"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材　中国科学技术大学精品教材

"十二五"国家重点图书出版规划项目 | 中国科学院指定考研参考书

中国科学技术大学数学科学学院／编著

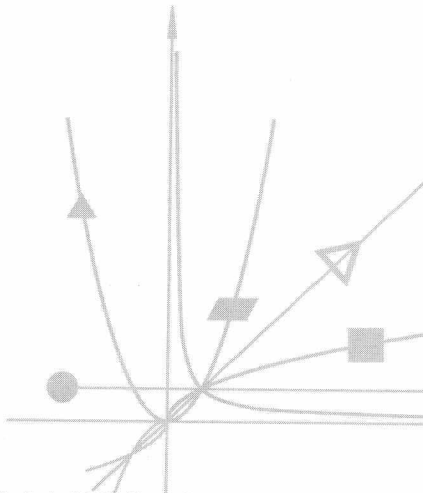
微积分学导论（上册）第2版

Introdution to Calculus

中国科学技术大学出版社

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材 中国科学技术大学精品

“十二五”国家重点图书出版规划项目 | 中国科学院指定考研参考书



中国科学技术大学数学科学学院／编著

Introdution to Calculus

微积分学导论（上册）

第2版

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书是在中国科学技术大学高等数学教研室编写的《高等数学导论》基础之上，由参与微积分教学多年的教师分工编写而成的，内容结构方面得以重新组织和优化，而且部分过于烦琐的内容也得到了删除或简化，以适应当今工科数学教育的发展，并满足培养学生的要求. 本书分上、下两册出版，内容包含微积分学的核心内容及其应用.

本书是上册，内容包括实数与函数、极限理论、单变量函数的微分学、单变量函数的积分学、微分方程等五章. 本书的编写充分考虑了学生的背景和认知水平，尽量由具体问题引入数学概念，同时采用语言描述、公式表达、数值列表以及图形说明等多种方式，以使抽象深奥的数学概念、思想和方法变得具体、生动、形象和直观. 为加深对概念、定理等的理解和掌握，书中编有丰富的例题，并有详细的解答，可给学生提供一个解决问题的范本；还提供了大量的习题或复习题供学生练习；另外，每章末的复习都很好地总结了该章的内容，以供学生参考和总结.

本书可作为理工科院校非数学专业或师范类院校数学专业的教材或教学参考书，也可供具有一定数学基础的读者自学.

图书在版编目(CIP)数据

微积分学导论. 上册/中国科学技术大学数学科学学院编著. —2 版. —合肥：中国科学技术大学出版社，2015.7

(中国科学技术大学精品教材)

“十二五”国家重点图书出版规划项目

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

中国科学院指定考研参考书

ISBN 978－7－312－03754－2

Ⅰ. 微…　Ⅱ. 中…　Ⅲ. 微积分—高等学校—教材　Ⅳ. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 156577 号

中国科学技术大学出版社出版发行

安徽省合肥市金寨路 96 号，230026

http://press.ustc.edu.cn

合肥市宏基印刷有限公司印刷

全国新华书店经销

开本：710×960　1/16　印张：26.25　插页：2　字数：503 千

2011 年 8 月第 1 版　2015 年 7 月第 2 版　2015 年 7 月第 3 次印刷

定价：49.00 元

总　　序

2008年,为庆祝中国科学技术大学建校五十周年,反映建校以来的办学理念和特色,集中展示教材建设的成果,学校决定组织编写出版代表中国科学技术大学教学水平的精品教材系列.在各方的共同努力下,共组织选题281种,经过多轮、严格的评审,最后确定50种入选精品教材系列.

五十周年校庆精品教材系列于2008年9月纪念建校五十周年之际陆续出版,共出书50种,在学生、教师、校友以及高校同行中引起了很好的反响,并整体进入国家新闻出版总署的"十一五"国家重点图书出版规划.为继续鼓励教师积极开展教学研究与教学建设,结合自己的教学与科研积累编写高水平的教材,学校决定,将精品教材出版作为常规工作,以《中国科学技术大学精品教材》系列的形式长期出版,并设立专项基金给予支持.国家新闻出版总署也将该精品教材系列继续列入"十二五"国家重点图书出版规划.

1958年学校成立之时,教员大部分来自中国科学院的各个研究所.作为各个研究所的科研人员,他们到学校后保持了教学的同时又作研究的传统.同时,根据"全院办校,所系结合"的原则,科学院各个研究所在科研第一线工作的杰出科学家也参与学校的教学,为本科生授课,将最新的科研成果融入到教学中.虽然现在外界环境和内在条件都发生了很大变化,但学校以教学为主、教学与科研相结合的方针没有变.正因为坚持了科学与技术相结合、理论与实践相结合、教学与科研相结合的方针,并形成了优良的传统,才培养出了一批又一批高质量的人才.

学校非常重视基础课和专业基础课教学的传统,也是她特别成功的原因之一.当今社会,科技发展突飞猛进、科技成果日新月异,没有扎实的基础知识,很难在科学技术研究中作出重大贡献.建校之初,华罗庚、吴有训、严济慈等老一辈科学家、教育家就身体力行,亲自为本科生讲授基础课.他们以渊博的学识、精湛的讲课艺术、高尚的师德,带出一批又一批杰出的年轻教员,培养

了一届又一届优秀学生.入选精品教材系列的绝大部分是基础课或专业基础课的教材,其作者大多直接或间接受到过这些老一辈科学家、教育家的教诲和影响,因此在教材中也贯穿着这些先辈的教育教学理念与科学探索精神.

改革开放之初,学校最先选派青年骨干教师赴西方国家交流、学习,他们在带回先进科学技术的同时,也把西方先进的教育理念、教学方法、教学内容等带回到中国科学技术大学,并以极大的热情进行教学实践,使“科学与技术相结合、理论与实践相结合、教学与科研相结合”的方针得到进一步深化,取得了非常好的效果,培养的学生得到全社会的认可.这些教学改革影响深远,直到今天仍然受到学生的欢迎,并辐射到其他高校.在入选的精品教材中,这种理念与尝试也都有充分的体现.

中国科学技术大学自建校以来就形成的又一传统是根据学生的特点,用创新的精神编写教材.进入我校学习的都是基础扎实、学业优秀、求知欲强、勇于探索和追求的学生,针对他们的具体情况编写教材,才能更加有利于培养他们的创新精神.教师们坚持教学与科研的结合,根据自己的科研体会,借鉴目前国外相关专业有关课程的经验,注意理论与实际应用的结合,基础知识与最新发展的结合,课堂教学与课外实践的结合,精心组织材料、认真编写教材,使学生在掌握扎实的理论基础的同时,了解最新的研究方法,掌握实际应用的技术.

入选的这些精品教材,既是教学一线教师长期教学积累的成果,也是学校教学传统的体现,反映了中国科学技术大学的教学理念、教学特色和教学改革成果.希望该精品教材系列的出版,能对我们继续探索科教紧密结合培养拔尖创新人才,进一步提高教育教学质量有所帮助,为高等教育事业作出我们的贡献.

侯建国

中国科学技术大学校长
中国科学院院士
第三世界科学院院士

第 2 版前言

本书第 1 版于 2011 年 8 月由中国科学技术大学出版社出版，出版后即在中国科学技术大学 2011 级新生中使用. 使用三年来，受到了师生们普遍的欢迎和肯定，并被教育部遴选为国家“十二五”规划教材.

这一版在第 1 版的基础上做了一些修订，并对个别内容作了增删或重写. 特别是增加了达布定理及其证明，并用它重新证明了换元积分法及洛必达法则等. 与第 1 版不同，这一版在“泰勒公式”一节中先讨论函数在给定点近旁的近似行为，即带有佩亚诺型余项的泰勒公式，对余项给出定性的描述；而后研究函数在大范围内的性质，即带拉格朗日型余项的泰勒公式，对余项给出了定量的估计. 在每章后面的复习思考题中，有的增加了构造性的问题，以启发学生的思维和提高学生的思考能力. 其他修订在此不一一提及. 因学时限制，有些可以不讲的内容或者较难的一些证明，我们都标记了星号，供教师选择或供学有余力的学生作为阅读材料。

参加本版修订工作的有陈祖墀教授、李思敏教授，以及宣本金、罗罗、叶盛、汪琥庭和吴健等副教授. 修订不足之处在所难免，还望专家和读者指正.

作　者

2015 年 3 月

中国科学技术大学

前　　言

本教材是在中国科学技术大学高等数学教研室编写的《高等数学导论》基础之上编写而成的.而《高等数学导论》脱胎于中国科学技术大学成立之初由曾肯成教授主编的《高等数学讲义》,是20世纪80年代由当时的任课教师集体改编而成的.这两部教材在中国科学技术大学的教学历程中都起到了积极的作用,培养了一批又一批学子,功不可没.随着时代的发展,《高等数学导论》改编重版的必要性就显得越来越紧迫了.这主要表现在以下几点:

(1)《高等数学导论》自1988年出版以来,已经二十多年了.虽然这二十多年中有过修改,但只是对错漏的订正.后来为了适应中国科学技术大学学制"五改四"的需要,教学课时和周期大大缩减,将原三册改为上、下两册出版,但是由于种种原因教材内容和结构等基本没有变动.所以,一直以来我们想对《高等数学导论》从内容方面重新撰写,并从结构方面重新组织和优化,添加一部分新内容,删除或简化一部分过于烦琐的内容,以适应今天培养大学生的要求.在本教材中有若干定理的证明加上了星号*,表示该证明利用了后面的结论或者附录中的结论,对于课时比较紧张的课堂,可以只要求学生会利用该定理的结论即可,定理证明的细节可以跳过;还有若干小节加上了星号*,表示在课时比较紧张时,可以跳过该小节内容的学习,而不影响微积分学核心内容的学习和理解,也可以安排为课外阅读内容,由授课教师根据教学进度以及学生的接受能力等决定取舍.

(2)《高等数学导论》包括解析几何和向量代数的内容,但现在这些内容已经划归为"线性代数"课程的一部分,所以应该从微积分课程中删除掉;还有一些内容也要删除,比如实数的完备性等,由于非数学系学生对于数学逻辑证明的接受能力以及教学时间紧迫等原因,这些内容一般在课堂上不

予讲授，但还穿插在教材的正文部分，使学生陷入“学”与“不学”的两难境地，给学生带来困惑，给教学带来麻烦. 本教材将改写后的实数构造理论以及实数完备性的几个等价定理，放入附录之中，可供对之感兴趣而又学有余力的学生学习. 当然这些内容对于理解建立在实数基础之上的极限理论，乃至整个微积分学都有很大的帮助. 本教材将原来分别编写在上、下两册的可积常微分方程和线性微分方程两部分内容进行整合，统一纳入到上册的“微分方程”一章. 这样有利于教学安排，节省课时，又方便学生学习理解. 同时，由于上册没有讲授幂级数知识，所以应用幂级数求解方程的内容将放入幂级数的应用之中讲授. 本教材还纠正了《高等数学导论》中若干错漏之处.

(3) 钱学森先生是中国科学技术大学近代力学系首任系主任，他对非数学系用的微积分教材的编写有过指导性建议：既要写出从哪儿来，即数学概念的“来龙”，也要写出到哪儿去，也就是用在什么地方，即数学知识的“去脉”. 钱老的这些意见是我们写作本书始终遵守的原则. 在教材编写过程中，我们充分考虑学生的背景和认知水平，尽量由具体问题引入数学概念，同时辅以几百张图片，以使那些抽象深奥的数学概念、思想和方法变得具体、生动、形象和直观. 对于微积分学中的概念、思想和方法的物理和几何背景与解释，与数学其他分支之间的联系以及理论和重要公式之间的联系都适当地写入本教材之中，以帮助学生理解，使其不但知其然，也知其所以然. 数学理论学习之后，本教材都有意地编排一些物理和几何甚至是生活中的具体应用问题，对这些问题的分析和解决，可以培养学生运用数学知识分析问题和解决问题的能力，激发其学习数学的兴趣.

(4) 华罗庚先生是中国科学技术大学应用数学和计算技术系的首任系主任，他亲自写作的《高等数学》在内容的取舍和写作方法以及叙述论证的风格等方面始终是我们本书写作过程中模仿的楷模. 我们尽量做到核心知识突出，理论体系脉络清晰，简繁适当，论证简洁清楚，枝节问题一笔带过，例题针对性强，并且分析透彻，能起到举一反三的作用，应用问题紧贴知识主题且分析细致. 在每一章之末，专门编写本章复习. 首先，将本章内容作提纲挈领性的回顾，这就是华老提出的“由厚到薄”的学习过程；其次，提出一些与正文内容紧密相连的复习思考题，以利于学生对自己的学习掌握情况作检验，引导学生再“由薄到厚”. 同时，本教材用许多开放式的思考题引导学生将数学与其他自然科学以及日常生活紧密地联系起来，增强其学习兴

趣；最后，附有一定量的具有较强综合性的复习题，帮助学生将所学知识融会贯通，提高自己解决问题的能力，其中不乏近年来的考研试题．

本书由长期参加中国科学技术大学微积分课程教学的老师们编写而成．他们是陈祖墀教授、李思敏教授，以及宣本金、罗罗、叶盛、汪琥庭及吴健等副教授．宣本金绘制了全书插图．

在此，我们对在编写本教材过程中所有给予过帮助的同事和朋友表示衷心的感谢，特别对编写《高等数学导论》的同事们表示感谢．初写《微积分学导论》，错误和不足之处在所难免，还望广大专家和读者给予指正．

作　者
2011年5月
中国科学技术大学

目　　次

第 1 章　实数与函数

1.1　实　　数

微积分学是研究实数域上函数的微分与积分等性质的学科，它的主要研究手段是极限.德国数学家魏尔斯特拉斯(K. T. W. Weierstrass，1815～1897)认为：微积分中的一切概念，如极限、连续、微分以及积分等都是建立在实数的基础之上的.因此，我们从实数学起.

1.1.1　有理数与无理数

从小学到中学，我们学习了自然数、整数、有理数和实数的概念及其运算法则.限于当时的认知水平和教学要求，教材上更多地依靠直观经验和语言文字进行描述，将有理数看成整数、分数、有限小数和无限循环小数的全体.事实上，有理数可以统一为：可以表示成两个整数之比的数.有限小数总可以表示为一个整数除以 10 的某次幂的形式，然后再进行约分化为既约分数形式，比如：

$$0.31=\frac{31}{10^2}=\frac{31}{100},\quad 0.125=\frac{125}{10^3}=\frac{1}{8};$$

无限循环小数表示为两个整数之比这个论断，则需要计算等比数列部分和的极限，即等比级数的和加以验证.下面以一个简单的例子说明这个过程：

$$\begin{aligned}0.\dot{1}&=0.1+0.01+0.001+0.0001+\cdots\\&=\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1\,000}+\frac{1}{10\,000}+\cdots\\&=\frac{1}{10}+\left(\frac{1}{10}\right)^2+\left(\frac{1}{10}\right)^3+\left(\frac{1}{10}\right)^4+\cdots.\end{aligned}$$

这是一个首项和公比均为$\frac{1}{10}$的等比数列的无穷多项之和.由中学数学可知，这个等

比数列的前 n 项和为$\frac{1}{9}\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n}\right]$.这里需要知道当求和的项数越来越大时,等比数列前 n 项和的变化情况.事实上,当 n 趋向于无穷大时,其值趋向于$\frac{1}{9}$.在以后的章节中还将详细讲解“其值趋向于”的精确含义.

有理数的全体称为有理数集,由附录 A.1 知,有理数集不仅具有“序”和加减乘除四则运算,并且对加减乘除运算是封闭的,即两个有理数的和、差、积、商(分母不为零)还是有理数.更进一步,下面我们会证明有理数集具有稠密性,即任意两个不同的有理数之间都有无穷多个有理数.这些性质使得有理数集已经基本满足我们日常生活和科学技术中的测量等实用性需要.

有理数集具有一个严重的缺陷,即它不是完备的.这种不完备性导致许多实实在在的几何或物理量不能够用有理数精确表达.例如,边长为 1 的正方形的对角线长度就无法用有理数表达.事实上,由勾股定理知,此长度为$\sqrt{2}$.正如后文所证,$\sqrt{2}$不是有理数.类似地,可以做出许多几何上确实存在,但其长度却无法用有理数表达的量.为此,我们必须引入一些不是有理数的数来表达这样的量,这就是无理数.

初等数学将无理数定义为像$\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$和 π 等无限不循环小数.这个定义虽然当时让人觉得比较形象,易于理解,但这是一个不具“操作性”的定义:首先,人们无法说明$\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$或 π 是无限不循环小数,因为不可能人工地对 2 作无穷次的开平方根运算,进而说明它是无限不循环的,即使是利用计算机也无法做到,因为计算机和人工一样只能作有限次计算;其次,人们无法利用上述形象化的定义进行有关无理数的运算和推理.

在高等数学中将无理数定义为不是有理数的实数,即不能表示成两个整数之比的实数.这个“定义”首先需要有实数这个概念,而初等数学中又将实数定义为:有理数和无理数的全体.这样,无理数和实数两者之间就是循环定义的了.为了解决这个循环定义的问题,历史上许多数学家做出了艰苦的努力,最终发展出几种通过有理数构造性地定义无理数和实数的方法,例如戴德金(J. W. R. Dedekind, 1831～1916)分割法和康托尔(G. Cantor, 1845～1918)有理基本序列法等.有关实数的构造请参看附录 A.2.

利用“不能表示成两个整数之比的实数”这个定义和反证法,我们可以证明某个具体数如$\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$或 π 是无理数.

例 1.1.1 证明:$\sqrt{2}$是无理数.

证明　反证法.假设$\sqrt{2}$是有理数,即它可表示为两个正整数之比的形式(因为$\sqrt{2}$是正数),不妨设$\sqrt{2}=p/q$ (p,q 为正整数),且 p/q 为既约分数,即 p 和q 互素,则

$$2=p^2/q^2,\quad 即\quad p^2=2q^2.$$

可知 p^2 为偶数.

断言　平方为偶数的整数自身也是偶数,或等价地,奇数的平方仍是奇数.

这只需经简单计算便知:设 $l=2k+1$ 为奇数,k 为整数,那么 $l^2=(2k+1)^2=4(k^2+k)+1$也是奇数.

由上述断言可知,p 也是偶数.不妨设 $p=2k$,代入表达式 $p^2=2q^2$ 中,化简可得 $q^2=2k^2$,即 q^2 也是偶数.同理,由上述断言可知,q 也是偶数.这样,同为偶数的 p 和q 至少有公因数 2,这与假设"p 和q 互素"矛盾,从而$\sqrt{2}$是无理数.　□

类似地,可以证明$\sqrt{3}$,$\sqrt{2}+\sqrt{3}$等都是无理数.当然,π 的无理性证明还需要深刻的数学知识,我们将在后面适当的时候给出证明.无理数的发现揭示了这样的事实:有理数在数轴上所对应的有理点不能充满整个数轴,在数轴上,除了有理点之外,还有空隙.这些空隙所对应的数就是无理数,表示无理数的点称为无理点,我们把有理数和无理数的全体称为实数.附录 A.3 中的实数完备性定理说明,实数能够充满整个数轴,故称数轴为实数轴.每个实数与实数轴上的一个点对应,反之亦然,以后将不再区分实数及其在数轴上对应的点.为了对无理数进行运算和推理,我们需要将对有理数施行的运算和推理推广到无理数和全体实数上.附录 A.1 列举了一些有理数的重要性质,例如,有理数的"序"、加法和乘法及其运算规律,减法和除法分别作为加法和乘法的逆运算而被引入.利用有理数的序、四则运算的性质,我们可以证明有理数的**稠密性**.

定理 1.1.1(有理数的稠密性)　若有理数 $a>b$,则必存在有理数 c,使得

$$a>c,\quad 且\quad c>b.$$

事实上,可以选取 $c=\dfrac{a+b}{2}$,即有 $a>\dfrac{a+b}{2}>b$.再对 a 及c、c 及 b 应用定理 1.1.1,并一直递推下去,可以知道,在数 a 和b 之间有无穷多个有理数.

有理数是我们日常生活和科学技术中用于测量和计算的数.它的稠密性保证了测量和计算可以达到我们所需要的精度,因此就实用性而言,有理数是完全够用的.下面以一条简单而重要的性质结束对有理数基本性质的讨论.

性质 1.1.1(有理数的阿基米德公理)　对任意有理数 $c>0$,总存在自然数 n,使得 $n>c$.

实际上，阿基米德（Archimedes，约前 287～前 212）曾说明一个关于几何线段测量的命题，即众所周知的阿基米德公理：

若在直线上给定任意线段 a 及 b，则 a 重复相加若干次后，其和总可以大于 b.

上述命题事实上就是说：对于任意有限长的给定线段 b 和长度为 a 的带刻度的尺子，我们总可以用该尺子测量出 b 的长度（在一定精度之下）. 将这个命题转而对整数 a 及 b 来叙述，就是存在自然数 n，使得

$$\underbrace{a+a+\cdots+a}_{n\text{ 次}} = a \cdot n > b,$$

即 $n > \dfrac{b}{a} = c$，这就是性质 1.1.1.

利用附录 A.2 中戴德金分割的方式，可以由有理数集构造性地定义无理数和实数，并且可以以上述有理数诸性质为基础，演绎推导出实数也满足类似性质. 事实上，只要将性质 1.1.1 和定理 1.1.1 中的“有理数”直接替换成“实数”即可. 实数集合由于也满足加法和乘法的运算性质，所以也称为实数域. 我们将不再列举实数情形的“序”和加减乘除四则运算的性质.

为了后文需要，我们介绍**邻域**和**去心邻域**这两个概念. 对于给定的实数 a 和正实数 r，区间 $(a-r, a+r) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < r\}$ 称为以 a 为中心、r 为半径的邻域，或 a 的 r 邻域（图 1.1）；而集合 $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x-a| < r\}$ 是上述区间去除中心 a 后得到的，称为 a 的 r 去心邻域（图 1.2）.

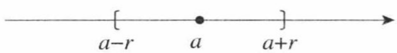


图 1.1 a 的 r 邻域示意

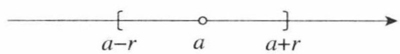


图 1.2 a 的 r 去心邻域示意

1.1.2 确界原理

本小节研究实数的另外一个极为重要的性质——**完备性**. 正是这条性质使得实数域在本质上异于有理数域，实数域可以毫无缝隙地铺满整个数轴，而有理数则不可能铺满整个数轴. 实数的完备性也是微积分的极限运算得以在实数域上施行的重要保证，所以它是整个微积分概念的基础.

实数的完备性具有很多等价的形式，为了便于后面的应用，这里我们将选取一种叙述形式——**确界原理**，为此我们需要数集的**界**这个概念. 集合在数学上是一个无法明确定义的概念，只能描述其基本性质，即确定性、无序性和互异性. 中学教材