

中学各科
重点难点基点

初中代数

最新版·一年级用



李申榜
主编

 湖南师范大学出版社

中 学 数 学

重点 难点 基点

初中代数第一册(一年级全年用)

主编 李申榜

(上)

分册主编 贺家勇

编 者 朱彩英 郭凌云
周义成

(下)

分册主编 曾小平

编 者 廖建杰 张晓云
曾小平

湖南师范大学出版社

【湘】新登字 011 号

中学数学重点难点基点

初中代数第一册(一年级全年用)

主 编 李申榜

责任编辑 李 琪

湖南师范大学出版社出版发行

(长沙市岳麓山)

湖南省新华书店经销 湖南师范大学印刷厂印刷

787×1092 32 开 10.625 印张 248 千字

1996 年 7 月第 1 版 1997 年 5 月第 4 次印刷

印数:33201—43250 册

ISBN7-81031-500-5/G·214

定价:9.20 元

本书若有印装质量问题,请直接与印刷厂联系调换

前 言

本套丛书作为中学生课程辅导读物,旨在配合中学数学教师帮助学生更好地理解、消化教材的重点内容,掌握教材中渗透的最基本的数学思想方法,起到落实“双基”、培养能力的作用.

我们根据多年从事教学、教研实践所积累的经验,依照“义务教育三年制初级中学”新版教材的章节顺序,从教学重点、自学难点、训练基点三个方面进行了深入的挖掘.“教学重点”根据数学教学大纲精神表列了知识点和应达到的认知层次,图解了本单元的知识结构,并对要点进行了简要分析;“自学难点”针对学生在学习过程中概念的模糊处、知识的难懂处、应用的易错处进行了深入浅出的辅导讲解;“训练基点”对本单元知识的应用进行了归类,例举了题型,并提供了巩固本单元知识的若干训练题和形成性测试题.每章之后配有一套总结性测试题,用以反馈教与学的信息.训练题、测试题的答案附书后.

本书存在的缺点和错误,诚望师生批评指正.

主编者

1995年9月

目 录

(上)

第一章 代数初步知识.....	(1)
第二章 有理数	(31)
第一节 有理数的意义	(31)
第二节 有理数的运算	(57)
第三章 整式的加减.....	(104)
第四章 一元一次方程.....	(131)
提示与参考答案.....	(182)

(下)

第五章 二元一次方程组.....	(193)
第六章 一元一次不等式和一元一次不等式组.....	(224)
第七章 整式的乘除.....	(252)
第一节 整式的乘法.....	(252)
第二节 乘法公式.....	(282)
第三节 整式的除法.....	(298)
提示与参考答案.....	(318)

第一章 代数初步知识

【教学重点】

一、教学目标

节次	知识要点	认知层次		
		了解	理解掌握	熟练运用
1.1 代数式	用字母表示数		✓	
	认识代数式及书写格式	✓		
	说出一个代数式所表示的数量关系			✓
1.2 列代数式	代数式的意义	✓		
	列代数式			✓
1.3 代数式的值	代数式的值的概念	✓		
	求代数式的值的方法		✓	
	求代数式的值			✓
1.4 公式	公式与代数式的区别及联系	✓		
	利用公式解简单的实际问题			✓
	导出简单公式			✓
1.5 简易方程	方程与代数式的区别及联系	✓		
	方程的概念	✓		
	解简易方程			✓
	利用简易方程解应用题			✓

二、内容剖析

(一) 知识结构



(二) 要点分析

本章学习代数式、公式、简易方程等知识,既是对小学数学知识的复习、巩固和提高,又是为学习后面的数学知识作准备的.虽然这些内容难度不很大,但同学们切不可掉以轻心,务必掌握好,力求运用自如.

1. 关于代数式

(1) 用字母表示数是从算术过渡到代数的桥梁,它的主要作用有:

① 可以表示数的共同性质,揭示运算的普遍规律.如 $5+3=3+5$,只表示 5 和 3 具有加法的交换律,而 $a+b=b+a$,则可以表示我们学过的任何数都具有加法的交换规律.

② 用字母表达计算公式,能简单明了地表达数量关系.如 S

$=\frac{1}{2}ah$,表示三角形的底、高和面积之间的数量关系,它是计算一切三角形面积的通用公式.如果用语言叙述不仅十分冗长,而且容易含混不清.

可见,用字母表示数具有简明、普遍的优越性.

(2)代数式是用基本的运算符号(包括加、减、乘、除,以及以后学习的乘方、开方)把数、表示数的字母连结而成的式子.单独一个数或一个字母也是代数式.说出一个代数式所表示的数量关系,没有统一规定,以简明而又不致引起误会为标准.

2. 关于列代数式

(1)列代数式是本章学习的重点,学好这部分内容的关键是正确理解数量关系以及分析和把握实际问题中各种量的关系.

(2)把语言叙述的数量关系“翻译”成代数式,基本要求是:首先理解数量关系,而数量关系体现在“和、差、倍、分、大、小、几倍、几分之几”等关键词语;其次是运算的顺序;其三是正确使用括号.

(3)数学中常用的语言必须熟悉和掌握,如, a 与 b 的和的平方、立方,应写成 $(a+b)^2$ 、 $(a+b)^3$; a 与 b 的差的平方、立方,应写成 $(a-b)^2$ 、 $(a-b)^3$; a 与 b 的平方和、立方和,应写成 a^2+b^2 、 a^3+b^3 ; a 与 b 的平方差、立方差,应写成 a^2-b^2 、 a^3-b^3 .

3. 关于代数式的值

(1)代数式的值是用数值代替代数式里的字母,按照代数式指明的运算计算出来的结果.代数式的值随着代数式里的字母取值不同而发生改变.也就是说,一个代数式不只一个值,而是有无穷多个值.但是当代数式里的字母取值确定之后,代数式的值也就确定了.

(2)代数式里的字母虽然可以取各种不同的数值,但这些数值不应使代数式和它所表示的实际数量关系失去意义.如 $S = \frac{1}{2}ah$ 是已知三角形的底及底边上的高,求三角形的面积和公式, a 、 h 的取值显然不能为零.

(3)求代数式的值的方法:一是代入,二是计算.在计算时,要注意按代数式指明的运算进行.也就是说,在求代数式的值时,一定要弄清运算的符号和运算的顺序.

(4)如果列代数式是从特殊到一般,那么求代数式的值就可以看成是由一般到特殊,我们要认真领会这种特殊与一般的辩证思想.

4. 关于公式

(1)一般常用的基本数量关系,往往写成公式,以便应用.公式和代数式既有区别又有联系.公式可以看成是运用代数式的知识,用字母表示某个等量关系而得到的式子,一般来说是含几个字母的等式.代数式本身没有等号,只是用字母表示某个数量关系而得到的式子.用公式进行具体计算时,需要用到求代数式的值的知识.

(2)简单的公式可以从反映数量关系的一些数据(如数据表)中分析出来.本章例题、习题中,所给的数据一般可归纳为正比例、反比例关系.有的公式也可以推导出来.如以后学习的乘法公式,就是由运算推导出来的,有的物理、化学公式,可以通过实验推导出来,有的公式可由数学归纳法推出来.

5. 关于简易方程

(1)简易方程是仅限于不用合并同类项、去括号、移项就能解出来的方程.通过简易方程的学习,一方面可使我们对代数有

一个初步而比较全面的认识,因为方程是代数中的一个重要内容.另一方面,打好简易方程的知识基础,也有助于后面几章的学习.

(2)简易方程的解法有两种,一是用加与减,乘与除的逆运算关系来解.二是用代数方法来解.中学所用的都是代数解法.代数解法一般有两种:一是方程的两边都加上(或减去)同一个适当的数;二是方程的两边都乘以(或除以)同一个适当的数.解简易方程不要求检验,但解完后自己要检验有没有错误.方程的解的检验实际上就是求代数式的值的问题.

【自学难点】

一、模糊处

1. 用字母表示数时,首先必须指明字母表示数的范围.在同一个问题中,不同的数要用不同的字母表示,相同的字母必须表示相同的量;但在不同的问题中,相同的字母可以表示不同的量.

2. 单独一个数或一个字母,虽然没有涉及到运算,但可以看作该数或字母乘以(或除以)1. 所以,单独一个数或一个字母也是代数式.

3. 把用语言叙述的数量关系“翻译”成代数式时,一般是“先读先写,后读后写”,并要注意运算的顺序和括号的使用.如用代数式表示: a 的 $\frac{1}{4}$ 与 b 的 $\frac{2}{3}$ 的和,先分析数量关系, a 的 $\frac{1}{4}$ 就是 $\frac{1}{4}a$, b 的 $\frac{2}{3}$ 就是 $\frac{2}{3}b$,再分析运算的顺序.根据先乘后加,故用加号连结得: $\frac{1}{4}a + \frac{2}{3}b$.又如 a 的2倍与 b 的和乘以 a 的2倍与 b

的差,先分析数量关系得 $2a+b$, $2a-b$,再分析运算顺序,得 $(2a+b)(2a-b)$.

4. 把代数式“翻译”成用语言来叙述的数量关系时,一般是“先算先读,后算后读”.如代数式 $(a+b)n^2$,应叙述为: a 、 b 的和与 n 平方的积,不要读作 a 、 b 与 n 平方的积的和.

5. 代数式、公式、简易方程是三个完全不同的概念,但它们又有密切的联系.一般说来,公式是一个等式,等号的两边都是代数式.简易方程也是等式,只是这个等式中含有待求的未知数.列方程解应用题的要领是:先设未知数,然后用代数式表示有关的量,再找出题中的等量关系,列出方程.从形式上看,公式和方程含有等号,而代数式没有等号,三者切不可混淆.

二、难懂处

1. 用字母表示数,体现了由特殊到一般的数学抽象.由确定的数过渡到字母表示数,引进代数式,这是数学发展史上的一次飞跃.我们初次接触这些知识,可能一时难以掌握,必须反复练习,不断深化.

2. 对于初学者来说,把语言表述的简单数量关系列成代数式,是比较困难的.主要是数量之间的关系把握不准,运算的先后顺序难以确定.必须进行由易到难、由简到繁的反复练习,掌握列代数式的方法.能正确地列出代数式,对今后几章的学习是非常重要的.

3. 列简易方程解应用题,初学者也会遇到困难,主要是:①不习惯用代数方法分析实际问题;②不容易找出题中的相等关系;③找出相等关系后不会列方程.

三、易错处

1. 引进字母后,要注意书写格式,一是字母与字母相乘,“乘

号”可以省略不写；数字与字母相乘，“乘号”也可以省略不写，但数字要写在字母的前面，如 $4 \times a$ 要写成 $4a$ ，不能写成 $a4$ 。二是带分数与字母相乘，如果省略乘号，一定要把带分数化成假分数。如 $2\frac{1}{3}abc$ ，一定要写成 $\frac{7}{3}abc$ （或 $\frac{7abc}{3}$ ）。三是数与数相乘，不能省略乘号。如 5×3 ，不能写成 53 。

2. 用字母表示数来列代数式时，如果所列的式子中，有除的关系，一般要写成分数形式。如 $a、b$ 的积除以 4，应写成 $\frac{ab}{4}$ ，不要写成 $ab \div 4$ ；列代数式时不写单位名称，单位名称在答案中写出来。如果结果是加、减关系，必须把式子用括号括起来。再写单位。如 $(a+b)$ 千克，不能写成 $a+b$ 千克。

3. 求代数式的值，一定要先用给定的数值代替代数式中的相应字母，再按代数式规定的运算顺序进行计算，才能计算出正确结果。

【训练基点】

一、题型例举

(一) 代数式

例 1 用代数式表示：

(1) a 与 b 的差；(2) b 的 $\frac{3}{5}$ ；(3) x 除以 5 的商；(4) x 乘以 y 的积；(5) y 的立方；(6) x 的倒数。

解：(1) $a-b$ ；(2) $\frac{3}{5}b$ ；(3) $\frac{x}{5}$ ；(4) xy ；(5) y^3 ；(6) $\frac{1}{x}$ 。

注 (1) 把 a 看成被减数， b 看成减数；(2) 数字与字母相乘，数字应写在字母的前面；(3) 字母与字母相乘，乘号可以省略；(4) 表示商的式子一般写成分数形式。

例2 说出下列代数式的意义

(1) $4a-b$; (2) $\frac{1}{2}(x+y)$; (3) a^2+2b ; (4) $\frac{a}{xy}$; (5) $(a+b)m^2$.

解: (1) $4a-b$ 的意义是 $4a$ 减去 b , 或 $4a$ 与 b 的差;

(2) $\frac{1}{2}(x+y)$ 的意义是 x, y 两数的和的 $\frac{1}{2}$, 或 $\frac{1}{2}$ 与 $(x+y)$ 的积;

(3) a^2+2b 的意义是 a 平方与 b 的 2 倍的和, 或 a 平方加上 b 的 2 倍;

(4) $\frac{a}{xy}$ 的意义是 a 除以 x, y 两数的积的商, 或 a 比 x, y 的积;

(5) $(a+b)m^2$ 的意义是 a, b 的和与 m 平方的积, 或 a, b 的和乘以 m 平方的积.

注 代数式的读法: 一种是按运算关系读, 如 $x+5$ 读作 x 加 5; 一种是按运算的结果来读, 如 $x+5$ 读作 x 与 5 的和.

例3 用字母表示数的运算律.

(1) 加法交换律; (2) 加法结合律;

(3) 乘法交换律; (4) 乘法结合律;

(5) 分配律.

解: a, b, c 表示三个数 (1) $a+b=b+a$; (2) $(a+b)+c=a+(b+c)$; (3) $ab=ba$; (4) $(ab)c=a(bc)$; (5) $(a+b)c=ac+bc$.

例4 用代数式表示:

(1) 某校学生总人数为 a 人, 男生占其中的 25%, 男生有多少人?

(2) 王红比张洁小 4 岁, 当王红 a 岁时, 张浩多少岁?

(3) 圆半径 rcm , 圆周长是多少?

(4) a 千克的面粉售价 6 元, 1 千克的面粉售价多少元?

解: (1) 男生有 $52\%a$ 人; (2) 张洁 $(a+4)$ 岁;

(3) 圆周长为 $2\pi r$ cm; (4) 1 千克面粉售价 $\frac{6}{a}$ 元.

注 (1) 如果和、差表示结果, 必须用括号括起来, 再写单位;

(2) 如果结果是积、商的关系, 单位直接写在结果后面.

例 5 指出下列每组代数式的意义有什么不同.

(1) $\frac{1}{3}m+n$ 与 $\frac{m+n}{3}$; (2) a^2+b^2 与 $a+b^2$;

(3) $(\frac{x}{y})^2$ 与 $\frac{x}{y^2}$.

解: (1) $\frac{1}{3}m+n$ 的意义是 m 的 $\frac{1}{3}$ 与 n 的和; $\frac{m+n}{3}$ 的意义是 m 、 n 的和的 $\frac{1}{3}$; (2) a^2+b^2 的意义是 a 、 b 的平方和; $a+b^2$ 的意义是 a 与 b 平方的和; (3) $(\frac{x}{y})^2$ 是 x 除以 y 的商的平方; $\frac{x}{y^2}$ 是 x 除以 y 平方的商.

注 以上各题主要是运算的顺序不同.

(二) 列代数式

例 1 设甲数是 x , 用代数式表示乙数.

(1) 乙数比甲数少 7;

(2) 乙数比甲数的 4 倍多三分之一;

(3) 乙数比甲数多 30%;

(4) 乙数是甲数的立方的 3 倍;

(5) 乙数比甲数的倒数大 4;

(6) 乙数是甲数的平方的四分之一.

解: (1) $x-7$; (2) $4x+\frac{1}{3}$; (3) $x+30\%x$; (4) $3x^3$;

(5) $\frac{1}{x}+4$; (6) $\frac{1}{4}x^2$.

注 对于题目中的“多”、“少”、“倍”、“大”、“小”、“几分之几”等必须理解清楚,并掌握它们与“加”、“减”、“乘”、“除”、“平方”、“立方”之间的关系.

例 2 设甲数为 a , 乙数为 b , 用代数式表示: (1) 甲、乙两数差的 $\frac{1}{3}$; (2) 甲数的立方与乙数的 3 倍的差; (3) 甲、乙两数平方和减去甲、乙的两数和的平方; (4) 甲、乙两数的差除以甲、乙两数的和; (5) 甲数的 $\frac{1}{3}$ 与乙数的 $\frac{1}{4}$ 的和.

解: (1) $\frac{1}{3}(a-b)$; (2) a^3-3b ;

(3) $(a^2+b^2)-(a+b)^2$; (4) $\frac{a-b}{a+b}$;

(5) $\frac{1}{3}a+\frac{1}{4}b$.

注 根据给定数量关系列代数式, 必须注意运算顺序, 遵循“先读先写, 后读后写”的原则. 同时要正确的使用括号. 如 a 、 b 的平方和与 a 、 b 的平方的差: 先写 a 、 b 的平方和 a^2+b^2 , 再写 a 、 b 和的平方 $(a+b)^2$, 再把这两个代数式看成两个整体, 用括号括起来, 最后写出它们的差 $(a^2+b^2)-(a+b)^2$.

对于复杂的代数式, 可以采取填括号的办法, 先根据最后的结果列出式子, 然后逐步填括号. 如, 用代数式表示: 甲数为 x , 乙数为 y , 甲、乙两数的立方和的 2 倍减去甲、乙两数差的平方的 $\frac{1}{2}$.

第一步:由题意可知,这个代数式最后结果是差的形式,由此可得: $[\quad]-[\quad]$;

第二步:由题意可知,这个差是立方和的2倍,减去差的平方的 $\frac{1}{2}$,于是又有:

$$2[(\quad)^3+(\quad)^3]-\frac{1}{2}[(\quad)-(\quad)]^2;$$

第三步:由题意可知,这个立方和是甲、乙两数的立方和,这个平方是甲、乙两数差的平方,于是按要求将 x 、 y 填入括号,

$$\text{得: } 2[(x)^3+(y)^3]-\frac{1}{2}[(x)-(y)]^2;$$

第四步:去掉不必要的括号,得到所求的结果: $2(x^3+y^3)-\frac{1}{2}(x+y)^2$.

例 3 用代数式表示:

(1)被3整除得 m 的数;

(2)被6除商为 n 余数为4的数;

(3)与 $x-1$ 的和是20的数;

(4)除以 $a+3$ 的商是 a 的数.

解: (1) $3m$; (2) $6n+4$;

(3) $20-(x-1)$; (4) $a(a+3)$.

注 (1)根据给定条件,利用逆运算关系,也可以列代数式;

(2)加减互为逆运算,乘除互为逆运算.

例 4 一件工程,甲单独做需要 x 天完成,乙单独做需要 y 天完成,用代数式表示:

(1)甲一天完成的工作量;

(2)乙一天完成的工作量;

(3)甲单独作 m 天后,剩下的工作量;

(4)甲单独作 m 天后,由乙来完成需要几天?

解:(1) $\frac{1}{x}$; (2) $\frac{1}{y}$; (3) $1-\frac{m}{x}$; (4) $(1-\frac{m}{x})\div\frac{1}{y}$.

(三)求代数式的值

例1 根据下面所给的值,求代数式 $3x^2-4x+1$ 的值.

(1) $x=\frac{1}{3}$; (2) $x=2$; (3) $x=0.1$.

解:(1)当 $x=\frac{1}{3}$ 时, $3x^2-4x+1=3\times(\frac{1}{3})^2-4\times\frac{1}{3}+1$
 $=3\times\frac{1}{9}-\frac{4}{3}+1=0$;

(2)当 $x=2$ 时, $3x^2-4x+1=3\times 2^2-4\times 2+1$
 $=12-8+1$
 $=5$;

(3)当 $x=0.1$ 时, $3x^2-4x+1=3\times 0.1^2-4\times 0.1+1$
 $=0.03-0.4+1$
 $=0.63$.

注 同一个代数式,字母所取的值不同,得到的结果也不同.

例2 当 $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{2}$, $c=1$ 时,求下列代数式(1) $(a+b)^2+c$; (2) $c-(a^2+b^2)$; (3) $3a^2-2b^2+1$ 的值.

解:当 $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{2}$, $c=1$ 时,

(1) $(a+b)^2+c=(\frac{1}{3}+\frac{1}{2})^2+1$
 $=(\frac{5}{6})^2+1$