普通高等教育“十二五”规划教材

线性代数

孙爱玲　沈　俊　主编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

线性代数

主　编　孙爱玲　沈　俊
副主编　李雪玲　阎航宇

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书依据工科类本科“线性代数课程教学基本要求”编写。全书内容包括行列式、矩阵、线性方程组，以及相似矩阵与二次型等基本知识与基本理论。本书突出线性代数的计算和方法，取材得当、结构合理，每节配有例题，每章配有习题，便于学生进行复习、巩固已学知识。

本书可作为理工类本科生的教材使用，也可为其他人员提供参考。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 / 孙爱玲，沈俊主编. —北京：科学出版社，2015
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-03-046034-9

Ⅰ.①线… Ⅱ.①孙…②沈… Ⅲ.①线性代数 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 246761 号

责任编辑：李淑丽 李 萍 / 责任校对：李 影
责任印制：赵 博 / 封面设计：华路天然工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

保定市中画美凯印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2015 年 12 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2015 年 12 月第一次印刷 印张：8
字数：170 000

定价：22.00 元

前　言

线性代数是一门理论性和应用性较强的数学学科，具有悠久的历史和丰富的内容。近年来，随着科学技术的发展，特别是电子计算机的普遍使用，线性代数作为重要的数学工具已深入到自然科学、社会科学、工程技术和经济管理等多个领域.

线性代数和微积分一样，也是高等院校普遍开设的基础数学课程，但线性代数更多的是从离散的角度研究客观世界的空间形式和数量关系. 线性代数课程，无论是对全面培养学生的数学思维，提高数学素质，还是为进一步学习其他课程，都有着不可替代的作用. 随着计算机科学的迅猛发展，数字化处理技术已渗透到生活和学习的各个领域，因此学习和掌握线性代数的知识就显得尤为重要.

如何理解线性代数的基本思想和基本理论，掌握其基本方法，并能灵活应用于实际问题是线性代数教学的主要内容. 针对非数学专业学生的数学基础知识较薄、学时较少的特点，我们编写了本书. 本书通过精心选取和安排教学内容，使其在保持一定的系统性和完整性基础上，又密切结合应用背景；通过对实际应用的讲解激发学生学习的兴趣，增强学生运用数学知识分析和解决实际问题的能力，努力做到融科学性与实用性为一体.

本书前四章内容涵盖了线性代数课程的基本内容和教学要求，各章前后穿插了有关实际问题的引例和实际应用问题的实例，最后以附录的形式介绍了 MATLAB 软件，以说明线性代数的计算问题可以借助于计算机来解决.

本书由中国药科大学数学教研室的孙爱玲、沈俊任主编，参与前四章编写的教师有孙爱玲、沈俊、丁峻、李雪玲、阎航宇、蒋秋浩、杨访等. 在编写过程中，整个数学教研室的同事给予了热情的支持和帮助，在此谨致谢意！另外，特别感谢丁峻教授对本书的编写工作作出的巨大贡献.

由于编者水平有限，书中难免存在不妥之处，敬请专家和读者批评指正.

编　者

2015 年 6 月

目　　录

第一章 行 列 式

行列式是线性代数中的一个基本工具.在初等代数中,为便于求解二元和三元线性方程组,引进了二阶和三阶行列式.为了研究一般的 n 元线性方程组,需要进一步讨论 n 阶行列式.本章将在二阶和三阶行列式的基础上,给出 n 阶行列式的定义、基本性质及计算.作为行列式的初步应用,还将介绍用行列式解线性方程组的一种重要方法——克拉默法则.

第一节 n 阶行列式

一、二阶和三阶行列式

在初等数学中,求解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1}$$

时,用消元法,得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-a_{21}b_1 \\ (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=a_{22}b_1-a_{12}b_2 \end{cases} \tag{2}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,解为

$$x_1=\frac{a_{22}b_1-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \tag{3}$$

为了便于记忆,引入记号

$$D=\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=ad-bc \tag{4}$$

并称由 a,b,c,d 四个数构成的两行两列的式子

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

为二阶行列式.利用二阶行列式的概念,则式(3)可表示为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \tag{5}$$

可见,用二阶行列式来表示二元线性方程组的解确实简洁明了.

类似地，如果在求解三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{6}$$

的过程中引入下列三阶行列式的记号，并规定三阶行列式的展开式为

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}) \\
&=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}
\end{aligned} \tag{7}$$

则当三元线性方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$$

时，用消元法求解这个方程组可得

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},x_3=\frac{D_3}{D} \tag{8}$$

式中，$D_j(j=1,2,3)$是用常数项 b_1,b_2,b_3 替换 D 中的第 j 列所得的三阶行列式，即

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

解的表达式(5)和(8)很容易记忆，分母均是相应的系数行列式，x_j 的分子是把系数行列式的第 j 列换成方程组中的常数项，其余列不动所得到的行列式.

例 1 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 6 & 8 \end{vmatrix}$$

解 利用展开式计算，得

$$\begin{aligned}
D&=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 6 & 8 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 8 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} \\
&=2(0\times 8-5\times 6)-(4\times 8-5\times(-1))+3(4\times 6-0\times(-1)) \\
&=-25
\end{aligned}$$

例 2 解三元线性方程组

$$\begin{cases} -2x_1-3x_2+x_3=7 \\ x_1+x_2-x_3=-4 \\ -3x_1+x_2+2x_3=1 \end{cases}$$

解 方程组的系数行列式 D 为

$$D=\begin{vmatrix}-2 & -3 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ -3 & 1 & 2\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}1 & -1\\ -3 & 2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 1\\ -3 & 1\end{vmatrix}=-5\neq 0$$

而且

$$D_1=\begin{vmatrix}7 & -3 & 1\\ -4 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=7\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}-4 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-4 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-5$$

$$D_2=\begin{vmatrix}-2 & 7 & 1\\ 1 & -4 & -1\\ -3 & 1 & 2\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}-4 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}-7\begin{vmatrix}1 & -1\\ -3 & 2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & -4\\ -3 & 1\end{vmatrix}=10$$

$$D_3=\begin{vmatrix}-2 & -3 & 7\\ 1 & 1 & -4\\ -3 & 1 & 1\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}1 & -4\\ 1 & 1\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}1 & -4\\ -3 & 1\end{vmatrix}+7\begin{vmatrix}1 & 1\\ -3 & 1\end{vmatrix}=-15$$

所以方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,x_2=\frac{D_2}{D}=-2,x_3=\frac{D_3}{D}=3$$

鉴于二阶和三阶行列式在讨论二元和三元线性方程组时所起的作用，在讨论 n 元线性方程组之前，先将二阶和三阶行列式的概念推广到 n 阶行列式，其中 n 是任意的正整数.

二、n 阶行列式

现给出 n 阶行列式的归纳式定义.

定义 1 由 $n\times n$ 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排列成 n 行 n 列（横的称行，竖的称列），并在左、右两边各加一竖线的算式，即

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，并且规定其值如下：

(1) 当 $n=1$ 时，$D_1=|a_{11}|=a_{11}$；

(2) 当 $n=2$ 时，$D_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$；

(3) 当 $n>2$ 时，$D_n=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}$，

其中，数 a_{ij} 称为第 i 行第 j 列的元素.

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

称为元素 a_{ij} 的代数余子式；M_{ij} 为由 D_n 划去第 i 行第 j 列后余下元素构成的 $n-1$ 阶行列式，即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称 M_{ij} 为 a_{ij} 的余子式.

例 3 计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解 $D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+a_{14}A_{14}$

$$=1\times\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}-1\times\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}+0-2\times\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=1\times1-0+0-2\times4=-7$$

实际上，行列式不但可以按第一行元素展开，也可以按第一行以后的任一行或者任一列元素展开，其结果都是相同的，即有如下结论.

定理 1 n 阶行列式 D 等于它的任意一行(列)元素与它们所对应的代数余子式乘积之和，即

$$D=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}, \quad \forall i=1,2,\cdots,n \tag{9}$$

或

$$D=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}, \quad \forall j=1,2,\cdots,n \tag{10}$$

定理证明从略.

在例 3 中，如果按第四行元素展开行列式，就得到

$$D=1\times(-1)^{4+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=-7$$

这与按 n 阶行列式定义计算的结果是一致的.

三、几种特殊的行列式

下面利用行列式的定义来计算几种特殊的 n 阶行列式.

（1）**对角行列式** 只有在对角线上有非零元素的行列式称为对角行列式.

例 4 证明对角行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \tag{11}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \lambda_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \tag{12}$$

其中，行列式(11)主对角线上的元素是 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$，行列式(12)次对角线上的元素是 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$，其他元素都是零.

证明 对于行列式(11)，利用 n 阶行列式的定义依次降低其阶数，则得

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix} &= \lambda_1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix} \\ &= \lambda_1\lambda_2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} \lambda_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix} \\ &= \cdots = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \end{aligned}$$

对于行列式(12)，利用 n 阶行列式的定义依次降低其阶数，则得

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \lambda_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} &= \lambda_1(-1)^{1+n}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_3 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \lambda_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \lambda_1(-1)^{1+n}\lambda_2(-1)^{1+(n-1)}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_4 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \lambda_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$=\cdots=(-1)^{1+n}(-1)^{1+(n-1)}\cdots(-1)^{1+1}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$
$$=(-1)^{n+\frac{n(n+1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

(2) **上(下)三角行列式**　主对角线以下(上)的元素都为零的行列式称为上(下)三角行列式.

例 5　证明上三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \tag{13}$$

证明　利用定理 1,按第一列元素展开,依次降低其阶数,得

$$D=a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\cdots=a_{11}(-1)^{1+1}a_{22}(-1)^{1+1}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

同理,对下三角行列式按第一行展开,得

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

第二节　n 阶行列式的性质

由行列式的定义直接计算行列式的值,当行列式的阶数 n 较大时,计算过程比较烦琐.为了简化行列式的计算,下面介绍行列式的一些基本性质.

将行列式 D 的行、列互换后,所得到的行列式称为行列式 D 的**转置行列式**,记为 D^{T}(或 D'),即

设 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 1 行列式与它的转置行列式相等,即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

证明 利用数学归纳法.

(1) 当 $n=2$ 时,命题显然成立;

(2) 设对 $n-1$ 阶行列式命题成立,下面证明对 n 阶行列式命题也成立.

将 D 和 D^{T} 分别按第一行和第一列元素展开,得

$$D=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}A_{1k}=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}\cdot(-1)^{1+k}M_{1k} \tag{14}$$

$$D^{\mathrm{T}}=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}B_{k1}=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}\cdot(-1)^{k+1}N_{k1} \tag{15}$$

式中,A_{1k},M_{1k}是 D 的第一行元素的代数余子式和余子式;B_{k1},N_{k1}是 D^{T} 的第一列元素的代数余子式和余子式.

M_{1k},N_{k1}都是 $n-1$ 阶行列式,很容易看出 N_{k1}是 M_{1k}的转置行列式.由假设知 $N_{k1}=M_{1k}$,$\forall k=1,2,\cdots,n$ 都成立,从而由式(14)和(15)得 $D=D^{\mathrm{T}}$,即命题对 n 阶行列式也成立.

综上所述,命题得证.

这个性质说明了行列式中行、列地位的对称性,凡是行列式对行成立的性质对列也成立.

性质 2 互换行列式中两行(列),行列式的值改变正负.

设行列式

$$D=\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ i\text{ 行} \\ \\ j\text{ 行} \\ \\ \end{array}$$

互换第 i 行与第 j 行($1\leqslant i,j\leqslant n$)得

$$\overline{D}=\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ i\text{ 行} \\ \\ j\text{ 行} \\ \\ \end{array}$$

则由性质 2 得:$\overline{D}=-D$.

性质 2 可用数学归纳法证明,此处从略.

推论 1 如果行列式中有两行(列)元素对应相等,则此行列式的值为零.

性质 3 行列式中的某行(列)中所有的元素都乘以同一数 k,等于用数 k 乘以行列式,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明　将等式左、右两边的行列式分别记为 $\overline{D}$ 和 D，并将行列式 $\overline{D}$ 按第 i 行展开，得

$$\overline{D}=ka_{i1}A_{i1}+ka_{i2}A_{i2}+\cdots+ka_{in}A_{in}=k(a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in})=kD$$

推论 2　行列式中某一行(列)元素的公因数，可以提到行列式符号的前面.

推论 3　如果行列式中某行(列)的元素全为零，则此行列式的值等于零.

推论 4　如果行列式的两行(列)元素对应成比例，则此行列式的值等于零.

性质 4　如果行列式中某行(列)的元素都是两数之和，则此行列式可拆成两个行列式的和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明　将上述三个行列式分别按第 i 行展开，并注意到它们第 i 行元素的代数余子式都是相同的，于是有

$$\begin{aligned}\text{左边}&=(a_{i1}+b_{i1})A_{i1}+(a_{i2}+b_{i2})A_{i2}+\cdots+(a_{in}+b_{in})A_{in}\\&=(a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in})+(b_{i1}A_{i1}+b_{i2}A_{i2}+\cdots+b_{in}A_{in})=\text{右边}\end{aligned}$$

性质 5　将行列式的某一行(列)的元素都乘以一个常数 λ 后，再加到另一行(列)的对应元素上，则行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明　由性质 4 得

$$\text{右边}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

又由推论 4 得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

所以右边=左边.

以后用"$r_i \times k(c_i \times k)$"表示第 i 行(列)元素乘 k;"$r_i \leftrightarrow r_j(c_i \leftrightarrow c_j)$"表示将第 i 行(列)与第 j 行(列)交换位置;"$r_j + kr_i(c_j + kc_i)$"表示将第 i 行(列)乘数 k 加到第 j 行(列)上.

性质 6 行列式 D 的某一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0, \quad \forall i \neq j$$

或

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0, \quad \forall i \neq j$$

证明 作行列式(把原行列式中的第 j 行元素换为第 i 行元素)

$$\overline{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ i\text{ 行} \\ \\ j\text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

由推论 1 可知,当 $i \neq j$ 时,$\overline{D}=0$. 再将它按第 j 行展开(注意到行列式 $\overline{D}$ 与行列式 D 仅第 j 行的元素不同,第 j 行的代数余子式是相同的),则又有

$$\overline{D} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}$$

从而

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = 0$$

命题得证.

由本章定理 1 与性质 6,得到如下结论:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} D, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{16}$$

或

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = \begin{cases} D, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{17}$$

第三节 行列式的计算

尽管行列式的计算方法比较多、综合性强、计算较复杂，但可以归纳出一些有效方法，主要有利用行列式的性质；利用行列式的展开式；利用递推公式和“加边”等方法.

(1) 利用行列式性质，把行列式化为上(下)三角行列式.

例 6 计算

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

解 对于这种用数字表示的没有任何规律的行列式，一般应将其化为上三角行列式.

$$D \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_2} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+5r_1]{r_2-r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-8r_2]{r_3+4r_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+\frac{5}{4}r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = 40$$

例 7 计算 $n+1$ 阶行列式

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

其中，$a_i \neq 0 (i=1,2,\cdots,n)$.

解 从第二列至第 $n+1$ 列分别提出 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，再用第一列减去其他各列，得

$$D_{n+1}=a_1a_2\cdots a_n\begin{vmatrix} a_0 & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{j=1}^{n}a_j\begin{vmatrix} a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\prod_{j=1}^{n}a_j$$

例 8 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & a \end{vmatrix}$$

解 分别将第二行至第 n 行加到第一行上去，提出公因式 $x+(n-1)a$，再将第二行至第 n 行分别减去第一行，得

$$D_n=\begin{vmatrix} x+(n-1)a & x+(n-1)a & x+(n-1)a & \cdots & x+(n-1)a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-r_1\times a}[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$