高等教育自学考试辅导丛书

（经济类专科）

高等数学（一）

（微积分、线性代数、概率初步）

各章习题解答

姚唐生 编

$df(x)$、$\int f(x)dx$

$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$

专利文献出版社

高等教育自学考试辅导丛书

（经济类专科）

高等数学（一）

（微积分、线性代数、概率初步）

各章习题解答

姚唐生　编

$$df(x),\ \int f(x)dx$$

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$$

专利文献出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/姚唐生编．—北京：专利文献出版社，1998.8
(高等教育自学考试辅导丛书)
ISBN 7－80011－338－8

Ⅰ．高… Ⅱ．姚… Ⅲ．高等数学-高等教育-自学考试-自学参考资料 Ⅳ．013
中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 23425 号

书　　名：高等教育自学考试辅导丛书
著作责任者：姚唐生
责 任 编 辑：张丽荣
标 准 书 号：ISBN 7－80011－338－8/Z·329
出　版　者：专利文献出版社
地　　址：北京海淀区西土城路 6 号　邮编：100088
印　　刷：首都师范大学印刷厂
经　销　者：新华书店总经销
规　　格：787×1092 毫米 16 开本　26 印张　600 千字
印　　数：1—5000 册　1998 年 8 月第一版　1998 年 8 月第一次印刷
定　　价：每套四册共计 40 元

前　　言

高等数学(一)(微积分、线性代数、概率论)是高等教育自学考试经济管理类专科各专业的公共基础课。自1984年开设这门课考试,至今已15年了,报考的人数逐年增多,由最初的几百人,到几千人,近几年已上万人了,每年考试成绩达60分以上,取得单科合格证书的学员人数,通常占当年报考人数的30%左右,最高到达过45%,最低仅占8%

参加自学考试,没有入学考试,不受原有学历,教育程度的限制,但考试与普通高等学校同等学历层次水平的要求相一致。是宽进严出的学习考试制度。

每年参加这门课考试的自学者,在考前的学习过程中多数人由于不具备为学高等数学应达到的初等数学的基础水平,势必遇到诸多困难。

同样受过中等教育的自学考试者,普通高中、普通中专毕业的,学习的困难就少些,职业高中、中技、职工高中,职工中专毕业的,学习的困难就大多了。仅受过初中甚至小学教育的,在学习中,想必极为困难。

自考办有个统计数据,自1983年至1995年参加北京市自学考试获得专、本科毕业证书的毕业生累积三万六千五百多人,其中原有普通高中和普通中专毕业学历的约占80%,原有大专以上毕业学历的约占14%,原有职业高中、职工中专以至初中学历的不足6%。

为了帮助考生克服学习这门课的困难,更好地理解,熟习这门课各章习题的求解思路,掌握解题的关键步骤,更是为了由于各种原因无法参加学校组织的按步就班学习的自学考试的考生,在自学过程中排疑解难之用,则是编写本书的目的。

编者

1998年9月

目　　录

一元微积分

线性代数

一元概率论

一元微积分

第一章　函数

习题(A)($P_{39\sim45}$)

1 ～ 4(略)

5 答:共 8 个子集,即{　},{0},{1},{2},{0,1},{0,2},{1,2},{0,1,2}

6 (略)

7 解:(1)$A \cup B = \{1,2,3\} \cup \{1,3,5\} = \{1,2,3,5\}$

(2)$A \cap B = \{1,2,3\} \cap \{1,3,5\} = \{1,3\}$

(3)$A \cup B \cup C = \{1,2,3\} \cup \{1,3,5\} \cup \{2,4,6\} = \{1,2,3,5,4,6\}$

(4)$A \cap B \cap C = \{1,2,3\} \cap \{1,3,5\} \cap \{2,4,6\} = \{\ \}$

(5)$A - B = \{1,2,3\} - \{1,3,5\} = \{2\}$

8 (略)

9 解:(1)$A \cup B = \{x|3 < x < 5\} \cup \{x|x > 4\} = \{x|x > 3\}$

(2)$A \cap B = \{x|3 < x < 5\} \cap \{x|x > 4\} = \{x|4 < x < 5\}$

(3)$A - B = \{x|3 < x < 5\} - \{x|x > 4\} = \{x|3 < x \leqslant 4\}$

10 (略)

11 解:(1)$\overline{A} = \{4,5,6\}$

(2) $= \{1,3,5\}$

(3)$\overline{A} \cup \overline{B} = \{4,5,6\} \cup \{1,3,5\} = \{4,5,6,1,3\}$

(4)$\overline{A} \cap \overline{B} = \{4,5,6\} \cap \{1,3,5\} = \{5\}$

12 (略)

13 答:对的如下:　$A \cup A = A \quad A \cup U = U \quad A \cup \Phi = A \quad A - A = \Phi$

$A \cap A = A \quad A \cap U = A \quad A \cap \Phi = \Phi$

14 ～ 25 (略)

26 答:不是。

我们所学的函数都是单值对应的关系,而表达式 $y = \lg(-x^2)$ 中的 x 无论取何值,y 都没有确定的值与之对应,没有单值对应的关系,不是函数的表达式。

27 答:不是。

当两函数的定义域,对应规则均相同时,才是相同的,由 $D(y_1) = (-\infty,1) \cup (1,+\infty)$ 而 $D(y_2) = (-\infty,+\infty)$,即 $D(y_1) \neq D(y_2)$

28 求下列函数的定义域

注:读者应理解,熟习确定函数定义域的主要思路,即分式的分母不得为零,偶次根号内被开方的式子不得为负,对数符号后的真数严格大于零,及反正弦、反余弦符号后的部分,其绝对值小于或等于 1

(1) 解:令 $9 - x^2 \geqslant 0$ 即 $x^2 \leqslant 9$,即 $|x| \leqslant 3$,即 $-3 \leqslant x \leqslant 3$

$\therefore$ 此函数的定义域为 $-3 \leqslant x \leqslant 3$。或记作$[-3,3]$

(2) 解:令 $1 - x^2 \neq 0$ 且 $x + 2 \geqslant 0$,　即 $x \geqslant -2$ 且 $x \neq \pm 1$

$\therefore$ 此函数的定义域为 $x \geqslant -2$ 且 $x \neq \pm 1$,即$[-2,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty)$

(3) 解：当 x 任意取值时，x^2+4 总大于 0，即分式 $\frac{-5}{x^2+4}$ 总有意义。

∴ 此函数的定义域为一切实数，即 $(-\infty,+\infty)$

(4) 解：令 $-1 \leqslant \frac{x-1}{2} \leqslant 1$，即 $-1 \leqslant x \leqslant 3$

∴ 此函数的定义域为 $-1 \leqslant x \leqslant 3$，即 $[-1,3]$

(5) 解：当 x 任意取值时，幂 e^{1-x^2} 总有意义

∴ 此函数的定义域为一切实数，即 $(-\infty,+\infty)$

(6) 解：令 $3-x>0$ 且 $|x|-1>0$，即 $x<-1$ 或 $1<x<3$

∴ 此函数的定义域为 $x<-1$ 或 $1<x<3$，即 $(-\infty,-1)\cup(1,3)$

(7) 解：令 $\begin{cases} \lg \frac{5x-x^2}{4} \geqslant 0 \\ \frac{5x-x^2}{4} > 0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} \frac{5x-x^2}{4} \geqslant 1 \\ 5x-x^2>0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 4 \\ 0<x<5 \end{cases}$ 即 $1 \leqslant x \leqslant 4$

∴ 此函数的定义域为 $1 \leqslant x \leqslant 4$，即 $[1,4]$

(8) 解：令 $\begin{cases} -1 \leqslant \frac{2x-1}{7} \leqslant 1 \\ x^2-x-6>0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -3 \leqslant x \leqslant 4 \\ x<-2 \text{ 或 } x>3 \end{cases}$ 即 $-3 \leqslant x < -2$ 或 $3 < x \leqslant 4$

∴ 此函数的定义域为 $-3 \leqslant x < -2$ 或 $3 < x \leqslant 4$，即 $[-3,-2)\cup(3,4]$

29 解：$f(0)=0^2-3\times 0+2=2$

$f(1)=1^2-3\times 1+2=0$

$f(2)=2^2-3\times 2+2=0$

$f(-x)=(-x)^2-3(-x)+2=x^2+3x+2$

$f(\frac{1}{x})=(\frac{1}{x})^2-3\cdot\frac{1}{x}+2=\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}+2$

$f(x+1)=(x+1)^2-3(x+1)+2=x^2-x$

30 解：$f[f(x)]=\dfrac{f(x)}{1-f(x)}=\dfrac{\frac{x}{1-x}}{1-\frac{x}{1-x}}=\dfrac{\frac{x}{1-x}}{\frac{1-2x}{1-x}}=\dfrac{x}{1-2x}$

$$f\{f[f(x)]\}=\frac{f[f(x)]}{1-f[f(x)]}=\frac{\frac{x}{1-2x}}{1-\frac{x}{1-2x}}=\frac{\frac{x}{1-2x}}{\frac{1-3x}{1-2x}}=\frac{x}{1-3x}$$

31 ～ 35（略）

36 求下列函数的定义域并作图。

（注：分段函数的各段表达式的取值范围的总和即分段函数的定义域，其图形也是各段表达式所确定的图形的总和。）

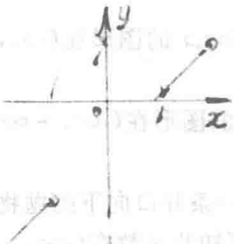
(1) 解：由 $x>0, x=0, x<0$，可知 $x\in(-\infty,+\infty)$

(2) 解：由 $|x|\leqslant 1$，得 $-1\leqslant x\leqslant 1$，由 $|x|>1$ 得 $x<-1$ 或 $x>1$，由 $|x|<2$ 得 $-2<x<2$，同而 $x\in(-2,2)$

37 解：由绝对值概念 $|x|=\begin{cases} -x & x<0 \\ x & x\geqslant 0 \end{cases}$

$$\text{可知 } |2x-1| = \begin{cases} -(2x-1) & 2x-1<0 \\ 2x-1 & 2x-1 \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{即 } |2x-1| = \begin{cases} 1-2x & x<\frac{1}{2} \\ 2x-1 & x \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\therefore y = 5-|2x-1| = \begin{cases} 5-(1-2x) & x<\frac{1}{2} \\ 5-(1-2x) & x \geqslant \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{即 } y = \begin{cases} 4+2x & x<\frac{1}{2} \\ 6-2x & x \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$



38 ～ 47（略）

48 判定下列函数的奇偶性

（注：读者应理解，熟习函数奇、偶性的定义及奇、偶函数图形的特点，当函数 $f(x)$ 的 x 取值为对称区间 $[-a,a]$ 或 $(-\infty,+\infty)$ 时，才能考虑奇偶性。

若 $f(-x)=-f(x)$，则 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上或 $(-\infty,+\infty)$ 内有奇性，其图形在直角坐标平面上与原点对称。

若 $f(-x)=f(x)$，则 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上或 $(-\infty,+\infty)$ 内有偶性，其图形在直角坐标平面上与 y 轴对称。

对常见的便于画图的函数，用图形与原点或 y 轴是否对称，以确定是否有奇、偶性更为简捷。）

（1）解：由 $y=\dfrac{1}{x^2}$，得 $f(-x)=\dfrac{1}{(-x)^2}=\dfrac{1}{x^2}=f(x)$，可知此函数有偶性

（2）解：由 $y=\mathrm{tg}x$，得 $f(-x)=\mathrm{tg}(-x)=-\mathrm{tg}x=-f(x)$，可知此函数有奇性

（3）解：由 $y=a^x$，得由 $f(-x)=a^{-x}\neq\begin{cases}-a^x \\ a^x\end{cases}$ 即 $f(-x)\neq\begin{cases}-f(x) \\ f(x)\end{cases}$ 可知此函数没有奇偶性

（4）解：由 $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$，得 $f(-x)=\dfrac{a^{-x}+a^{-(-x)}}{2}=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}=f(x)$，可知此函数有偶性

（5）解：由 $y=x+\sin x$，得 $f(-x)=-x+\sin(-x)=-x-\sin x=-(x+\sin x)=-f(x)$，可知此函数有奇性

（6）解：$y=xe^x$，得 $f(-x)=-xe^{-x}\neq\begin{cases}-xe^x \\ xe^x\end{cases}$ 即 $f(-x)\neq\begin{cases}-f(x) \\ f(x)\end{cases}$ 可知此函数没有奇偶性

（7）解：由 $y=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$，得 $f(-x)=\lg\dfrac{1-(-x)}{1+(-x)}=\lg\dfrac{1+x}{1-x}=\lg(\dfrac{1-x}{1+x})^{-1}=-\lg\dfrac{1-x}{1+x}=-f(x)$，可知此函数有奇性

49 判断下列函数的单调增减性

（注：读者应理解，熟习函数单调性的定义，及单调增加，单调减小函数图形的特点。

若 $-\infty<x_1<x_2>+\infty$ 且 $f(x_1)<f(x_2)$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有单增性，其图形沿 x 轴正向总是上升的，若 $a<x_1<x_2<b$ 且 $f(x_1)<f(x_2)$，则 $f(x)$ 仅在 (a,b) 内有单增性，其图形仅在 (a,b) 内沿 x 轴正向是上升的。

若 $-\infty < x_1 < x_2 < +\infty$ 或 $a < x_1 < x_2 < b$ 且 $f(x_1) > f(x_2)$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内或 (a, b) 内有单减性，其图形在 $(-\infty, +\infty)$ 内或仅在 (a,b) 内沿 x 轴正向是下降的。

对常见的便于画图的函数，用图形的升、降确定有没有单调性更为简捷。）

(1) 解：由 $y = 2x + 1$ 的图形在 $(-\infty, +\infty)$ 内是一条沿 x 轴正向上升的直线，可知此函数有单增性

(2) 解：由 $y = (\frac{1}{2})^x$ 的图形在 $(-\infty, +\infty)$ 内是一条沿 x 轴正向凹着下降的曲线，可知此函数有单减性

(3) 解：当 $0 < a < 1$ 时，由 $y = \log_a x$ 的图形在 $(-\infty, +\infty)$ 内是一条沿 x 轴正向凹着下降的曲线，可知此函数有单减性

当 $a > 1$ 时，由 $y = \log_a x$ 的图形在 $(-\infty, +\infty)$ 内是一条沿 x 轴正向凸着上升的曲线，可知此函数有单增性

(4) 解：由 $y = 1 - 3x^2$ 的图形是一条开口向下的抛物线，在 $(-\infty, 0)$ 内沿 x 轴正向上升，在 $(0, +\infty)$ 内沿 x 轴正向下降，可知此函数在 $(-\infty, +\infty)$ 内没有单调性，而在 $(-\infty, 0)$ 内有单增性，在 $(0, +\infty)$ 内有单减性。

(5) 解：由 $y = x + \lg x$ 的图形在 $(0, +\infty)$ 内是一条沿 x 轴正向凸着上升的曲线，可知此函数在 $(0, +\infty)$ 内有单增性。

50（略）

51 求下列函数的反函数

（注：读者应理解、熟习反函数的概念及求反函数的思路与关键步骤。设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $D(x)$，值域为 $Z(y)$ 且对应规则 f 是一一对应的，若 y 在 Z 内每取一个值，x 在 D 内按规则 f^{-1} 总有唯一值与之对应，则称 x 是 y 的函数，记作 $x = f^{-1}(y)$，其定义域是 $D(y)$，值域是 $Z(x)$ 且称 $x = f^{-1}(y)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数，而且将 $x = f^{-1}(y)$ 改为 $y = f^{-1}(x)$ 仍是 $y = f(x)$ 的反函数，这是按习惯的写法。

求反函数时，可将因变量 y 暂作常量，解关于自变量 x 的方程，得到 x 关于 y 的函数，再改为 y 关于 x 的函数，即所求的反函数。）

(1) 解：将函数 $y = 2x + 1$ 看作关于 x 的整式方程，按解整式方程的基本步骤，得 $x = \dfrac{y-1}{2}$，再改写成 $y = \dfrac{x-1}{2}$，即函数 $y = 2x + 1$ 的反函数。

(2) 解：将函数 $y = \dfrac{x+2}{x-2}$ 看作关于 x 的分式方程，按解分式方程的基本步骤，得 $x = \dfrac{2y+2}{y-1}$，再改写成 $y = \dfrac{2x+2}{x-1}$，即函数 $y = \dfrac{x+2}{x-2}$ 的反函数。

(3) 解：将函数 $y = x^3 + 2$ 看作关于 x 的整式方程，按解整式方程的基本步骤，得 $x = \sqrt[3]{y-2}$，再改写成 $y = \sqrt[3]{x-2}$，即函数 $y = x^3 + 2$ 的反函数。

(4) 解：将函数 $y = 1 + \lg(x+2)0$ 看作关于 x 的对数方程，按解对数方程的基本步骤得 $x = 10^{y-1} - 2$，再改成 $y = 10^{x-1} - 2$，即函数 $y = 1 + \lg(x+2)$ 的反函数。

52 ～ 54（略）

55 下列函数可看成由哪些简单函数复合而成的

（注：读者必须十分熟习所学函数的分类，名称，表记形式，及其结构的组成。不然无从学好函数的导数，微分及积分等高等数学的运算。所学的函数可分为三大类：显函数、隐函数、分段函

数。显函数主要是初等函数，初等函数又可分为三大类：基本(即最简单的)初等函数，简单的初等函数，复合的初等函数，通常简称基本函数，简单函数，复合函数。基本函数又可分为六类：常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数。其中三角函数与反三角函数，又各分为六小类：正弦与反正弦、余弦与反余弦、正切与反正切、余切与反余切、正割与反正割，余割与反余割。简单函数是由基本函数仅经过加、减、乘、除四则运算而构成的初等函数。复合函数是由基本函数仅经乘方，开方，指数的、对数的、三角的、反三角的六种运算，统称复合步骤而构成的初等函数，或由基本函数即经四则运算又经复合步骤而构成的初等函数。据此可将复合函数借用中间变量u,v,w等按复合步骤分解成几个基本函数或简单函数。读者为学好求复合函数的导数，微分以及积分，必须具备正确、熟练分解复合函数的能力。为了便于读者理解复合函数的结构，可具体表记如下：若用符号$\varphi(x)$表为某个基本函数或简单函数，则$[\varphi(x)]^a$，$\sqrt[n]{\varphi(x)}$，$a^{\varphi(x)}$，$\log_a\varphi(x)$，$\cos\varphi(x)$，$\mathrm{tg}\varphi(x)$，$\mathrm{ctg}\varphi(x)$，$\sec\varphi(x)$，$\csc\varphi(x)$，$\arcsin\varphi(x)$，$\arccos\varphi(x)$，$\mathrm{arctg}\varphi(x)$，$\mathrm{arcctg}\varphi(x)$，$\mathrm{arcsec}\varphi(x)$及$\mathrm{arccsc}\varphi(x)$分别表示由基本函数或简单函数经过乘方、开方、指数、对数、三角、反三角等六种运算而构成的里外两层的复合函数。将一个复合函数的复合步骤即复合层次，无论分为几步，分成几层，每一步，每一层或必为基本函数(六类、14个之一)，或必为由四则运算构成的简单函数。否则分法是不正确的。)

(1) 解：　由$y=\sqrt[3]{3x-1}$，令$y=\sqrt{u}$且$u=3x-1$

此函数借用一个中间变量u，可分解成一个基本幂函数$y=\sqrt{u}$和一个简单函数$u=3x-1$

或此函数可看成是由基本幂函数$y=\sqrt{u}$和简单函数$u=3x-1$复合而成的。换言之，此函数是由简单函数$3x-1$仅经一次开平方运算构成的复合函数$\sqrt{3x-1}$

(2) 解：　由$y=a\sqrt[3]{1+x}$，令$y=a\sqrt[3]{u}$且$u=1+x$

即此函数借用一个中间变量u，可分解成两个简单函数$y=a\sqrt[3]{u}$和$u=1+x$

或此函数可看成是由两个简单函数$y=a\sqrt[3]{u}$和$u=1+x$复合而成的。换言之，是由简单函数$1+x$先经开立方运算又与常量函数经乘法运算构成的复合函数$a\sqrt[3]{1+x}$

(3) 解：　由$y=(1+\ln x)^5$，令$y=u^5$且$u=1+\ln x$

即此函数借用一个中间变量u，可分解成一个基本幂函数$y=u^5$和一个简单函数$u=1+\ln x$，或此函数可看成是由基本幂函数$y=u^5$和简单函数$u=1+\ln x$复合而成的。换言之，是由简单函数$1+\ln x$仅经一次乘方运算而构成的复合函数$(1+\ln x)^5$

(4) 解：　由$y=e^{e^{-x^2}}$，令$y=e^u$且$u=e^v$且$v=-x^2$

即此函数借用两个中间变量u,v，可分解成两个基本指数函数$y=e^u$及$u=e^v$和一个简单函数$v=-x^2$，或此函数可看成是由两个基本指数函数$y=e^u$及$u=e^v$和一个简单函数$v=-x^2$经两步复合而成的。换言之，是由简单函数$-x^2$经两步取以e为底的指数运算构成的复合函数$e^{e^{-x^2}}$

(5) 解：　由$y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$，令$y=\sqrt{u}$且$u=\ln v$和$v=\sqrt{x}$

即此函数借用两个中间变量u,v，可分解成两个基本幂函数$y=\sqrt{u}$与$v=\sqrt{x}$和一个基本对数函数$u=\ln v$，或此函数可看成是由两个基本幂函数和一个基本对数函数，经两步复合而构成的。

换言之，是由基本幂函数$\sqrt{x}$，先经一步取以e为底的对数运算构成$\ln\sqrt{x}$，再经一步开

平方运算构成的复合函数$\sqrt{\ln\sqrt{x}}$

(6) 解： 由 $y=\lg^2\arccos x^3$，令 $y=u^2$ 且 $u=\lg v$ 和 $v=\arccos w, w=x^3$

即此函数借用三个中间变量 u,v,w，可分解成两个基本幂函数 $y=u^2$ 和 $w=x^3$ 及一个基本对数函数 $u=\ln v$，一个基本反余弦函数 $v=\arccos w$，或此函数可看成是由两个基本幂函数，一个基本对数函数和一个基本反余弦函数经三步复合而成的。

换言之，是由基本幂函数 x^3，第一步经反余弦运算构成 $\arccos x^3$，第二步经对数运算构成 $\lg\arccos x^3$ 第三步经乘方运算构成的复合函数 $\lg^2\arccos x^3$

56 ～ 60 (略)

习题$(B)(P_{45\sim48})$

1 ～ 2 (略)

3 选：b、d

(注：一个函数关系是由定义域和对应规则两要素所确定的。要考虑两个表达式不同的函数是否函数关系相同，只要分析决定函数关系的两要素 —— 定义域与对应规则即可，若两要素均相同，则两函数是相同的。若两要素有一个不相同，则两函数是不相同的。)

a. x 的定义域是$(-\infty,+\infty)$ 而$(\sqrt{x})^2$ 的定义域是$(0,+\infty)$，即定义域不同

b. $\sqrt{x^2}$ 的定义域是$(-\infty,+\infty)$，且 $|x|$ 的定义域也是$(-\infty,+\infty)$，即定义域相同

由 $\sqrt{x^2}=|x|$ 可知 $\sqrt{x^2}$ 与 $|x|$ 的对应规则也相同。

c. $\lg x^2$ 的 $x\neq 0$，而 $2\lg x$ 的 $x>0$，即定义域不同。

d. $\lg x^2$ 的 $x\neq 0$，且 $2\lg|x|$ 的 $x\neq 0$，即定义域相同。

由 $\lg x^2=2\lg|x|$，可知 $\lg x^2$ 与 $2\lg|x|$ 的对应规则也相同

4 选：d

令$\begin{cases}|x-5|\neq 1\\|x-5|>0\end{cases}$ 即$\begin{cases}x-5\neq\pm 1\\x-5<0 \text{ 或 } x-5>0\end{cases}$ 即 $x\neq 4$ 或 5 或 6

∴ 此函数的定义域是$(-\infty,4)\cup(4,5)\cup(5,6)\cup(6,+\infty)$

5 (略)

6 选：a

(一) 设 $x-1=u$，得 $x=u+1$ 将之代入 $f(x-1)=x(x-1)$

得 $f(u)=(u+1)u$，再改写成 $f(x)=(x+1)x$

(二) 由 $f(x-1)=x(x-1)=(x-1+1)(x-1)$，得 $f(x)=(x-1)x$

7 (略)

8 选：b、c

9 选：a、b、c、d

a. $f(-x)=\dfrac{|-x|}{-x}=-\dfrac{|x|}{x}=-f(x)$

b. $f(-x)=(-x)^2\sin(-x)=-x^2\sin x=-f(x)$

c. $f(-x)=\dfrac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}=\dfrac{\frac{1}{a^x}-1}{\frac{1}{a^x}+1}=\dfrac{1-a^x}{1+a^x}=-\dfrac{a^x-1}{a^x+1}=-f(x)$

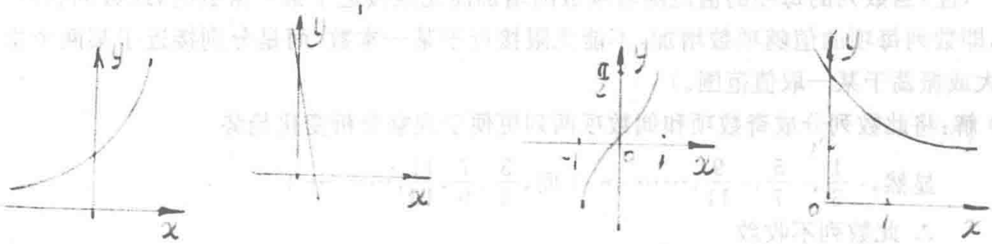
d. $f(-x)=\log_a(\sqrt{(-x)^2+1}-x)=\log_a\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\log_a(\sqrt{x^2+1}+x)^{-1}$

$= -\log_a(\sqrt{x^2+x}+x) = -f(x)$

10 ～ 11（略）

12 选：a,b,c,d

分析各函数图形的升降状态，可知四个函数都有单调性



13（略）

14 选：d

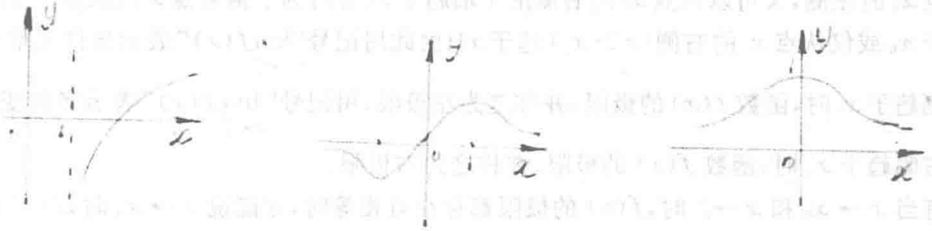
分析此函数图形（图示如下）在各区间上的状态，可知此函数在(2,3)内有界

15 选：b,d

分析此函数图形（图示如下）的状态，可知与原点对称，介于两水平直线 $y=1$ 与 $y=-1$ 之间，在 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ 内下降而在(-1,1)内上升，即此函数有奇性，有界，无单调性

16 选：a,d

因为此函数图形（图示如下）与 y 轴对称，介于两水平直线 $y=1$ 与 x 轴之间，在 $(-\infty,0)$ 内上升，在 $(0,+\infty)$ 内下降，即此函数有偶性，有界，无单调性。



17 选：b、d

a. 此函数是基本指数函数；

b. 此函数是由简单函数 $y=e^v, v=-\sqrt{u}$ 与 $u=1+\sin x$ 复合而成的；

c. 我们所学的函数都是单值对应的关系，而表达式 $y=\sqrt{-(1+x^2)}$ 中的 x 无论取何值，y 都没有确定的值与之对应，没有单值对应的关系，不是函数的表达式；

d. 函数是由简单函数 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=-x$ 复合而成的

18 选：a,c

因为 b 是分段函数，d 根本不是单值对应的函数。

第二章　极限与连续

习题(A)($P_{88\sim95}$)

1 ～ 2(略)

3 用观察法判断下列数列是否收敛

（注：当数列的每项的值能随着项数的增加而无限接近于某一常数时，此数列收敛。否则不收敛，即数列每项的值随项数增加，不能无限接近于某一常数，而是分别接近于某两个常数或无限增大或振荡于某一取值范围。）

(1) 解：将此数列分成奇数项和偶数项两列更便于观察分析变化趋势

显然，$-\frac{1}{3},-\frac{5}{7},-\frac{9}{11},\cdots\cdots\to -1$ 而，$\frac{3}{3},\frac{7}{9},\frac{11}{13},\cdots\cdots\to 1$

∴ 此数列不收敛

(2) 解：∵ 此数列的奇数项为 $1,\frac{1}{3},\frac{1}{5},\cdots\cdots\to 0$，而偶数项为 $\frac{3}{2},\frac{5}{4},\frac{7}{6},\cdots\cdots\to 1$

∴ 此数列不收敛

(3) 解：∵ 此数列的奇数项为 $0,0,0,\cdots\cdots\to 0$，且偶数项为 $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\cdots\cdots\to 0$

∴ 此数列收敛

4(略)

5 （注：记号“$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$”表示当自变量 x 趋于 x_0 时，函数 $f(x)$ 的极限。而且 x 是以任意方式趋于 x_0 的，其几何意义是：x_0 是 x 轴上的某一点，x 是点 x_0 的左侧或右侧的任意点，$x\to x_0$ 即点 x 即可以从点 x_0 的左侧，又可以从点 x_0 的右侧沿 x 轴趋于 x_0 有时为了需要点 x 仅从点 x_0 的左侧($x<x_0$)趋于 x_0 或仅从点 x_0 的右侧($x>x_0$)趋于 x_0。由此用记号“$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$”表示当自变量 x 仅从点 x_0 的左侧趋于 x_0 时，函数 $f(x)$ 的极限，并称之为左极限。用记号“$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$”表示当自变量 x 仅从点 x_0 的右侧趋于 x_0 时，函数 $f(x)$ 的极限，并称之为右极限。

只有当 $x\to x_0^-$ 和 $x\to_0^+$ 时，$f(x)$ 的极限都存在且相等时，才能说 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 的极限存在。读者应理解、熟习以上的极限内容，并严格书写左，右极限的表记符号，在求分段函数在分段点处的极限就要用到左、右极限。）

解：当 $x<3$ 时，$f(x)=x$，当 $x>3$ 时，$f(x)=3x-1$

∴ $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}x=3$ 而 $\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(3x-1)=8$

由 $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)$，可知 $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$ 不存在。

6 证：∵ $\frac{|x|}{x}=\begin{cases}-1 & x<0\\ 1 & x>0\end{cases}$

∴ $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}(-1)=-1$ 而 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}1=1$

由 $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}\neq\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}$，可知 $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}$ 不存在。

7 （注：读者应熟习无穷小量、无穷大量的定义，即以零为极限的变量，称之为无穷小量(即在某个变化过程中，无限趋于零的变量)，而以无穷大 ∞ 为所谓极限的变量，称之为无穷大量，即在某个变化过程中，绝对值无限增大的变量）

解：由$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2}=\infty$，可知$\dfrac{1}{(x-1)^2}$在$x\to 1$时是无穷大量；

由$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{(x-1)^2}=0$，可知$\dfrac{1}{(x-1)^2}$在$x\to\infty$时是无穷小量。

8 ～ 9（略）

10 求下列极限

(1) 解：$\lim\limits_{x\to -2}(3x^2-5x+2)=3(\lim\limits_{x\to -2}x)^2-5\lim\limits_{x\to -2}x+\lim\limits_{x\to -2}2=3\cdot(-2)^2-5\cdot(-2)+2=24$

(2) 解：$\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^4+x^2+1}=\dfrac{(\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}x)^2-\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}3}{(\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}x)^4+(\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}x)^2+\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}1}=\dfrac{(\sqrt{3})^2-3}{(\sqrt{3})^4+(\sqrt{3})^2+1}=0$

(3) 解：$\lim\limits_{x\to 0}(1-\dfrac{2}{x-3})=\lim\limits_{x\to 0}1-\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}2}{\lim\limits_{x\to 0}x-\lim\limits_{x\to 0}3}=1-\dfrac{2}{0-3}=1\dfrac{2}{3}$

（注：以上三题是用已知极限($\lim\limits_{x\to x_0}C=C$和$\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$)以及极限的四则运算法则(若$\lim u(x)$和$\lim v(x)$均存在，则$\lim[u(x)\pm v(x)]=\lim u(x)\pm\lim v(x)$，$\lim[u(x)\cdot v(x)]=\lim u(x)\cdot\lim v(x)$，特别地$\lim[ku(x)]=k\lim u(x)$，$\lim[u(x)]^a=[\lim u(x)]^a$及$\lim\dfrac{u(x)}{v(x)}=\dfrac{\lim u(x)}{\lim v(x)}(\lim v(x)\neq 0)$特别地$\lim\dfrac{u(x)}{k}=\dfrac{1}{k}\lim u(x)$，$\lim\dfrac{k}{u(x)}=\dfrac{k}{\lim u(x)}$)计算的，读者应理解熟习如下的极限，存在的：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to -\infty}e^x=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$，$\lim\limits_{x\to -\infty}\operatorname{arctg}x=-\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to +\infty}\operatorname{arctg}x=\dfrac{\pi}{2}$，……。以及不存在的：$\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$，$\lim\limits_{x\to +\infty}e^x=\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$，$\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$(振荡型的不存在)$\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$(振荡型的不存在)，$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}x=\infty$，……)

(4) 解：$\because\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-3}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}x-2}{(\lim\limits_{x\to 2}x)^2-3}=\dfrac{2-2}{2^2-3}=0$　$\therefore x\to 2$时，$\dfrac{x-2}{x^2-3}$为无穷小量

$\therefore x\to 2$时，$\dfrac{x^2-3}{x-2}$为无穷大量，$\therefore\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3}{x-2}=\infty$

（注：此极限是用无穷小量与无穷大量互为倒数的关系确定的。

(5) ～ (17) 题均属$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式，这些极限的计算应先经过某些变换；如：多项式的因式分解，无理分式的分子或分母的有理化、分式的约分，整式的除法等，有时这些变换很繁索，若用罗必达法则（第四章将介绍）则很简练。读者可在学习罗必达法则后，再做这些题。其中(10) ～ (14)题，还可用如下结论：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}0 & n<m\\ \dfrac{a_0}{b_0} & n=m\\ \infty & n>m\end{cases}\quad\text{直接确定)}$$

(18) 解：$\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{1}{1-x})=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3-(1+x+x^2)}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-x)(2+x)}{(1-x)(1+x+x^2)}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2+x}{1+x+x^2}=1$$

(19) 解：$\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1})$(提示：看作分母为1的分式，并有理化分子)

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x})^2}+\sqrt{1-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x})^2}} = \frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = 1$$

(20) 解：$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{(x+p)(x+q)}-x) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+(p+q)x+pq}-x}{1}$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(p+q)x+pq}{\sqrt{x^2+(p+q)x+pq}+x} = \frac{1}{2}(p+q)$$

(21) 解：$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}+\dfrac{n}{n^2}) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}(1+n)n}{n^2} = \dfrac{1}{2}$

(22) 解：$\because \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x^3+x} = 0$，　即 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{x^2+1}{x^3+x}$ 是无穷小量，又 $x\to\infty$ 时，$\cos x$ 虽无极限但有界。

由无穷小量与常量之积仍是无穷小量，无穷小量与有界变量之积仍是无穷小量，无穷小量之和仍是无穷小量，以及无穷小量的极限为 0 等，可知

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^3+x}(3+\cos x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^3+x}\cdot 3 + \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^3+x}\cos x = 0+0 = 0$$

11 解：$\because f(x) = \sqrt{x}$，$\therefore f(x+h) = \sqrt{x+h}$

$$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

12 解：$\because \lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0}(3x+2) = 2$ 而 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0}(x^2+1) = 1$，

由 $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to0^+} f(x)$，可知 $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ 不存在

又 $\because \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-}(x^2+1) = 2$ 且 $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2}{x} = 2$

由 $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} f(x)$，可知 $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ 存在

13 解：由 $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x^2} = \infty$，可知 $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ 不存在

又 $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^-}(x^2-2x) = 0$ 且 $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+}(3x-6) = 0$，由 $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+} f(x) = 0$，可知 $\lim\limits_{x\to2} f(x) = 0$

14（略）

15 （注：读者应理解，熟习无穷小量阶的概念：当 $\lim u(x) = 0$，$\lim v(x) = 0$ 时，若 $\lim\dfrac{u(x)}{v(x)} = 0$，则 $u(x)$ 比 $v(x)$ 的阶高。若 $\lim\dfrac{u(x)}{v(x)} = k(\neq 0)$，则 $u(x)$ 与 $v(x)$ 的阶相同。若 $\lim\dfrac{u(x)}{v(x)} = 1$，则 $u(x)$ 与 $v(x)$ 不仅同阶而且等价，若 $\lim\dfrac{u(x)}{v(x)} = \infty$，则 $u(x)$ 比 $v(x)$ 的阶低。）

解：$\because \lim\limits_{x\to3}(x-3) = 0$，即 $x\to3$ 时，$x-3$ 是无穷小量，又 $\because \lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-2x+k}{x-3} = 4$，

想必 $x\to3$ 时，x^2-2x+k 应是无穷小量，即 $\lim\limits_{x\to3}(x^2-2x+k) = 3+k = 0$ 即 $k = -3$

(若 $x \to 3$ 时,$x^2 - 2x + k$ 不是无穷小量,即$\lim\limits_{x\to 3}(x^2 - 2x + k) \neq 0$,因而$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2 - 2x + k}{x - 3} = \infty$ 与已知矛盾。)

$\therefore \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2 - 2x + k}{x - 3} = 4$ 时,$k = -3$

16 解:$\because \lim\limits_{x\to 1}(1 - x) = 0$,即 $x \to 1$ 时,$1 - x$ 是无穷小量。又 $\because \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2 + ax + b}{1 - x} = 5$,

想必 $x \to 1$ 时,$x^2 + ax + b$ 应是无穷小量,即$\lim\limits_{x\to 1}(x^2 + ax + b) = 1 + a + b = 0$,

即 $b = -a - 1$,将之代入 $x^2 + ax + b$,得 $x^2 + ax - a - 1 = (x - 1)(x + 1 + a)$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2 + ax + b}{1 - x} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x - 1)(x + 1 + a)}{1 - x} = -\lim\limits_{x\to 1}(x + 1 + a) = -(2 + a) = 5$,

即 $a = -7$,将 $a = -7$ 代入 $b = -a - 1$,得 $b = 6$

17 (注:读者应理解,熟习结论$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m} = \begin{cases} 0 & n < m \\ \dfrac{a_0}{b_0} & n = m \\ \infty & n > m \end{cases}$)

解:由$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2 + 1 - ax(x + 1) - b(x + 1)}{x + 1}$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1 - a)x^2 - (a + b)x + 1 - b}{x + 1} = 0$

且分母中 x 的最高次方为 1,可知分子中 x 的最高次方应为 0,因此令含 x^2 的系数 $1 - a = 0$,即 $a = 1$,含 x 的系数 $-(a + b) = 0$,即 $b = -a = -1$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b\right) = 0$ 时,$a = 1, b = -1$

18 解:$\because f(x) = \dfrac{px^2 - 2}{x^2 + 1} + 3qx + 5 = \dfrac{3qx^3 + (p + 5)x^2 + 3qx + 3}{x^2 + 1}$

当 $x \to \infty$ 时,$f(x)$ 为无穷小量,即$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3qx^3 + (p + 5)x^2 + 3qx + 3}{x^2 + 1} = 0$

想必 $3q = 0$,即 $q = 0$ 且 $p + 5 = 0$,即 $p = -5$

当 $x \to \infty$ 时,$f(x)$ 为无穷大量,即$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3qx^3 + (p + 5)x^2 + 3qx + 3}{x^2 + 1} = \infty$

想必 $3q \neq 0$,即 $q \neq 0$,而 $p + 5$ 的取值不受限制,即 p 任意。

$\therefore$ 当 $x \to \infty$ 且 $p = -5, q = 0$ 时,$f(x) = \dfrac{px^2 - 2}{x^2 + 1} + 3qx + 5$ 为无穷小量,而 p 任意取值,$q \neq 0$ 时,$f(x) = \dfrac{px^2 - 2}{x^2 + 1} + 3qx + 5$ 为无穷大量。

19 当 $x \to 0$ 时,比较下列的无穷小量与 x 阶的高低。

(1) 解:由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3 + 1000x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}(x^2 + 1000) = 1000$

可知 $x \to 0$ 时,无穷小量 $x^3 + 1000x$ 与 x 的阶相同。

(2) 解:由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}} = 1$

可知 $x \to 0$ 时,无穷小量 $\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}$ 与 x 同阶等价。

20 求下列极限

(注:读者应熟记极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ 及其变形$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\sin x = 1$,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x} = 1$,还应将$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} =$

1,扩大理解为 $\lim\limits_{\varphi(x)\to0}\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$)

(1) 解: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tg x-\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{\sin x}{x\cos x}-\dfrac{\sin x}{x})=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\cos x}-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1-1=0$

(2) 解: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x}{\sin3x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\cdot3x\cdot\sin2x}{2\cdot2x\cdot\sin3x}=\dfrac{2}{3}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x}{2x}\cdot\lim\limits_{3x\to0}\dfrac{3x}{\sin3x}=\dfrac{2}{3}\times1\times1=\dfrac{2}{3}$

或 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x}{\sin3x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{3x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}$

(注:此解法用的是无穷小量的等价性,即当 $\lim u(x)=0$, $\lim v(x)=0$ 且 $\lim\dfrac{u(x)}{v(x)}=1$ 时,$u(x)$ 与 $v(x)$ 等价,记作 $u(x)\sim v(x)$ 且有 $\lim u(x)=\lim v(x)$。因而,由 $\lim\limits_{x\to0}\sin x=0$, $\lim\limits_{x\to0}x=0$ 且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,可知 $\lim\limits_{x\to0}\sin x=\lim\limits_{x\to0}x$,进而由:

$\lim\limits_{\varphi(x)\to0}\sin\varphi(x)=0$, $\lim\limits_{\varphi(x)\to0}\varphi(x)=0$ 且 $\lim\limits_{\varphi(x)\to0}\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$,可知 $\lim\limits_{\varphi(x)\to0}\sin\varphi(x)=\lim\limits_{\varphi(x)\to0}\varphi(x)$)

(3) 解: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\dfrac{\sin x}{x}}{1+\dfrac{\sin x}{x}}=\dfrac{1-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}}{1+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}}=\dfrac{1-1}{1+1}=0$

(4) 解: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\arcsin x}{3x}\xlongequal[x=\sin u]{\arcsin x=u}\lim\limits_{u\to0}\dfrac{2u}{3\sin u}=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{u\to0}\dfrac{u}{\sin u}=\dfrac{2}{3}\times1=\dfrac{2}{3}$

(5) 解: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tg x-\sin x}{\sin^3x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{\sin^3x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{\cos x}-1}{\sin^2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1-\cos x}{\cos x}}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{\cos x}}{(1+\cos x)}=\dfrac{1}{2}$

21 求下列极限

(注:读者应熟记极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$ 及其变形 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$,还应扩大理解为 $\lim\limits_{\varphi(x)\to\infty}[1+\dfrac{1}{\varphi(x)}]^{\varphi(x)}=e$ 与 $\lim\limits_{\varphi(x)\to0}[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}=e$,还应熟习幂的指数运算法则,如 $a^{m\cdot n}=(a^m)^n$ 或 $(a^n)^m$, $a^{n+m}=a^m\cdot a^n$, $a^{m-n}=\dfrac{a^m}{a^n}$, $(ab)^n=a^n\cdot b^n$, $(\dfrac{a}{b})^n=\dfrac{a^n}{b^n}$,及对数运算法则,如

$\log_am+\log_an=\log_a(mn)$, $\log_am-\log_an=\log_a\dfrac{m}{n}$, $\log_am^n=n\log_am$, $\log_a\sqrt[n]{m}=\dfrac{1}{n}\log_am$, $\cdots$)

(1) 解(一): $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{2}{x})^{2x}\xlongequal[x=\frac{2}{u}]{\frac{2}{x}=u}\lim\limits_{u\to0}(1+u)^{\frac{4}{u}}=\lim\limits_{u\to0}[(1+u)^{\frac{1}{u}}]^4=[\lim\limits_{u\to0}(1+u)^{\frac{1}{u}}]^4=e^4$

解(二): $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{2}{x})^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{\frac{x}{2}})^{\frac{x}{2}\cdot4}=[\lim\limits_{\frac{x}{2}\to\infty}(1+\dfrac{1}{\frac{x}{2}})^{\frac{x}{2}}]^4=e^4$

或 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{2}{x})^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{2}{x})^{\frac{x}{2}\cdot4}=[\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{2}{x})^{\frac{x}{2}}]^4=e^4$

(2) 解(一): $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{2}{x})^{\frac{x}{2}-1}\xlongequal[\frac{x}{2}=-\frac{1}{u}]{-\frac{2}{x}=u}\lim\limits_{u\to0}(1+u)^{-\frac{1}{u}-1}=\lim\limits_{u\to0}[(1+u)^{-\frac{1}{u}}(1+u)^{-1}]$

$=\lim\limits_{u\to0}(1+u)^{-\frac{1}{u}}\cdot\lim\limits_{u\to0}(1+u)^{-1}=[\lim\limits_{u\to0}(1+u)^{\frac{1}{u}}]^{-1}\cdot1=e^{-1}$