\Omega|f(x)|^p\mathrm{d}x<\infty\right\}.$$

而

$$L^p_{loc}(\Omega) = \left\{ f(x) : \int_V |f(x)|^p \mathrm{d}x < \infty, \forall V \subset\subset \Omega \right\}$$

即 Ω 中所有局部可积的函数的集合. 这里 $V \subset\subset \Omega$ 意味着 $\overline{V} \subset \Omega$.

当 $1 \leqslant p < \infty$ 时, $L^p(\Omega)$ 中的范数由

$$\|f\|_{p,\Omega} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{1/p} \tag{1-1}$$

给出. 当 $p = \infty$ 时, $L^p(\Omega)$ 中的范数由

$$\|f\|_{\infty,\Omega} = \mathrm{esssup}_\Omega |f(x)| \tag{1-2}$$

给出. 在不至于引起混淆的情况下, $\|f\|_{p,\Omega}$ 简写为 $\|f\|_p$.

当 f 是向量或矩阵时, 仍用式 (1-1), 式 (1-2) 表示 f 的 p 范数, 这里 $|f(x)|$ 理解为向量或矩阵的范数. 例如, $f = (f^1, f^2, \cdots, f^m)$ 时,

$$|f| = \left(\sum_{i=1}^m |f^i|^2 \right)^{1/2}.$$

此时式 (1-1) 成为

$$\|f\|_{p,\Omega} = \left(\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^m |f^i|^2 \right)^{p/2} \mathrm{d}x \right)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

严格来说, $L^p(\Omega)$ 中的元素不是函数, 而是函数的等价类. 两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 称为等价的, 如果除去一个零测度集外它们相等.

设 $a, b > 0$, p, q 为 Hölder 共轭的, 即

$$p, q > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

引入 Zimer[111] 中的下列不等式

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

取 $\varepsilon > 0$, 将上面不等式中的 a 换为 $\varepsilon^{1/p}a$, b 换为 $\varepsilon^{-1/p}b$, 就得到 Young 不等式

$$ab \leqslant \frac{\varepsilon a^p}{p} + \frac{\varepsilon^{-q/p} b^q}{q}.$$

上式当 $p=q=2$ 时即为 Cauchy 不等式

$$ab \leqslant \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2.$$

设 $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$, $p \geqslant 1$, 则有下面的 Hölder 不等式

$$\int_\Omega fg\mathrm{d}x \leqslant \|f\|_p\|g\|_q.$$

当 $p=q=2$ 时, Hölder 不等式成为 Schwarz 不等式

$$\int_\Omega fg\mathrm{d}x \leqslant \|f\|_2\|g\|_2.$$

L^p 空间中的三角不等式, 即 Minkowski 不等式, 为

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p, \quad f,g \in L^p, \quad p \geqslant 1.$$

引入函数 f 在 Ω 上的积分平均

$$f_\Omega = \fint_\Omega f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(x)\mathrm{d}x.$$

由 Hölder 不等式可得, 当 $1 \leqslant p \leqslant q$, $|\Omega| < \infty$ 时,

$$\left(\fint_\Omega |f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p} \leqslant \left(\fint_\Omega |f(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}.$$

因此, 如果用

$$[f]_p = |f|_\Omega = \left(\fint_\Omega |f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

表示 f 的 L^p 范数, 则 $p \mapsto [f]_p$ 非减.

称函数 $\Phi: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 为凸的, 若对任意 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}^n$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, 有

$$\Phi\left[(1-t)x_1 + tx_2\right] \leqslant (1-t)\Phi(x_1) + t\Phi(x_2).$$

若 $\Phi(x)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 凸, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 有界可测, $f \in L^1(\Omega)$, 则有下面的 Jensen 不等式

$$\Psi\left(\fint_\Omega f(x)\mathrm{d}x\right) \leqslant \fint_\Omega \Phi[f(x)]\mathrm{d}x.$$

当 $1 \leqslant p \leqslant \infty$ 时, L^p 是 Banach 空间; 当 $1 \leqslant p < \infty$ 时, L^p 空间是可分的; 当 $1 < p < \infty$ 时, L^p 空间是自反的, 此时 $L^p(\Omega)$ 的对偶空间为 $L^q(\Omega)$, 其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

对于 $f\in C^{\infty}(\Omega,\mathsf{V})$, $\varphi\in C_0^{\infty}(\Omega)$, 成立分部积分公式

$$\int_{\Omega}\varphi(\partial^{\alpha}f)=(-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega}(\partial^{\alpha}\varphi)f.$$

当 $f\in D'(\Omega,\mathsf{V})$ 时, 定义

$$(\partial^{\alpha}f)[\varphi]=(-1)^{|\alpha|}f[\partial^{\alpha}\varphi].$$

设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 为区域, V 为有限维内积空间, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $k=1,2,\cdots$. 定义 Sobolev 空间 $W^{k,p}(\Omega,\mathsf{V})$ 由下面的分布组成: $f\in D'(\Omega,\mathsf{V})$, 且 $\partial^{\alpha}f(|\alpha|\leqslant k)$ 能够由 $L^p(\Omega,\mathsf{V})$ 中的函数表示.

Sobolev 空间 $W^{k,p}(\Omega,\mathsf{V})$ 中的范数为

$$\|f\|_{k,p}=\begin{cases}\left(\displaystyle\sum_{|\alpha|\leqslant k}\int_{\Omega}|\partial^{\alpha}f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}, & 1\leqslant p<\infty,\\ \displaystyle\max_{|\alpha|\leqslant k}\|\partial^{\alpha}f\|_{\infty}, & p=\infty.\end{cases}\tag{1-3}$$

$W^{k,p}(\Omega,\mathsf{V})$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, 在上述范数下是 Banach 空间.

局部 Sobolev 空间 $W_{loc}^{k,p}(\Omega,\mathsf{V})$ 定义为

$$W_{loc}^{k,p}(\Omega,\mathsf{V})=\{f:f\in W^{k,p}(\Omega',\mathsf{V}),\quad\forall\Omega'\subset\subset\Omega\}.$$

空间 $W_0^{k,p}(\Omega,\mathsf{V})$ 定义为 $C_0^{\infty}(\Omega,\mathsf{V})$ 相对于范数 (1-3) 的闭包. $W_0^{k,p}(\Omega,\mathsf{V})$ 也可说成在 Sobolev 意义下边界值为零.

本章注记: 本章主要目的是简单介绍阅读本书所需的预备知识. 主要参考文献如下: Reshetnyak[21], Iwaniec, Martin[94], [102], Heinonen, Kilpelainen, Martio[44], Adams[6], Zimer[111], 高红亚, 褚玉明 [51].

第 2 章　A-调和方程

2.1　A-调和方程很弱解的正则性

2.1.1　介绍

设 Ω 为 $\mathbf{R}^n(n \geqslant 2)$ 中的有界正则区域. 考虑下面的非齐次 A-调和方程:

$$\operatorname{div} A(x, \bigtriangledown u) = f(x), \tag{2.1-1}$$

其中 $A(x,\xi):\Omega \times \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}^n$ 满足通常的可测性条件 (Carathéodory 条件), 并且对 $1 < p < \infty, 0 < \alpha \leqslant \beta < \infty$ 和几乎所有的 $x \in \Omega$ 及 $\forall \xi \in \mathbf{R}^n$ 有:

$$\text{(i)}\quad |A(x,\xi)| \leqslant \beta|\xi|^{p-1}; \qquad \text{(ii)}\quad \langle A(x,\xi),\xi\rangle \geqslant \alpha|\xi|^p.$$

注　当 $f(x)=0$ 时, 方程 (2.1-1) 即为齐次 A-调和方程

$$\operatorname{div} A(x, \bigtriangledown u) = 0. \tag{2.1-2}$$

注　生成 p-调和方程 $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)=0$ 的映射 $A(x,\xi)=|\xi|^{p-2}\xi$ 即满足假设 (i),(ii).

定义 2.1.1　函数 $u \in W^{1,r}_{loc}(\Omega)$, $\max\{1, p-1\} < r < p$ 称为方程 (2.1-1) 的很弱解, 如果对所有在 Ω 中具有紧支集的 $\phi \in W_0^{1,\frac{r}{r-p+1}}(\Omega)$, 有

$$\int_\Omega \left[\langle A(x,\nabla u), \nabla \phi\rangle + f(x)\phi\right]\mathrm{d}x = 0. \tag{2.1-3}$$

这里“很弱”的含义是指 u 的 Sobolev 可积指数 r 可以小于弱解的 Sobolev 可积指数 p.

在研究很弱解的问题及其性质时, 基于扰动向量场的 Hodge 分解理论和估计发挥了重要的作用, Iwaniec 和 Sbordone[7] 就是利用 Hodge 分解理论来构造试验函数, 建立了齐次 A-调和方程 (2.1-2) 的很弱解的正则性, 即很弱解 u 一定是经典意义下的弱解. 结论如下:

定理 2.1.1[7]　存在可积指数 $1 < r_1 = r_1(n,p,a,b) < p < r_2 = r_2(n,p,a,b) < \infty$, 使得 A-调和方程 (2.1-1) 的每一个很弱解 $u \in W^{1,r_1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 都属于 $W^{1,r_2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

文献 [8] 给出了具有散度项非齐次项的 p-调和型退化方程很弱解的稳定性和唯一性. 而对于方程右端是非散度的情况, 其正则性问题仍有待解决. 本小节就方程右端是非散度的情况下, 定义了方程 (2.1-1) 的很弱解, 并运用扰动向量场的 Hodge 分解理论, 证明了很弱解的正则性. 由于拟正则映射与 A-调和方程密切相关, 拟正则映射的每一个分量为 A-调和方程的弱解. 于是本小节的结果能够应用于拟正则映射理论. 主要为下面的正则性定理:

定理 2.1.2 设 $f \in L_{\rm loc}^{\frac{nq}{n(p-1)+q}}(\Omega), q > p$, 存在可积指数$1 < r_1 = r_1(n,p,\alpha,\beta) < p < r_2 = r_2(n,p,\alpha,\beta) < \infty$, 使得方程 (2.1-1) 的每一个很弱解 $u \in W_{\rm loc}^{1,r_1}(\Omega)$ 都属于 $W_{\rm loc}^{1,r_2}(\Omega)$, 从而 u 是经典意义下的弱解.

2.1.2 预备知识

引理 2.1.1[9] B_R 为半径为 R 的开球. $B_{\sigma R}$ 与 B_R 同球心, 半径为 σR. 若 $u \in W^{1,p}(B_R)$, $1 \leqslant p < \infty$, 则对任意 $0 < \sigma \leqslant 1$ 有

$$\| u - \overline{u_{B_{\sigma R}}} \|_{L^p(B_R)} \leqslant \left(\frac{2}{\sigma}\right)^{n/p} {\rm diam} B_R \|\nabla u\|_{L^p(B_R)},$$

其中 $\overline{u_{B_{\sigma R}}} = ⨍_{B_{\sigma R}} u(x){\rm d}x = \frac{1}{|B_{\sigma R}|}\int_{B_{\sigma R}} u(x){\rm d}x$ 为 $u(x)$ 在 $B_{\sigma R}$ 上的积分平均.

引理 2.1.2 若 $u \in W_{\rm loc}^{1,p}(\Omega)$, 则对任意球 $B_R \subset\subset \Omega$ 有 $\| u - \overline{u_{B_R}} \|_{L^p(B_R)} \leqslant 2^{1+n/p} R \|\nabla u\|_{L^p(B_R)}$.

证 在引理 2.1.1 中取 $\sigma = 1$ 即可得证. □

引理 2.1.3[10] 设 $1 \leqslant p < n$. 若 $u \in W_{\rm loc}^{1,p}(\Omega)$, 则对任意球 $B_R \subset\subset \Omega$, 有

$$\| u - \overline{u_{B_R}} \|_{L^{\frac{np}{n-p}}(B_R)} \leqslant C(n) \frac{p}{n-p}\left(\frac{p}{n-p}\right)^{(n-p)/np} \|\nabla u\|_{L^p(B_R)}.$$

引理 2.1.4[11-12] 设 $u(x) \in L^p(B_R)$, $B_R \subset \Omega$, $f \in L^t(B_R)$, $t > p$, 并且满足如下不等式

$$⨍_{B_{\frac{R}{2}}} |u|^p {\rm d}x \leqslant K\left(⨍_{B_R} |u|^s {\rm d}x\right)^{\frac{p}{s}} + \theta ⨍_{B_R} |u|^p {\rm d}x + ⨍_{B_R} |f|^p {\rm d}x,$$

其中 $1 \leqslant s < p$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$; 则存在可积指数 $p' = p'(K,n,p,\theta)$, $(t \geqslant p' > p)$, 使

得 $u \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, 且

$$\left(\fint_{B_{\frac{R}{2}}} |u|^{p'}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant C'\left(\fint_{B_R} |u|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} + C'\left(\fint_{B_R} |f|^{p'}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p'}},$$

其中 $C' = C'(n, p, K, \theta)$.

2.1.3 正则性的证明

定理 2.1.2 的证明 设 $\eta \in C_0^\infty(B_R)$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, 当 $x \in B_{\frac{R}{2}}$ 时 $\eta \equiv 1$, $|\nabla\eta| \leqslant \frac{4}{R}$ 为截断函数. 首先假设 $u \in W^{1,p-\varepsilon}_{\mathrm{loc}}(\Omega)(0 < \varepsilon < 1/2)$ 为方程 (2.1-1) 的一个很弱解. 考虑下面的 Hodge 分解

$$|\nabla(\eta u)|^{-\varepsilon}\nabla(\eta u) = \nabla\phi + H, \tag{2.1-4}$$

这里 $\phi \in W_0^{1,\frac{p-\varepsilon}{1-\varepsilon}}(\Omega)$, $H \in L^{\frac{p-\varepsilon}{1-\varepsilon}}(\Omega)$ 是一个散度为零 (divergence free) 的向量场, 且满足 [8]:

$$\|\nabla\phi\|_{\frac{p-\varepsilon}{1-\varepsilon}} \leqslant C(n,p)\|\nabla(\eta u)\|_{p-\varepsilon}^{1-\varepsilon}, \tag{2.1-5}$$

$$\|H\|_{\frac{p-\varepsilon}{1-\varepsilon}} \leqslant C(n,p)\varepsilon\|\nabla(\eta u)\|_{p-\varepsilon}^{1-\varepsilon}. \tag{2.1-6}$$

令

$$E(\eta, u) = |\nabla(\eta u)|^{-\varepsilon}\nabla(\eta u) - |\eta\nabla u|^{-\varepsilon}\eta\nabla u. \tag{2.1-7}$$

则由一个基本的关系式 [13]

$$\left||X|^{-\varepsilon}X - |Y|^{-\varepsilon}Y\right| \leqslant 2^\varepsilon\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}|X-Y|^{1-\varepsilon}, \quad 0<\varepsilon<1, \quad X, Y \in \mathbf{R}^n \tag{2.1-8}$$

得到

$$|E(\eta, u)| \leqslant 2^\varepsilon\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}|u\nabla\eta|^{1-\varepsilon}. \tag{2.1-9}$$

下面计算中一个有用的技巧是用 Hodge 分解中的 $\nabla\phi$ 充当式 (2.1-3) 中的试验函数. 于是有

$$\begin{aligned}&\int_{B_R}\langle A(x,\nabla u), E(\eta,u)\rangle\mathrm{d}x + \int_{B_R}\langle A(x,\nabla u), |\eta\nabla u|^{-\varepsilon}\eta\nabla u\rangle\mathrm{d}x + \int_{B_R} f(x)\phi\mathrm{d}x\\ &= \int_{B_R}\langle A(x,\nabla u), H\rangle\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{2.1-10}$$