(2015)

高等数学试题分析

GAODENGSHUXUE SHITI FENXI

东南大学大学数学教研室 编

历 年 试 题 精 讲

典 型 习 题 精 练

权 威 专 家 精 析

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

高等数学试题分析(2015)

东南大学大学数学教研室 编

东 南 大 学 出 版 社
·南京·

内容提要

本书收录了东南大学近十多年来的高等数学(工科专业)试题，并按内容作了分类，对其中的大部分试题作了详尽的分析和解答，部分题目还给出了多种解法.另有一部分试题被选作习题，供读者练习.本书还在附录中收录了东南大学近三年的高等数学试卷和近十年东南大学高等数学竞赛试卷，并对竞赛试题进行了解析.

本书内容丰富，题型多样，可作为高等学校理工科专业的学生学习高等数学课程和参加高等数学竞赛的参考书，也可用作工科研究生数学入学考试的复习用书，还可用作教师的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学试题分析. 2015 / 东南大学大学数学教研室编. —南京：东南大学出版社，2015. 9

ISBN 978-7-5641-5960-3

Ⅰ.①高… Ⅱ.①东… Ⅲ.①高等数学—高等学校—题解 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 178390 号

高等数学试题分析(2015)

出版发行 东南大学出版社
社　　址 南京市四牌楼 2 号(邮编:210096)
出 版 人 江建中
责任编辑 吉雄飞(办公电话:025—83793169)
经　　销 全国各地新华书店
印　　刷 南京京新印刷厂
开　　本 700mm×1000mm　1/16
印　　张 18
字　　数 353 千字
版　　次 2015 年 9 月第 1 版
印　　次 2015 年 9 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5641-5960-3
定　　价 35.80 元

前　言

高等数学是一年级大学生必修的重要基础课。为了使同学们更好地理解和掌握高等数学的基本概念、基本理论和基本方法，培养自学能力和分析问题、解决问题的能力，提高数学素养，我们选编了这本《高等数学试题分析》。

本书中的试题是从我校近十年的期中、期末试题中挑选出来的，按内容分为函数、极限与连续，一元函数微分学，一元函数积分学，微分方程，无穷级数，向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学，复变函数等九个部分。每个部分一般包含填空题、选择题、计算题、证明题、应用题、综合题及练习题等七种类型。对每道试题，一般都进行了适当的分析，着重说明解题的基本思路和方法，给出了主要解题过程和答案。有的题目有多种解法，书中只列出了一至两种；书中给出的解法也未必是最好的，只是希望能起到启迪思维、开阔思路的作用。

本书在2014年版的基础上进行了修订，删减了一部分例题，同时对原书中2010级和2011级高等数学期中、期末考试的试题进行了解答，加入到"试题分析"部分，在附录中增加了2013级和2014级的高等数学期中、期末考试的试题，并对试题的格式进行了适当调整。另本书新增了东南大学2015年的高等数学竞赛试题，并对竞赛试题进行了详细的解析，更方便同学们参考。

本书再版，是本教研室对高等数学教学改革取得较好成绩的反映。虽然本书内容选自东南大学试卷，但对所有学习该门课程的学生和报考研究生的学生都有一定的参考价值。

本书由黄骏主编，陈文彦、张勤、贺丹、陈和等老师协助整理、打印和校对书稿。教研室的许多老师都对本书的出版提出了宝贵意见，在此一并对他们表示感谢。本书中缺点和错误在所难免，欢迎同学们批评指正。

作者电子邮箱：jhuang_math@163.com。

编　者

2015年6月

目　录

第 1 章　函数、极限与连续

1.1　试题分析

1.1.1　填空题

1. 设 $f(x)=\dfrac{x}{1-x}(x\neq 1)$，则 $f(f(x))=$ ________.

解　此题主要考察复合函数概念. 根据题意，得

$$f(f(x))=\frac{f(x)}{1-f(x)}\quad(x\neq 1\text{ 且 }f(x)\neq 1)$$

$$=\frac{\dfrac{x}{1-x}}{1-\dfrac{x}{1-x}}=\frac{x}{1-2x}\quad\left(x\neq 1\text{ 且 }x\neq\frac{1}{2}\right)$$

2. 若 $f(x)=\begin{cases}1+x, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $f(f(x))=$ ________.

解　此题主要考察分段函数概念及分段函数复合的基本方法. 因为

$$f(f(x))=\begin{cases}1+f(x), & f(x)<0,\\ 1, & f(x)\geqslant 0\end{cases}$$

解不等式 $f(x)<0$，得 $x<-1$，此时 $1+f(x)=1+(1+x)=2+x$；解不等式 $f(x)\geqslant 0$，得 $x\geqslant -1$. 因此

$$f(f(x))=\begin{cases}2+x, & x<-1,\\ 1, & x\geqslant -1\end{cases}$$

注　此题也可以通过引进中间变量 $u=f(x)$ 及利用函数 $y=f(u)$，$u=f(x)$ 的图像得到 $f(f(x))$ 的表达式，读者不妨一试.

3. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$，则 $a=$ ________.

解　利用重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 及复合函数求极限的法则，有

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}}\right]^{\frac{3ax}{x-a}}=\mathrm{e}^{3a}=8$$

从而 $a=\ln 2$.

4. 设 a,b,c 均为正数，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}=$ ________.

解 这是利用夹逼定理求极限的题目.

令 $d=\max\{a,b,c\}$，则 $d\leqslant\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}\leqslant\sqrt[n]{3}d$. 令 $n\to\infty$，注意到 $\sqrt[n]{3}\to 1$，由夹逼定理即得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}=\max\{a,b,c\}$$

5. 设

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0;\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases}x+1, & x<1,\\ x, & x\geqslant 1\end{cases}$$

则 $f(x)+g(x)$ 的间断点为________.

解 因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续，$g(x)$ 的间断点为 $x=1$，所以由连续函数的性质知 $x=1$ 是 $f(x)+g(x)$ 的间断点.

或者先写出 $f(x)+g(x)$ 的解析表达式：

$$f(x)+g(x)=\begin{cases}1+x, & x<0,\\ 2x+1, & 0\leqslant x<1,\\ 2x, & x\geqslant 1\end{cases}$$

然后再检验分段点 $x=0$ 与 $x=1$ 是否是间断点. 例如对 $x=1$，因为

$$\lim_{x\to1^-}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to1^-}(2x+1)=3,\quad \lim_{x\to1^+}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to1^+}2x=2$$

可见 $\lim\limits_{x\to1}(f(x)+g(x))$ 不存在，所以 $x=1$ 是 $f(x)+g(x)$ 的间断点.

6. 函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$ 的间断点为________，类型为________.

解 去掉绝对值，写出 $f(x)$ 的表达式：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x>0,\\[2mm] -\dfrac{\sin x}{x}, & x<0\end{cases}$$

易见 $x=0$ 是 f 的间断点，且 $f(x+0)=1$，$f(x-0)=-1$，所以 $x=0$ 是 f 的第一类间断点.

7. 当 $x\to 0$ 时，无穷小量 $x^2-\sin x$ 是 x 的____阶无穷小.

解 根据无穷小量阶的比较的概念及重要极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 即可得结论.

因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-\sin x}{x}=-1\neq 0$，所以当 $x\to 0$ 时，$x^2-\sin x$ 是 x 的一阶无穷小. (或填“同”)

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x+\mathrm{e}^{2ax}-1}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则

$a =$ ________.

解　显然,当 $x \neq 0$ 时 f 连续,又由 f 在 $x = 0$ 处连续的定义知 $a = \lim\limits_{x \to 0} f(x)$,而

$$a = \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x} + \lim_{x \to 0} \frac{e^{2ax} - 1}{x} = 2 + 2a$$

所以 $a = -2$.

9. 设

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a\ln(1+2x)}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}, & -\dfrac{1}{2} < x < 0, \\ 2, & x = 0, \\ \dfrac{\sin bx}{x}, & 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

在 $x = 0$ 处连续,则 $a =$ ________,$b =$ ________.

解　因为

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin bx}{x} = b$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{a\ln(1+2x)}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} = \lim_{x \to 0^-} \frac{2ax(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{2x} = 2a$$

由函数在 $x = 0$ 处连续知 $b = 2a = 2$,所以 $a = 1, b = 2$.

10. 设 $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1 + x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}}$,则 $f(x)$ 在 $x =$ ________ 处间断,其类型是 ________ 间断点.

解　这是用极限定义的函数,极限值依赖于 x 的取值. 由

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x, & x < 0, \\ \dfrac{1}{2}, & x = 0, \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$$

易知 $x = 0$ 是第一类间断点.

11. 函数 $f(x) = \left[\dfrac{1}{1 + |x|}\right]$ 的间断点 ________ 是第 ________ 类间断点.

解　由取整函数的定义知

$$f(x) = \left[\frac{1}{1 + |x|}\right] = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

易知 $x = 0$ 是第一类间断点.

12. 已知 $f(x) = \begin{cases} (1 + 2x)^{\frac{1}{\sin x}}, & x > 0, \\ ae^x, & x \leqslant 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续,则 $a =$ ________.

解 首先考察$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$，接着考察$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$，再注意到$f(x)$在$x=0$处连续当且仅当$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$. 因为

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(1+2x)^{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to0^+}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot\frac{2x}{\sin x}}=\mathrm{e}^2$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}a\mathrm{e}^x=a$$

于是$a=\mathrm{e}^2$.

13. 设当$x\to0$时，$\sin(2x)-2\sin x$与x^n是同阶无穷小，则$n=$________.

解 根据 Maclauris 公式，有

$$\sin(2x)-2\sin x=2x-\frac{2^3}{3!}x^3-2x+\frac{2}{3!}x^3+o(x^3)=-x^3+o(x^3)$$

于是$n=3$.

14. 函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+1}{x^{2n}+1}(n\in\mathbf{N}^*)$的间断点是$x=$________，该间断点是第________类间断点.

解 这是用极限定义的函数，极限值依赖于x的取值. 由

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & -1<x<1,\\ 1, & x=1,\\ 0, & -\infty<x\leqslant-1,1<x<+\infty\end{cases}$$

易知$x=1$是间断点，且是第一类间断点.

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{(x-a)(x-b)}\right)^x=$________.

解 利用重要极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$，即得

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{(x-a)(x-b)}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{(a+b)x-ab}{(x-a)(x-b)}\right)^{\frac{(x-a)(x-b)}{(a+b)x-ab}\cdot\frac{(a+b)x^2-abx}{(x-a)(x-b)}}=\mathrm{e}^{a+b}$$

1.1.2 单项选择题

1. 设$f(x)=\dfrac{\sin(x+1)}{1+x^2}$，$-\infty<x<+\infty$，则此函数是 ( )

(A) 有界函数 (B) 奇函数 (C) 偶函数 (D) 周期函数

解 根据奇、偶函数及周期函数的定义及$\sin x$的性质立即可以否定(B)，(C)，(D)，故选(A). 或者由$|f(x)|=\dfrac{|\sin(x+1)|}{x^2+1}\leqslant1$，$x\in(-\infty,+\infty)$，可知$f$是$(-\infty,+\infty)$上的有界函数.

2. 极限$\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\ln\left(1+\dfrac{4}{x}\right)-\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\right]$ ( )

(A) 不存在　　(B) 等于 5　　(C) 等于 3　　(D) 等于 0

解　利用已知极限$\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\ln(1+t)}{t}=1$及极限的四则运算法则，有

$$原式=\lim_{x\to\infty}\frac{4\ln\left(1+\dfrac{4}{x}\right)}{\dfrac{4}{x}}+\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}{-\dfrac{1}{x}}=4+1=5$$

或者利用重要极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$及连续函数求极限的法则可得

$$\begin{aligned}原式&=\lim_{x\to\infty}x\ln\frac{x+4}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\ln\left[\left(1+\frac{5}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{5}}\right]^{\frac{5x}{x-1}}\\&=\ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{5}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x}{x-1}}=\ln\mathrm{e}^5=5\end{aligned}$$

3. 设 $f(x)=\begin{cases}(1+x)\arctan\dfrac{1}{x^2-1}, & |x|\neq1,\\ -1, & |x|=1,\end{cases}$ 则 $x=-1$ 为 $f(x)$ 的　　(　　)

(A) 跳跃间断点　　(B) 第二类间断点

(C) 可去间断点　　(D) 连续点

解　判断 $x=x_0$ 是函数 $f(x)$ 的连续点还是间断点的基本方法是根据定义. 此题由于 $x>-1$ 与 $x<-1$ 时函数 f 的表达式相同，所以不需讨论 f 在 $x=-1$ 处的左极限与右极限，而直接讨论极限$\lim\limits_{x\to-1}f(x)$.

因为$\left|\arctan\dfrac{1}{x^2-1}\right|<\dfrac{\pi}{2}(|x|\neq1)$，$\lim\limits_{x\to-1}(x+1)=0$，所以

$$\lim_{x\to-1}(x+1)\arctan\frac{1}{x^2-1}=0\quad（有界变量与无穷小量的乘积仍是无穷小量）$$

又 $f(-1)=-1\neq0$，故 $x=-1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

4. 设$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-\mathrm{e}^{-x^2})}=2$，其中 a,b,c,d 为常数，$a^2+c^2\neq0$，则必有　　(　　)

(A) $a=-4c$　　(B) $a=4c$　　(C) $b=-4d$　　(D) $b=4d$

解　此题是已知函数 f 的极限值，要确定 f 中所含常数的关系，利用常用的一些重要极限和极限的运算法则即可解决. 因为

$$\lim_{x\to0}\frac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-\mathrm{e}^{-x^2})}=\lim_{x\to0}\frac{a\dfrac{\tan x}{x}+b\dfrac{1-\cos x}{x}}{c\dfrac{\ln(1-2x)}{x}+d\dfrac{1-\mathrm{e}^{-x^2}}{x}}$$

$$= \frac{a+0}{-2c+0} = \frac{a}{-2c} = 2$$

所以 $a = -4c$.

5. 设函数 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x+1}{x^{2n}+1} (n \in \mathbf{N}^*)$,则 $f(x)$ ( )

(A) 不存在间断点 (B) 存在间断点 $x = 1$

(C) 存在间断点 $x = -1$ (D) 存在间断点 $x = 0$

解 写出 $f(x)$ 的表达式,即

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & |x| < 1, \\ 0, & |x| > 1, \\ 1, & x = 1, \\ 0, & x = -1 \end{cases}$$

可知 $x = 1$ 是间断点.

6. 设 $f(x)$,$g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义,$f(x)$ 为连续函数,且 $f(x) \neq 0$,$g(x)$ 有间断点,则 ( )

(A) $g(f(x))$ 必有间断点 (B) $[g(x)]^2$ 必有间断点

(C) $f(g(x))$ 必有间断点 (D) $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 必有间断点

解 当 f 的值域中不含 g 的间断点时,$g(f(x))$ 连续,故(A) 不对;当

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数}, \\ -1, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

时,$[g(x)]^2 = 1$ 连续,所以(B) 也不对;当 f 为常值函数时,$f(g(x))$ 连续,因此(C) 不对;(D) 是对的,可用反证法证明,留给读者.

7. 设当 $x \to x_0$ 时,$\alpha(x)$,$\beta(x)$ 都是无穷小($\beta(x) \neq 0$),则当 $x \to x_0$ 时,下列表达式中不一定为无穷小量的是 ( )

(A) $\dfrac{\alpha^2(x)}{\beta(x)}$ (B) $\alpha^2(x) + \beta^2(x) \sin \dfrac{1}{x}$

(C) $\ln(1 + \alpha(x) \cdot \beta(x))$ (D) $|\alpha(x)| + |\beta(x)|$

解 可取 $\alpha(x) = x$,$\beta(x) = x^3$,易知选(A).

8. 设 $f(x) = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{x^2 e^{t(x-2)} + ax - 1}{e^{t(x-2)} + 1}$,若 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续,则常数 $a =$ ( )

(A) 5 (B) 4 (C) $\dfrac{7}{2}$ (D) $\dfrac{5}{2}$

解 先求极限得到 $f(x)$ 的表达式,即

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x>2, \\ \dfrac{3+2a}{2}, & x=2, \\ ax-1, & x<2 \end{cases}$$

再由函数在 $x=2$ 处连续知 $a=\dfrac{5}{2}$.

9. 极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ （　　）

(A) 不存在但不为 ∞　　(B) 等于 2

(C) 等于 0　　(D) 为 ∞

解　因为 $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=0$，所以选(A).

10. 当 $x\to 0$ 时，$x-\sin ax$ 与 $x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小，则 （　　）

(A) $a=1,b=-\dfrac{1}{6}$　　(B) $a=1,b=\dfrac{1}{6}$

(C) $a=1,b=-\dfrac{1}{6}$　　(D) $a=-1,b=\dfrac{1}{6}$

解　当 $x\to 0$ 时，因为

$$x-\sin ax=(1-a)x+\frac{a^3}{3!}x^3+o(x^3)$$

$$x^2\ln(1-bx)\sim -bx^3$$

所以 $a=1,b=-\dfrac{1}{6}$，选(A).

11. 函数 $f(x)=\dfrac{\frac{\pi}{2}x\arctan\frac{1}{x-1}}{\sin\frac{\pi x}{2}}$ 的间断点 （　　）

(A) 都是可去间断点

(B) 都是跳跃间断点

(C) 都是无穷间断点

(D) 分别是可去间断点、跳跃间断点与无穷间断点

解　判断 $x=x_0$ 是函数 $f(x)$ 的连续点还是间断点的基本方法是根据定义. 此题由于 $x=1$ 及 $x=2n(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时 $f(x)$ 无定义，因此都是间断点. 在其他点处，$f(x)$ 都连续. 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\pi}{2}x\arctan\frac{1}{x-1}}{\sin\frac{\pi x}{2}}=-\frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x\to 2n}\frac{\frac{\pi}{2}x\arctan\frac{1}{x-1}}{\sin\frac{\pi x}{2}}=\infty\quad(n\neq 0)$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{\pi}{2}x\arctan\frac{1}{x-1}}{\sin\frac{\pi x}{2}}=-\frac{\pi^2}{4},\quad \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{\pi}{2}x\arctan\frac{1}{x-1}}{\sin\frac{\pi x}{2}}=\frac{\pi^2}{4}$$

所以 $x=0$ 是可去间断点，$x=1$ 是跳跃间断点，$x=2n(n\neq 0)$ 是无穷间断点，故应选(D).

1.1.3 计算题

1. 计算 $\lim\limits_{t\to 0}(-\sin 3t+\cos t)^{\frac{1}{t}}$.

分析 这是幂指函数 $[u(t)]^{v(t)}$ 的极限问题，由于 $\lim\limits_{t\to 0}u(t)=1$，$\lim\limits_{t\to 0}v(t)=\infty$，所以可利用第二个重要极限及复合函数求极限的法则计算.

解 原式 $=\lim\limits_{t\to 0}[1+(\cos t-1-\sin 3t)]^{\frac{1}{\cos t-1-\sin 3t}\cdot\frac{\cos t-1-\sin 3t}{t}}$

$$=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\cos t-1-\sin 3t}{t}}=e^{-3}$$

注 本题将来也可利用 L'Hospital 法则计算.

2. 求 $f(x)=\dfrac{(x+1)\sin x}{|x|(x^2-1)}$ 的连续区间与间断点，并指出间断点的类型(要说明理由).

分析 对初等函数来说，根据“初等函数在其定义区间内连续”的基本结论，要求 f 的连续区间，只要求出 f 的定义区间，使函数 f 无定义的点即为其间断点，再根据间断点分类的知识判断其类型.

解 f 的连续区间为 $(-\infty,-1),(-1,0),(0,1),(1,+\infty)$，间断点为 $x=-1$，$x=0$ 和 $x=1$.

因为 $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)\sin x}{-x(x+1)(x-1)}=\dfrac{1}{2}\sin 1$，故 $x=-1$ 是可去间断点；

因为 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)\sin x}{x(x+1)(x-1)}=\infty$，故 $x=1$ 是第二类(无穷)间断点；

因为

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{(x+1)\sin x}{|x|(x^2-1)}=-1$$

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{(x+1)\sin x}{|x|(x^2-1)}=1\neq f(0+0)$$

所以 $x=0$ 是函数 f 的第一类间断点.

3. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}$，试求 $f(x)$ 的连续区间与间断点，并指出间断点的类型（要说明理由）.

解　f 的间断点为 $x=0,x=1$；连续区间是 $(-\infty,0),(0,1),(1,+\infty)$.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\infty$，所以 $x=0$ 是 f 的第二类间断点；

因为

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1^-}f(x)=0,\quad f(1+0)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=1\neq f(1-0)$$

所以 $x=1$ 是 f 的第一类间断点.

4. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)^x$.

解　因为

$$\begin{aligned}\left(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)^x&=\exp(x\ln(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}))=\exp(x\ln\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}(1+\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}))\\&=\exp(1+x\ln(1+\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}))\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0^+}x\ln\left(1+\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\right)=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{-t})}{t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t\mathrm{e}^t}=0\quad\left(t=\frac{1}{x}\right)$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)^x=\mathrm{e}$.

5. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n^2+1}+\dfrac{n+2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n+n}{n^2+n}\right)$.

解　记 $a_n=\dfrac{n+1}{n^2+1}+\dfrac{n+2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n+n}{n^2+n}$，则

$$\frac{n^2+\dfrac{n(n+1)}{2}}{n^2+n}\leqslant a_n\leqslant\frac{n^2+\dfrac{n(n+1)}{2}}{n^2+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+\dfrac{n(n+1)}{2}}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+\dfrac{n(n+1)}{2}}{n^2+1}=\frac{3}{2}$$

因此，由夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{3}{2}$.

1.1.4　证明题

1. 设 $x_1=1,x_{n+1}=\sqrt{x_n+1}(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求此极限.

分析　证明数列 $\{x_n\}$ 收敛的方法通常有三个：一是用单调有界原理，二是用 Cauchy 收敛准则，三是用夹逼定理. 由于本题的数列是用递推关系给出的，所以首先考虑用单调有界原理证明 $\{x_n\}$ 收敛，再用递推关系求出极限.

解　因为 $x_1=1>0$，由递推关系 $x_{n+1}=\sqrt{1+x_n}$，易知对一切 $n\in\mathbf{N}^*$，

$x_n>0$，而 $x_2=\sqrt{1+x_1}=\sqrt{2}>x_1$，设 $x_n>x_{n-1}$，则

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{1+x_n}-\sqrt{1+x_{n-1}}=\frac{x_n-x_{n-1}}{\sqrt{1+x_n}+\sqrt{1+x_{n-1}}}>0$$

由数学归纳法知，对一切 n 有 $x_{n+1}>x_n$，即数列 $\{x_n\}$ 单调增加. 又 $x_1=1<2$，设 $x_n<2$，则 $x_{n+1}=\sqrt{1+x_n}<\sqrt{1+2}=\sqrt{3}<2$，故对一切 n，有 $x_n<2$，即数列 $\{x_n\}$ 有上界. 由单调有界原理，可知数列 $\{x_n\}$ 收敛. 现设该数列的极限为 l，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$. 在递推公式两边令 $n\to\infty$ 取极限，得 $l=\sqrt{1+l}$，由此得到 $l=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ $\Big($由极限性质，应舍去负根 $l=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

2. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点处连续，并且 $f(x_0)>0$，试证明：存在 x_0 的邻域，使得在此邻域内有 $kf(x)>f(x_0)$，其中常数 $k>1$.

分析 要证在 x_0 附近 $f(x)>\dfrac{f(x_0)}{k}$，而函数 f 在 x_0 处连续，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，显然 $f(x_0)>\dfrac{f(x_0)}{k}(k>1)$，这样一来，问题转化为由函数极限大于某一常数，要证在 x_0 附近的函数值大于该常数. 这正是函数极限的性质.

证 因 f 在 x_0 处连续，所以 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，又 $f(x_0)>\dfrac{f(x_0)}{k}(k>1)$，故

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)>\frac{1}{k}f(x_0)$$

由函数极限定义，对 $\varepsilon=\dfrac{k-1}{k}f(x_0)$，存在 x_0 的某个邻域，使得在此邻域内有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,\quad 即\quad f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon$$

由此得到 $f(x)>f(x_0)-\varepsilon=f(x_0)-\dfrac{k-1}{k}f(x_0)=\dfrac{1}{k}f(x_0)$ 在 x_0 的某邻域内成立.

3. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，且 $f(0)=f(2a)$，证明：存在一点 $\xi\in[0,a]$，使得 $f(\xi)=f(a+\xi)$.

分析 要证 $f(\xi)-f(a+\xi)=0$，即要证方程 $f(x)-f(a+x)=0$ 在区间 $[0,a]$ 上有一实根 $x=\xi$，或函数 $F(x)=f(x)-f(a+x)$ 在 $[0,a]$ 上有一零点 $x=\xi$，于是问题转化为检验 $F(x)$ 在 $[0,a]$ 上是否满足零点定理的条件.

证 构造辅助函数

$$F(x)=f(x)-f(a+x)\quad(0\leqslant x\leqslant a)$$

显然 $F\in C[0,a]$，又

$$F(0)=f(0)-f(a),\quad F(a)=f(a)-f(2a)=f(a)-f(0)$$

于是

$$F(0)F(a) = -(f(0) - f(a))^2 \leqslant 0$$

若上式最后的等号成立，则可取 $\xi = 0$ 或 $\xi = a$；若 $F(0)F(a) < 0$，则由闭区间上连续函数的零点定理知，存在 $\xi \in (0,a)$，使 $F(\xi) = 0$，即 $f(\xi) = f(a+\xi)$.

4. 设正数数列 $\{x_n\}$ 满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = l < 1$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解法一　由极限的保序性可知存在正整数 N，当 $n > N$ 时，$\dfrac{x_{n+1}}{x_n} < 1$，因此数列 $\{x_n\}$ 单调减($n > N$). 又因 $x_n > 0$，根据单调有界原理，数列 $\{x_n\}$ 收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$，则 $a \geqslant 0$. 若 $a \neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{a}{a} = 1$，与 $l < 1$ 矛盾. 故 $a = 0$.

解法二　由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = l < 1$，所以对于 $\varepsilon = \dfrac{1-l}{2} > 0$，存在正整数 N，使当 $n > N$ 时，有 $\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n} - l\right| < \varepsilon$，推得 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} < l + \varepsilon = \dfrac{1+l}{2} < 1$. 于是，当 $n > N$ 时

$$\frac{x_{N+1}}{x_N}\frac{x_{N+2}}{x_{N+1}}\cdots\frac{x_n}{x_{n-1}} < \left(\frac{1+l}{2}\right)^{n-N}$$

即 $0 < x_n < x_N\left(\dfrac{1+l}{2}\right)^{n-N}$，令 $n \to \infty$，由夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = 0$.

5. 设 $x_1 = \dfrac{1}{2}$，$x_{n+1} = \dfrac{1+x_n^2}{2}(n = 1,2,\cdots)$，利用单调有界收敛准则证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解　由题意可知

$$x_{n+1} = \frac{1+x_n^2}{2} \geqslant x_n, \quad x_1 = \frac{1}{2} < 1,$$

再设 $x_n < 1$，则

$$x_{n+1} = \frac{1+x_n^2}{2} < 1$$

即数列 $\{x_n\}$ 单调增加且有上界，所以 $\{x_n\}$ 收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = l$，则

$$l = \frac{1+l^2}{2} \Rightarrow l = 1$$

1.2　练习题

1. 设 $f(x) = \dfrac{x}{x-1}(x \neq 1)$，求 $f(f(f(f(x))))$.