抽象代数 III

——交换代数

孟道骥　王立云　袁腊梅　著

科学出版社

抽象代数 III

——交换代数

孟道骥　王立云　袁腊梅　著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

交换代数是抽象代数中的重要分支，特别与代数数论和代数几何有不可分割的紧密联系. 代数数论与代数几何无论是与基础数学还是应用数学都有广泛的联系. 本书内容包括引论、交换环的根和根式理想、模、分式环与分式模、诺特环、整相关性与戴德金整环、完备化和维数理论、赋值域等八部分.

本书力求深入浅出，循序渐进,利于学生掌握交换代数课程的精髓. 本书每章配有习题，既可帮助读者巩固和拓展教材讲述的内容，又有助于科学研究能力的初步培养.

本书可作为高等院校数学专业本科及理工科非代数方向研究生交换代数课程的教材，也可供有关科技人员及大专院校师生参考.

图书在版编目(CIP)数据

抽象代数. 3，交换代数/孟道骥，王立云，袁腊梅著. —北京：科学出版社，2016.1

ISBN 978-7-03-046803-1

Ⅰ. ①抽… Ⅱ. ①孟… ②王… ③袁… Ⅲ. ①抽象代数-高等学校-教材 ②交换环-高等学校-教材 Ⅳ. ①O153②O187.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015) 第 319935 号

责任编辑：王　静／责任校对：彭　涛
责任印制：霍　兵／封面设计：陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

大厂书文印刷有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2016 年 1 月第　一　版　开本：720 × 1000 1/16
2016 年 1 月第一次印刷　印张：15 1/4
字数：307 000

定价：39.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

继《抽象代数 I —— 代数学基础》《抽象代数 II —— 结合代数》两书之后, 我们推出《抽象代数III —— 交换代数》.

交换代数是以含幺元的交换环为主要研究对象的一门代数学科. 它的产生与发展的背景是代数数论和代数几何. 同时它又为这两个数学分支提供了统一的新工具. 此分支的起源可以追溯到 18~19 世纪, 但形成一门独立的分支则是 20 世纪的 20~30 年代. 20 世纪 50 年代后, 交换代数不仅有了巨大发展, 而且应用也从代数数论、代数几何扩展到有限群模表示理论、微分学、代数拓扑、多复变函数论和偏微分方程等分支中. 因而交换代数是抽象代数的重要发展阶段, 其内容是抽象代数的重要组成部分.

交换代数是中国科学技术大学数学系很有传统和特色的课程, 是该系研究生的公共基础课程之一, 也是面向本科生的选修课之一.

非常幸运, 从 2007 年秋到 2010 年中国科学技术大学数学系给我们提供了讲授, 也就是让我学习交换代数这门课的机会. 本着 "讲课是最好的学习" (陈省身语), "学习就要弄斧到班门"(华罗庚语), "活到老学到老" 的原则, 我同意开这门课, 也就是学习这门课. 起初, 以为是他们系人手不够让我临时替代, 不想以后几年继续让我讲这门课. "学而时习之", 当然是件好事. "神龟虽寿, 终有尽时", 我在中国科学技术大学教学任务结束了, 几年下来, 积累了不少关于交换代数学习的笔记、资料.

王立云与袁腊梅两位老师建议把这些笔记和资料整理成书公诸于众, 并愿意尽力帮助. "学而时习之, 不亦悦乎." 独享的喜悦只不过是窃喜, 共享的喜悦才会是欢乐. 公诸于众还可以得到大家的指导. 经过她们的整理、加工, 再创造于 2015 年春节前夕就成书了. 可以说是幸运再次降临. 没有她们的努力, 那些笔记、资料是成不了书的, 所以这本书是我们的共同作品.

本书首先介绍交换代数产生的背景及学习交换代数要涉及的一些基本术语和事实, 这是本书的第 0 章是引论. 这一章中有代数数与代数整数、代数簇、模、范畴与函子; Zorn 引理等. 引论之后包括七章. 第 1 章介绍交换环的根和根式理想. 这里所讨论的交换环都是含有幺元的交换环. 第 2 章介绍模. 有的大学本科生的抽象代数课程中不涉及模, 因此这一章介绍相当详细. 第 3 章介绍分式环与分式模. 第 4 章介绍诺特环. 第 5 章介绍整相关性与戴德金整环. 第 6 章介绍完备化和维数理论. 这里的维数是指超越维数. 因而对超越数的认识也是必不可少的了. 在大学课

程中很少系统讲述超越数, 我们用一节来介绍超越数, 这有助于读者. 第 7 章介绍赋值域. 其实在第 5 章就用到特殊的赋值域. 这一章是更系统的介绍. 每章后面有一些习题供初学者练习. 由于听课的研究生来自不同学校, 有的没有学习过抽象代数的课程, 学习过的, 内容也有多有少, 他们的基础不尽相同. 为了使同学们读起来方便, 本书写得相当详尽, 近乎烦琐.

我们要感谢中国科学技术大学数学学院给予我们授课的机会, 也要感谢中国科学技术大学数学学院许多老师、同学对我们的关怀、支持和帮助. 我们还要感谢南开大学数学科学学院如田冲、宋琼、邓旭等许多老师对我们的关怀、支持和帮助. 没有这些关怀、支持和帮助, 这本书也不可能完成.

书写出来了, 但并不见得能够面世. 所以第三次的幸运是得到了科学出版社的帮助, 使此书能够面世! 我们要衷心感谢科学出版社对我们长期的帮助!

本书作为研究生的公共基础课, 当然内容只能是最基本的, 不可能太专门化, 也就是说本书的深度也颇有欠缺. 由于笔者水平所限, 只好暂且如此, 待今后提高了.

孟道骥

2015 年 2 月 18 日 (甲午年腊月三十日) 于南开大学

目　　录

前言

第 0 章　引论 …… 1

0.1　代数数与代数整数 …… 1

0.2　代数簇 …… 4

0.3　模 …… 6

0.4　范畴与函子 …… 8

0.5　Zorn 引理 …… 11

习题 0 …… 16

第 1 章　交换环的根和根式理想 …… 17

1.1　环的基本概念 …… 17

1.2　同态与同构 …… 18

1.3　理想的运算 …… 20

1.4　素理想与极大理想 …… 26

1.5　根与根式理想 …… 30

习题 1 …… 32

第 2 章　模 …… 34

2.1　模及其同态 …… 34

2.2　自由模与模的直和 …… 40

2.3　模的正合序列 …… 47

2.4　模的张量积 …… 54

2.5　张量积的正合性 …… 60

2.6　投射模与内射模 …… 64

2.7　纯量的限制与扩充 …… 73

2.8　代数及其张量积 …… 75

习题 2 …… 78

第 3 章　分式环与分式模 …… 80

3.1　交换幺环的乘法封闭集 …… 80

3.2　分式环与分式模 …… 81

3.3　局部性 …… 89

3.4　理想的扩张与局限 …… 91

3.5　准素分解 ······ 97
习题 3 ······ 102
第 4 章　诺特环 ······ 105
4.1　链条件 ······ 105
4.2　诺特环 ······ 112
4.3　诺特环中的准素分解 ······ 113
4.4　阿廷环 ······ 115
习题 4 ······ 118
第 5 章　整相关性与戴德金整环 ······ 120
5.1　整相关性 ······ 120
5.2　整闭整环 ······ 123
5.3　希尔伯特零点定理 ······ 127
5.4　离散赋值环 ······ 133
5.5　戴德金整环 ······ 136
5.6　分式理想 ······ 141
5.7　代数整数环 ······ 145
习题 5 ······ 151
第 6 章　完备化和维数理论 ······ 153
6.1　拓扑和完备化 ······ 153
6.2　滤链　分次环与分次模 ······ 161
6.3　相伴的分次环 ······ 166
6.4　希尔伯特函数 ······ 169
6.5　诺特局部环的维数理论 ······ 173
6.6　超越维数 ······ 178
6.7　超越数 ······ 181
习题 6 ······ 191
第 7 章　赋值域 ······ 194
7.1　有序域及其完备化 ······ 194
7.2　赋值域及其完备化 ······ 202
7.3　非阿氏赋值 ······ 209
7.4　有限代数数域到实数域的赋值 ······ 217
7.5　代数数域的赋值 ······ 225
习题 7 ······ 230
参考文献 ······ 232
索引 ······ 233

第 0 章　引　　论

交换代数是以含幺元的交换环为主要研究对象的一门代数学科. 它的产生与发展的背景是代数数论和代数几何. 同时它又为这两个数学分支提供了统一的新工具.

18 世纪末到 19 世纪初, 高斯在研究整数的性质和方程的整数解等这些初等数论的问题时, 用到了二次域、分圆域及代数整数环. 19 世纪中叶, 库默尔在研究费马猜想时, 也将问题放到代数整数环中考虑. 经过戴德金和希尔伯特等人系统化, 抽象化建立了理想、模、戴德金环等概念, 从而形成研究代数数域和代数整数环的新学科代数数论.

19 世纪末, 戴德金和韦伯的工作, 将代数函数论建立在代数数论的统一的基础上. 希尔伯特的零点定理, 拉斯科关于代数簇与多项式理想的对应关系, 特别是 20 世纪 20~30 年代, 诺特关于理想的准素分解理论和克鲁尔的赋值论, 局部环理论和维数理论使古典几何建立在代数基础上形成代数几何这门新学科.

随着代数数论与代数几何的发展, 交换代数成为一门独立的学科. 20 世纪 50 年代以后, 模论、同调代数的发展, 特别是格罗腾迪克的概型理论对交换代数的发展起了巨大的推动作用. 交换代数不仅是代数数论和代数几何的工具, 而且也应用到有限群模表示理论、微分学、代数拓扑、多复变函数论和偏微分方程等学科中.

交换代数最基本的内容有根和根式理想、诺特环、戴德金整环、维数理论、完备化等. 交换代数的进一步发展与模论, 同调代数和基于同调代数而建立和发展起来的范畴论等均有密切关系.

本章首先介绍代数数论与代数几何的基本概念. 同时也简单介绍一下现在研究交换代数的重要工具: 模和同调代数中的基本概念. 顺便提一下 Zorn 引理.

以下总用 $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ 与 $\mathbf{C}$ 表示自然数集、整数集 (环)、有理数集 (域)、实数集 (域) 与复数集 (域).

0.1　代数数与代数整数

设域 $\mathbf{F}$ 是有理数域 $\mathbf{Q}$ 的扩张, x 为不定元, 于是对于任一代数元 $\alpha \in \mathbf{F}$, 存在唯一的首项系数为 1 的不可约多项式 $\mathrm{Irr}\,(\alpha, \mathbf{Q}) \in \mathbf{Q}[x]$ 以 α 为根, 此时称 α 为**代数数**.

定义 0.1.1　设 $\mathbf{F}$ 是 $\mathbf{Q}$ 的扩张, $\alpha \in \mathbf{F}$ 称为**代数整数**, 如果 $\mathrm{Irr}(\alpha, \mathbf{Q}) \in \mathbf{Z}[x]$.

例 0.1.1　$m\in\mathbf{Z}$, 则 m 是代数整数.

事实上, $\operatorname{Irr}(m,\mathbf{Q})=x-m\in\mathbf{Z}[x]$.

例 0.1.2　$r\in\mathbf{Q}\setminus\mathbf{Z}$, 则 r 不是代数整数.

事实上, $\operatorname{Irr}(r,Q)=x-r\notin\mathbf{Z}[x]$.

例 0.1.3　$m,n\in\mathbf{Z}$, 且 $n\neq 0$, 则 $m+n\sqrt{-1}$ 是代数整数.

这是因为

$$\operatorname{Irr}(m+n\sqrt{-1},\mathbf{Q})=(x-m-n\sqrt{-1})(x-m+n\sqrt{-1})=x^2-2mx+m^2+n^2.$$

例 0.1.4　$\mathbf{Z}[x]$ 中任何首一多项式的零点均为代数整数.

证　设 $h(x)\in\mathbf{Z}[x]$ 为首一多项式, α 为 $h(x)$ 的零点, 即 $h(\alpha)=0$. 于是有 $\operatorname{Irr}(\alpha,\mathbf{Q})=f(x)$ 能整除 $h(x)$, 即有 $h(x)=g(x)f(x)$, $g(x)$, $f(x)\in\mathbf{Q}[x]$. 对于 $g(x)$, $f(x)$ 有本原多项式 $G(x)$, $F(x)$ 及正整数 a, b, c, d 使得

$$g(x)=\frac{b}{a}G(x),\quad f(x)=\frac{d}{c}F(x).$$

于是有 $ac\,h(x)=bd\,G(x)F(x)$. $G(x)$, $F(x)$ 是本原的, 故 $G(x)F(x)$ 是本原的. 又 $h(x)$ 是首一多项式, 故 $h(x)$ 也是本原多项式. 因而 $ac=\pm bd$, 即有 $h(x)=\pm G(x)F(x)$, 由 $h(x)$ 是首一多项式, 故 $F(x)$ 与 $-F(x)$ 也有一个是首一多项式, 故 $f(x)=\pm F(x)\in\mathbf{Z}[x]$, 即 α 是代数整数. ∎

例 0.1.5　任何单位根均为代数整数.

这是因为 n 次单位根 ξ 是首一多项式 x^n-1 的零点.

定理 0.1.1　α 是代数数当且仅当 α 是 $\mathbf{Q}$ 上方阵 A 的特征值. α 是代数整数当且仅当 α 是 $\mathbf{Z}$ 上方阵 A 的特征值.

证　A 的特征多项式 $f(\lambda)=\det(\lambda I_n-A)$ 是首一多项式. 于是当 $A\in\mathbf{Q}^{n\times n}$ 时, $f(\lambda)\in\mathbf{Q}[\lambda]$. 于是 A 的特征值是代数数; 当 $A\in\mathbf{Z}^{n\times n}$ 时, $f(\lambda)\in\mathbf{Z}[\lambda]$. 于是 A 的特征值是代数整数.

反之, 设 $\operatorname{Irr}(\alpha,\mathbf{Q})=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$. 令

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\&&\ddots&\ddots&0\\&&&0&1\\-a_n&\cdots&\cdots&-a_2&-a_1\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}1\\\alpha\\\vdots\\\alpha^{n-1}\end{pmatrix},$$

则有 $X\neq 0$, 而 $AX=\alpha X$. 故 α 是 A 的特征值. 因此定理成立. ∎

定理 0.1.2　$\mathbf{C}$ 中代数整数对加法、减法与乘法封闭 (即构成环), 代数数构成一域, 任何代数数是代数整数的商.

证　代数数的集合、代数整数的集合都是非空的, 下面证明对加法与乘法的封闭性.

设 α, β 是两个代数数 (代数整数). 由定理 0.1.1, 可假定它们分别为 $\mathbf{Q}\,(\mathbf{Z})$ 上方阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & a_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

的特征值. 再设 $X=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$ 分别为 A, B 的属于 α, β 的特征向量, 于是 $X\neq 0, Y\neq 0, AX=\alpha X, BY=\beta Y$. 注意

$$\begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B\\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mm}B\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1Y\\ x_2Y\\ \vdots\\ x_mY\end{pmatrix}=\alpha\beta\begin{pmatrix} x_1Y\\ x_2Y\\ \vdots\\ x_mY\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}I_n & a_{12}I_n & \cdots & a_{1m}I_n\\ a_{21}I_n & a_{22}I_n & \cdots & a_{2m}I_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1}I_n & a_{m2}I_n & \cdots & a_{mm}I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1Y\\ x_2Y\\ \vdots\\ x_mY\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} x_1Y\\ x_2Y\\ \vdots\\ x_mY\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} B & 0 & \cdots & 0\\ 0 & B & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1Y\\ x_2Y\\ \vdots\\ x_mY\end{pmatrix}=\beta\begin{pmatrix} x_1Y\\ x_2Y\\ \vdots\\ x_mY\end{pmatrix},$$

于是 $\alpha\beta, \alpha+\beta$ 分别是矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1m}B\\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2m}B\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mm}B\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} a_{11}I_n+B & a_{12}I_n & \cdots & a_{1m}I_n\\ a_{21}I_n & a_{22}I_n+B & \cdots & a_{2m}I_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1}I_n & a_{m2}I_n & \cdots & a_{mm}I_n+B\end{pmatrix}$$

的特征值, 因而是代数数 (代数整数). 这样证明了乘法和加法的封闭性. 注意 -1 是代数整数, 于是减法也是封闭的.

设 α 为代数数, 且不为零, $f_0(x)=\mathrm{Irr}(\alpha,\mathbf{Q})=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$. 因而 $a_n\neq 0$, $a_i=\dfrac{c_i}{b}$, $c_i,b\in\mathbf{Z}$, $b\neq 0$. 于是

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{a_n}+\frac{a_1}{a_n}x+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}x^{n-1}+x^n\in\mathbf{Q}[x],\\ f_1(x)&=x^n+c_1x^{n-1}+\cdots+b^{n-1}c_n=x^n+\sum_{i=1}^{n}b^{i-1}c_ix^{n-i}\in\mathbf{Z}[x].\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}&f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{1}{a_n}+\frac{a_1}{a_n}\frac{1}{\alpha}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{\alpha^{n-1}}+\frac{1}{\alpha^n}=\frac{1}{a_n\alpha^n}f_0(\alpha)=0,\\ &f_1(b\alpha)=b^nf_0(\alpha)=0.\end{aligned}$$

故 α^{-1} 也是代数数, $b\alpha$ 是代数整数, $\alpha=\dfrac{b\alpha}{b}$ 是代数整数的商. ■

所有代数数构成的域, 称为**代数数域**, 所有代数整数构成的环, 称为**代数整数环**.

代数数论就是以代数整数为研究对象的数学分支.

注意, $\mathbf{Q}(\alpha)$ 与 $\mathbf{Q}[x]/\langle\mathrm{Irr}\,(\alpha,\mathbf{Q})\rangle$ 同构, $\langle\mathrm{Irr}\,(\alpha,\mathbf{Q})\rangle$ 是 $\mathrm{Irr}\,(\alpha,\mathbf{Q})$ 生成的 $\mathbf{Q}[x]$ 的理想. 因而 $\mathbf{Q}[x]$, $\mathbf{Z}[x]$ 的理想是很重要的.

0.2 代 数 簇

设 $\mathbf{F}[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ 是域 $\mathbf{F}$ 上的 n 元多项式环, $\mathbf{F}^n$ 是 $\mathbf{F}$ 上的线性空间. $f\in\mathbf{F}[x_1,x_2,\cdots,x_n]$, $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbf{F}^n$, 若

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_n)=0,$$

则称 α 为 f 的零点, 并记为 $f(\alpha)=0$.

定义 0.2.1 设 $S\subseteq\mathbf{F}[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ 称

$$\mathfrak{V}(S)=\{\alpha\in\mathbf{F}^n|f(\alpha)=0,\ f\in S\}$$

为 $\mathbf{F}^n$ 的一个**代数集**.

例 0.2.1 设 $S=\{a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n|1\leqslant i\leqslant m\}$, 则 $\mathfrak{V}(S)$ 是齐次线性方程组的解, 这是 $\mathbf{F}^n$ 的一个线性子空间.

设 $S_1=\{a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n+b_i|1\leqslant i\leqslant m,\ b_i$ 不全为 $0\}$, 则 $\mathfrak{V}(S_1)$ 是非齐次线性方程组的解, 或 $\mathfrak{V}(S_1)=\varnothing$, 或为 $\mathfrak{V}(S)$ 的陪集.

简单地说, 以 $\mathfrak{V}(S)$ 为元素就是 $\mathbf{F}^n$ 的射影几何、以 $\mathfrak{V}(S_1)$ 为元素就是 $\mathbf{F}^n$ 的仿射几何. 射影几何、仿射几何可以统称线性几何.

例 0.2.2 设 $f=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 $\mathbf{F}[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ 的一个二次多项式, 则 $\mathfrak{V}(f)$ 是 $\mathbf{F}$ 上的二次超曲面.

特别地, $\mathbf{F}=\mathbf{R}$, $n=2,3$ 时, $\mathfrak{V}(f)$ 分别为二次曲线、二次曲面.

例 0.2.3 设 $\mathbf{F}[x_{11},x_{12},\cdots,x_{nn}]$ 是域 $\mathbf{F}$ 上的 n^2 元多项式环, $\mathbf{F}^{n\times n}=\mathbf{F}^{n^2}$ 是 $\mathbf{F}$ 上的线性空间.

$$S=\left\{\sum_{k=1}^{n}x_{ik}x_{jk}-\delta_{ij}\,\middle|\,1\leqslant i,j\leqslant n\right\},$$

于是 $\mathfrak{V}(S)$ 是 $\mathbf{F}^{n\times n}$ 中 n 阶正交矩阵的集合 $O(n,\mathbf{F})$.

$$S_1=\{x_{ij}+x_{ji}|\,1\leqslant i,j\leqslant n\},$$

于是 $\mathfrak{V}(S_1)$ 是 $\mathbf{F}^{n\times n}$ 中 n 阶反对称矩阵的集合.

若 $\mathcal{I}$ 为 S 生成的 $\mathbf{F}[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ 的理想, 即 $\mathcal{I}=\langle S\rangle$, 则

$$\mathfrak{V}(S)=\mathfrak{V}(\mathcal{I})=\mathfrak{V}(\langle S\rangle).$$

因而任何代数集都由 $\mathbf{F}[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ 中理想所生成. 因而代数子集的研究也归于 $\mathbf{F}[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ 的理想的研究.

还要注意, 如果 $f\in\mathbf{F}[x_1,x_2,\cdots,x_n]$, $f^k\in\mathcal{I}$, 有 $\alpha\in\mathfrak{V}(S)=\mathfrak{V}(\mathcal{I})$, 则 $f^k(\alpha)=(f(\alpha))^k=0$, 于是 $f(\alpha)=0$. 注意, 若 $f^k,g^l\in\mathcal{I}$, 则有 $(f+g)^{k+l}\in\mathcal{I}$, $(hf)^k\in\mathcal{I},\forall h\in\mathbf{F}[x_1,x_2,\cdots,x_n]$. 于是 $\{f\in\mathbf{F}[x_1,x_2,\cdots,x_n]|\exists k\in\mathbf{N},\text{s.t.}f^k\in\mathcal{I}\}$ 也是理想, 称为 $\mathcal{I}$ 的**根式理想**, 记为 $\sqrt{\mathcal{I}}$. 于是有

$$\mathfrak{V}(S)=\mathfrak{V}(\mathcal{I})=\mathfrak{V}(\sqrt{\mathcal{I}}).$$

为简单计, 令 $A=\mathbf{F}[x_1,x_2,\cdots,x_n]$. 设 $\mathcal{I},\mathcal{J}$ 是 A 的理想, 则可得下面结论.

性质 0.2.1 1) 当 $\mathcal{I}\supseteq\mathcal{J}$ 时, 有 $\mathfrak{V}(\mathcal{I})\subseteq\mathfrak{V}(\mathcal{J})$.

2) $\mathfrak{V}(A)=\varnothing$;

3) $\mathfrak{V}(0)=A$;

4) $\mathfrak{V}(\mathcal{I})\cup\mathfrak{V}(\mathcal{J})=\mathfrak{V}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J})$;

5) $\bigcap\limits_{\lambda}\mathfrak{V}(\mathcal{I}_\lambda)=\mathfrak{V}\left(\sum\limits_{\lambda}\mathcal{I}_\lambda\right)$, $\{\mathcal{I}_\lambda\}$ 为 A 的理想集.

事实上, 1), 2), 3) 是明显的.

4) 由 $\mathcal{I} \supseteq \mathcal{I} \cap \mathcal{J}$, $\mathcal{J} \supseteq \mathcal{I} \cap \mathcal{J}$. 因而 $\mathfrak{V}(\mathcal{I}) \cup \mathfrak{V}(\mathcal{J}) \subseteq \mathfrak{V}(\mathcal{I} \cap \mathcal{J})$. 若 $\alpha \in \mathfrak{V}(\mathcal{I} \cap \mathcal{J}) \setminus \mathfrak{V}(\mathcal{I})$, 即有 $f \in \mathcal{I}$ 使得 $f(\alpha) \neq 0$. 对任何 $g \in \mathcal{J}$, $fg \in \mathcal{I} \cap \mathcal{J}$, 于是 $f(\alpha)g(\alpha) = 0$, 因而 $g(\alpha) = 0$, $\alpha \in \mathfrak{V}(\mathcal{J})$. 因此 4) 成立.

5) 只要注意 $\mathcal{I}_{\lambda_j} \in \{\mathcal{I}_\lambda\}$, 则 $\mathcal{I}_{\lambda_j} \subseteq \bigcup\limits_\lambda \mathcal{I}_\lambda \subseteq \sum\limits_\lambda \mathcal{I}_\lambda$. 因此结论 5) 是明显的. ∎

由于上面的后四个结论, 可以用 $\{\mathfrak{V}(\mathcal{I})\}$ 为闭集族, 定义 $\mathbf{F}^n$ 的拓扑, 这种拓扑称为**Zariski 拓扑**.

当然, $\mathfrak{V}(\mathcal{I})$ 作为 $\mathbf{F}^n$ 的闭子集, 也就有了拓扑结构. 如果 $\mathfrak{V}(\mathcal{I})$ 还满足所谓的"整性" 条件, 那么 $\mathfrak{V}(\mathcal{I})$ 及其开子集称为**代数簇**. 这就是代数几何研究的基本对象. "整性" 条件与理想的性质是密切相关的.

反过来, 设 V 是 $\mathbf{F}^n$ 的子集, 则

$$\mathfrak{P}(V) = \{f \in A | f(v) = 0, \forall v \in V\}$$

是 A 的理想.

事实上, $0 \in \mathfrak{P}(V)$. $f, f_1, f_2 \in \mathfrak{P}(V)$, $g \in A$, $v \in V$, 于是

$$(f_1 + f_2)(v) = f_1(v) + f_2(v) = 0, \quad (fg)(v) = f(v)g(v) = 0.$$

因而 $\mathfrak{P}(V)$ 是 A 的理想.

由此容易得到下面一些结论.

性质 0.2.2 1) $\mathbf{F}$ 为无限域时, $\mathfrak{P}(\mathbf{F}^n) = \{0\}$.

2) 若 $V \subseteq U \subseteq \mathbf{F}^n$, 则 $\mathfrak{P}(V) \supseteq \mathfrak{P}(U)$.

3) 若 $S \subseteq A$, $V \subseteq \mathbf{F}^n$, 则 $S \subseteq \mathfrak{P}\mathfrak{V}(S)$, $V \subseteq \mathfrak{V}\mathfrak{P}(V)$.

4) 若 $S \subseteq A$, $V \subseteq \mathbf{F}^n$, 则 $\mathfrak{V}(S) = \mathfrak{V}\mathfrak{P}\mathfrak{V}(S)$, $\mathfrak{P}(V) = \mathfrak{P}\mathfrak{V}\mathfrak{P}(V)$.

5) 若 $f \in A$, $f^n \in \mathfrak{P}(V)$, 则 $f \in \mathfrak{P}(V)$, 即 $\sqrt{\mathfrak{P}(V)} = \mathfrak{P}(V)$.

证 1), 2), 3) 直接由定义可得.

4) 由 3), $S \subseteq \mathfrak{P}\mathfrak{V}(S)$, 于是由性质 0.2.1 知 $\mathfrak{V}(S) \supseteq \mathfrak{V}\mathfrak{P}\mathfrak{V}(S)$. 另一方面, 从 $S \subseteq \mathfrak{P}\mathfrak{V}(S)$, 由结论 3) 知 $\mathfrak{V}(S) \subseteq \mathfrak{V}(\mathfrak{P}\mathfrak{V}(S))$. 于是结论 4) 成立.

5) $f^n \in \mathfrak{P}(V)$, 于是 $\forall \alpha \in V$, $f^n(\alpha) = (f(\alpha))^n = 0$. 因而 $f(\alpha) = 0$, 即 $f \in \mathfrak{P}(V)$. ∎

从 A 中的理想的性质抽象出一般交换环的理想的性质是交换代数的主要研究对象之一.

0.3 模

交换代数主要是研究交换环的理想. 但是随着数学的发展, 模的作用越来越大.

所谓模, 在某种意义上说就是线性空间的推广.

定义 0.3.1 设 R 是幺环, M 是 Abel 群, 其运算为加法. 若有 $R \times M$ 到 M 的映射: $(a, x) \to ax$, $a \in R$, $x \in M$, 对 $\forall a, b \in R$ 满足

1) $a(x+y) = ax + ay$;

2) $(a+b)x = ax + bx$;

3) $(ab)x = a(bx)$;

4) $1 \cdot x = x$,

则称 M 为 R 上的一个**左模**, 或称 M 是**左** R**模**, ax 称为 a 与 x 的**积**, 相应地说 R 与 M 间有一个乘法.

类似地, 我们可定义**右**R **模**, 即有映射: $(x, a) \to xa$, $a \in R$, $x \in M$, 对 $\forall a, b \in R$, $x, y \in M$ 满足

1′) $(x+y)a = xa + ya$;

2′) $x(a+b) = xa + xb$;

3′) $x(ab) = (xa)b$;

4′) $x \cdot 1 = x$.

若 M 既是左 R 模, 又是右 R 模, 且满足:

$$(ax)b = a(xb), \quad \forall a, b \in R,\ x \in M,$$

则称 M 是 R **双模**, 或称 R **模**.

假设 R 交换环, 且 M 是左 R 模, 又对 $a \in R$, $x \in M$, 令 $xa = ax$, 则易证 M 是一个 R 模, 今后对于交换环 R 上的模都指这种意义下的模.

例 0.3.1 1) 数域 $\mathbf{P}$ 上的线性空间 V 就是一个 $\mathbf{P}$ 模. 一般地, 域 $\mathbf{F}$ 上的模都称为 $\mathbf{F}$ 上的**线性空间**.

2) 设 M 是一个 Abel 群, 映射

$$(m, x) \to mx, \quad m \in \mathbf{Z},\ x \in M$$

使 M 变成一个 $\mathbf{Z}$ 模.

3) 设 R 是幺环, R 对加法是 Abel 群, 记为 R_+. 考虑 $R \times R_+$ 到 R_+ 的映射

$$(r, x) \to rx, \quad r \in R,\ x \in R_+$$

及 $R_+ \times R$ 到 R_+ 的映射

$$(x, s) \to xs, \quad x \in R_+,\ s \in R$$

使 R_+ 变成一个 R 模. 因而 R 可看成它自身上的模.

4) 设 V 是数域 $\mathbf{P}$ 上的线性空间, $\mathcal{A}$ 是 V 的线性变换, 令 $R = \mathbf{P}[\lambda]$ 为 $\mathbf{P}$ 上的一元多项式环, 则 $R \times V$ 到 V 的映射 $(f(\lambda), x) \to f(\mathcal{A})x$, $f(\lambda) \in R$, $x \in V$ 使 V 成为一个左 R 模.

5) 设 M 是一个 Abel 群, End$M$ 为 M 的自同态环, 易证 End$M \times M$ 到 M 的映射 $(\eta, x) \to \eta(x)$, $\eta \in \mathrm{End}M$, $x \in M$ 使 M 成为一个左 End$M$ 模.

R 模之间有同态与同构的映射.

定义 0.3.2 设 M, M' 为两个 R 模. 如果 M 到 M' 的映射 η, 满足 $\forall a \in R$, $x, y \in M$, 有:

1) $\eta(x+y) = \eta(x) + \eta(y)$, 即 η 是群同态;

2) $\eta(ax) = a\eta(x)$,

则称 η 为 M 到 M' 的一个**模同态**或 R **同态**.

若 η 还是满映射, 则称 η 为**满同态**, 此时称 M 与 M' 同态.

η 若还是一一对应, 则称 η 为**模同构**或 R **同构**, 此时称 M 与 M' 同构, 记为 $M \cong M'$.

例 0.3.2 1) 设 M, M' 是两个 Abel 群, η 是 M 到 M' 的群同态, 则 η 也是 $\mathbf{Z}$ 模 M 到 $\mathbf{Z}$ 模 M' 的模同态; 若 η 为群同构, 则 η 也是模同构.

2) 假设 V 是域 $\mathbf{F}$ 上的线性空间.V 到自身的模同态 $\mathcal{A}$, 称为 V 的**线性变换**. 显然, 当 $\mathbf{F}$ 为数域时, $\mathcal{A}$ 就是线性代数中讲的线性空间的线性变换.

R 模 M 到 R 模 M' 的所有同态的集合常记为 $\mathrm{Hom}(M, M')$, 其中也可定义运算, 使其仍为 R 模, 就像线性空间之间的线性映射的集合仍为线性空间一样.

0.4 范畴与函子

代数进一步发展是同调代数的建立. 同调代数已经是广泛使用的工具. 在同调代数中一个基本的概念是范畴. 定义如下.

定义 0.4.1 一个**范畴**$\mathfrak{C}$ 由下面三种成分及有关公理组成:

1) $\mathfrak{C}$ 是由一些**对象**构成的类记为 ob $\mathfrak{C}$, $A \in \mathrm{ob}\mathfrak{C}$ 表示 A 是 $\mathfrak{C}$ 中对象;

2) 对于 $\mathfrak{C}$ 中任意两个有序对象 (A, B), 对应一个集合 $\mathrm{Hom}(A, B)$, 其中元素 f 称为 A 到 B 的**态射**, 记为 $f: A \to B$;

3) 态射之间有合成法则: 若 $f \in \mathrm{Hom}(A, B), g \in \mathrm{Hom}(B, C)$, 则有唯一的 $h \in \mathrm{Hom}(A, C)$, 记为 $h = gf$, 称为 g 与 f 的**合成**. 态射及其合成满足以下公理.

C_1: $\mathrm{Hom}(A, B) \cap \mathrm{Hom}(C, D) = \varnothing, \quad (A, B) \neq (C, D)$;

C_2: $f(gh) = (fg)h, \quad h \in \mathrm{Hom}(A, B),\ g \in \mathrm{Hom}(B, C),\ f \in \mathrm{Hom}(C, D)$;

C_3: $\exists 1_A \in \mathrm{Hom}(A, A)$, 使得 $\begin{cases} 1_A f = f, & \forall f \in \mathrm{Hom}(B, A); \\ g 1_A = g, & \forall g \in \mathrm{Hom}(A, C). \end{cases}$

例 0.4.1 以下是常见的范畴的例子.

1) 以集合为对象, 态射为集合间的映射.

2) 以群为对象, 态射为群的同态.

3) 以交换群为对象, 态射为交换群的同态.

4) 以环为对象, 态射为环的同态.

5) 以幺环为对象, 态射为将幺元映到幺元的环同态.

6) 以环 R 上的模为对象, 态射为模的同态.

7) 以域 k 上的线性空间为对象, 态射为线性空间的同态.

8) 以拓扑空间为对象, 态射为拓扑空间的连续映射.

注意, 范畴是由其对象构成的 "类", 而不是 "集合". 例如, 上面例子中的交换群的范畴, 如果是一切交换群的 "集合", 那么一切交换群的直和 (直积) 仍是交换群, 是否在此 "集合" 中?

同一范畴的对象之间是用态射联系起来. 不同范畴之间的联系则是**函子**.

定义 0.4.2 从范畴 $\mathfrak{C}$ 到范畴 $\mathfrak{D}$ 的**共变函子**F, 由两部分组成.

1) F 是对象类之间的映射, 即对 $A \in \mathrm{ob}\mathfrak{C}$ 有唯一的 $F(A) \in \mathrm{ob}\mathfrak{D}$.

2) 态射集间的映射, 对于 $f \in \mathrm{Hom}(A, B)\,(A, B \in \mathrm{ob}\mathfrak{C})$, 有唯一的 $F(f) \in \mathrm{Hom}(F(A), F(B))$ 使得下面条件成立 (图 0.1):

(F_1) 对任何 $A \in \mathrm{ob}\mathfrak{C}$, $F(1_A) = 1_{F(A)}$.

(F_2) $f \in \mathrm{Hom}(A, B), g \in \mathrm{Hom}(B, C)$, $F(gf) = F(g)F(f)$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "gf"] \arrow[d, "f"'] & C \\ B \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

(a)

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(gf)"] \arrow[d, "F(f)"'] & F(C) \\ F(B) \arrow[ur, "F(g)"'] & \end{tikzcd}$$

(b)

图 0.1

定义 0.4.3 从范畴 $\mathfrak{C}$ 到范畴 $\mathfrak{D}$ 的**反变函子**G, 由两部分组成.

1) G 是对象类之间的映射, 即对 $A \in \mathrm{ob}\mathfrak{C}$ 有唯一的 $G(A) \in \mathrm{ob}\mathfrak{D}$.

2) 态射集间的映射, 对于 $f \in \mathrm{Hom}(A, B)\,(A, B \in \mathrm{ob}\mathfrak{C})$, 有唯一的 $G(f) \in \mathrm{Hom}(G(B), G(A))$ 使得下面条件成立 (图 0.2):

(G_1) 对任何 $A \in \mathrm{ob}\mathfrak{C}$, $G(1_A) = 1_{G(A)}$.

(G_2) $f \in \mathrm{Hom}(A, B), g \in \mathrm{Hom}(B, C)$, $G(gf) = G(f)G(g)$.

例 0.4.2 1) 设 $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}$, $1_{\mathfrak{C}}$ 为将每个对象和态射映到自身, 这是共变函子, 称为 $\mathfrak{C}$ 的**恒等函子**.

2) 设 $\mathfrak{Set}$ 是集合的范畴, $\mathfrak{V}_F$ 是域 F 上线性 (向量) 空间的范畴. 对任何一个集合 X, 可以定义以 X 为基的 F 上的线性空间 $V(X)$, 于是有 $\mathfrak{Set}$ 到 $\mathfrak{V}_F$ 的共变

函子 V.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "gf"] \arrow[d, "f"'] & & C \\ B \arrow[urr, "g"'] & & \end{tikzcd}$$

(a)

$$\begin{tikzcd} G(C) \arrow[rr, "G(gf)"] \arrow[d, "G(g)"'] & & G(A) \\ G(B) \arrow[urr, "G(f)"'] & & \end{tikzcd}$$

(b)

图 0.2

3) 设 $\mathfrak{G}$ 是群范畴, $G \in \mathfrak{G}$. 于是 G 是一个群, 当然 G 首先是一个集合, 将此集合记为 $\sigma(G)$, 群同态是集合间的映射. 于是 σ 是 $\mathfrak{G}$ 到 $\mathfrak{S}et$ 的共变函子, 此函子称为**忘却函子**. 即忘了 G 上的群结构.

自然对拓扑范畴、模范畴等均可定义忘却函子. 还可以定义部分忘却函子, 如拓扑群范畴到群范畴; 拓扑群范畴到拓扑范畴; 李群范畴到拓扑群范畴, 等等.

4) 设 $\mathfrak{C}$ 是一范畴. A 是 $\mathfrak{C}$ 的一固定的对象. 定义 $\mathfrak{C}$ 到集合范畴 $\mathfrak{S}et$ 的映射 $\mathrm{Hom}(A,-)$ 定义为

$$\mathrm{Hom}(A,-)(M) = \mathrm{Hom}(A,M), \quad \forall M \in \mathrm{ob}\mathfrak{C};$$

对于 $f \in \mathrm{Hom}(M,N)$, 定义 $\mathrm{Hom}(A,f) : \mathrm{Hom}(A,M) \to \mathrm{Hom}(A,N)$ 如下:

$$\mathrm{Hom}(A,f)(g) = fg, \quad g \in \mathrm{Hom}(A,M).$$

显然 $fg \in \mathrm{Hom}(A,N)$. 而且不难验证

$$\mathrm{Hom}(A,1_M) = 1_{\mathrm{Hom}(A,M)}, \quad \mathrm{Hom}(A,fh) = \mathrm{Hom}(A,f)\mathrm{Hom}(A,h),$$

这里 $f \in \mathrm{Hom}(M,N)$, $h \in \mathrm{Hom}(N,P)$.

因而 $\mathrm{Hom}(A,-)$ 是 $\mathfrak{C}$ 到 $\mathfrak{S}et$ 的共变函子.

5) 设 $\mathfrak{C}$ 是一范畴. A 是 $\mathfrak{C}$ 的一固定的对象. 定义 $\mathfrak{C}$ 到集合范畴 $\mathfrak{S}et$ 的映射 $\mathrm{Hom}(-,A)$ 定义为 $\mathrm{Hom}(-,A)(M) = \mathrm{Hom}(M,A)$; 对于 $f \in \mathrm{Hom}(M,N)$, 定义 $\mathrm{Hom}(f,A) : \mathrm{Hom}(N,A) \to \mathrm{Hom}(M,A)$ 如下:

$$\mathrm{Hom}(f,A)(g) = gf, \quad g \in \mathrm{Hom}(N,A).$$

显然 $gf \in \mathrm{Hom}(M,A)$. 而且不难验证

$$\mathrm{Hom}(A,1_M) = 1_{\mathrm{Hom}(M,A)}, \quad \mathrm{Hom}(A,fh) = \mathrm{Hom}(A,h)\mathrm{Hom}(A,f),$$

这里 $f \in \mathrm{Hom}(M,N)$, $h \in \mathrm{Hom}(N,P)$.