"十二五"国家重点图书出版规划项目

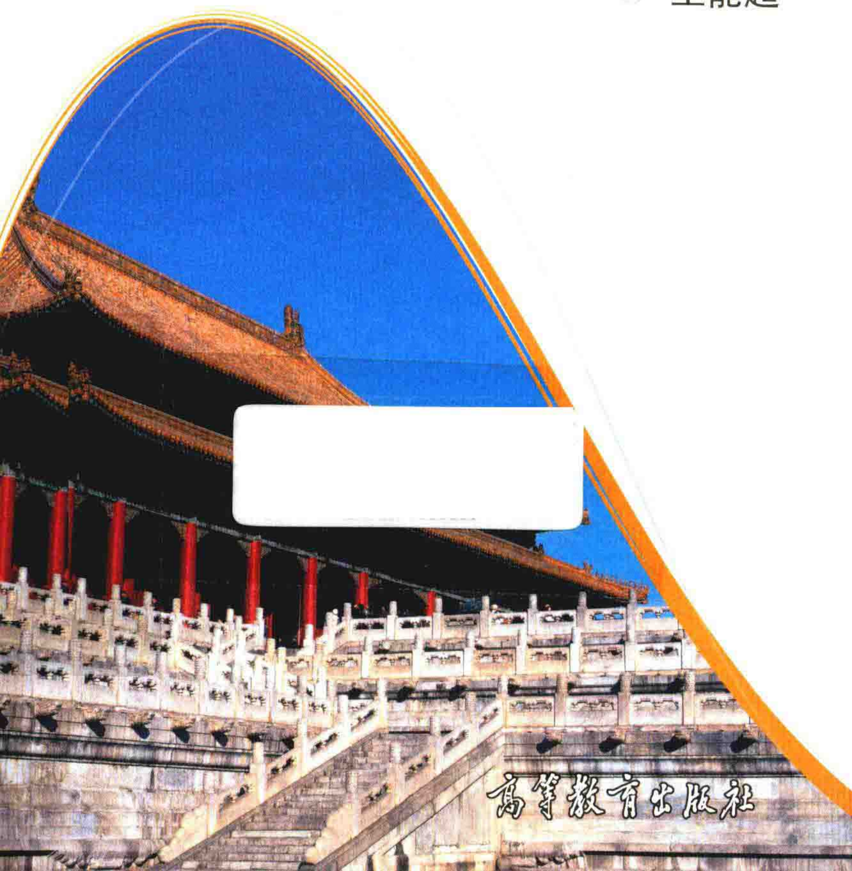
29

数学文化小丛书

李大潜 主编

探秘古希腊数学

王能超



高等教育出版社

“十二五”国家重点图书出版规划项目

数学文化小丛书

李大潜 主编

探秘古希腊数学

Tanmi Guxila Shuxue

王能超

高等教育出版社·北京

图书在版编目（CIP）数据

探秘古希腊数学 / 王能超编 . -- 北京 : 高等教育出版社 , 2016. 3

(数学文化小丛书 / 李大潜主编 . 第 3 辑)

ISBN 978-7-04-044728-6

Ⅰ . ①探… Ⅱ . ①王… Ⅲ . ①古典数学 – 古希腊 – 普及读物 Ⅳ . ① O1–49

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 019916 号

项目策划 李艳馥 李 蕊

策划编辑 李 蕊 责任编辑 李艳馥 封面设计 张 楠
版式设计 童 丹 插图绘制 杜晓丹 责任校对 刁丽丽
责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	网　　址	http://www.hep.edu.cn
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　　刷	北京鑫丰华彩印有限公司		http://www.hepmall.com
开　　本	787mm× 1092mm 1/32		http://www.hepmall.cn
印　　张	1.75		
字　　数	32 千字	版　　次	2016 年 3 月第 1 版
购书热线	010–58581118	印　　次	2016 年 3 月第 1 次印刷
咨询电话	400–810–0598	定　　价	6.00 元

物 料 号 44728-00

数学文化小丛书编委会

数学文化小丛书总序

整个数学的发展史是和人类物质文明和精神文明的发展史交融在一起的。数学不仅是一种精确的语言和工具、一门博大精深并应用广泛的科学，而且更是一种先进的文化。它在人类文明的进程中一直起着积极的推动作用，是人类文明的一个重要支柱。

要学好数学，不等于拼命做习题、背公式，而是要着重领会数学的思想方法和精神实质，了解数学在人类文明发展中所起的关键作用，自觉地接受数学文化的熏陶。只有这样，才能从根本上体现素质教育的要求，并为全民族思想文化素质的提高夯实基础。

鉴于目前充分认识到这一点的人还不多，更远未引起各方面足够的重视，很有必要在较大的范围内大力进行宣传、引导工作。本丛书正是在这样的背景下，本着弘扬和普及数学文化的宗旨而编辑出版的。

为了使包括中学生在内的广大读者都能有所收益，本丛书将着力精选那些对人类文明的发展起过重要作用、在深化人类对世界的认识或推动人类对世界的改造方面有某种里程碑意义的主题，由学有

专长的学者执笔，抓住主要的线索和本质的内容，由浅入深并简明生动地向读者介绍数学文化的丰富内涵、数学文化史诗中一些重要的篇章以及古今中外一些著名数学家的优秀品质及历史功绩等内容。每个专题篇幅不长，并相对独立，以易于阅读、便于携带且尽可能降低书价为原则，有的专题单独成册，有些专题则联合成册。

希望广大读者能通过阅读这套丛书，走近数学、品味数学和理解数学，充分感受数学文化的魅力和作用，进一步打开视野、启迪心智，在今后的学习与工作中取得更出色的成绩。

李大潜

2005 年 12 月

目　录

引论　三星高照古希腊

世界数学史对古希腊数学竭尽赞美之能事. 美国数学家克莱因 (M.Kline, 1908—1992) 的《古今数学思想》被誉为 "古今最好的一本数学史". 该书强调:

"古希腊人在文明史上首屈一指, 在数学上至高无上".

(一)

在至高无上的古希腊数学中, 声望最高的数学家首推欧几里得 (Euclid, 公元前 330 — 前 275).

据说, 欧几里得是位温良敦厚的教育家, 颇受学生敬重. 然而, 作为一个数学家, 评价欧几里得除了他的学风和人品以外, 更重要的是他的学术成就. 欧几里得编写了一部划时代的鸿篇巨著《几何原本》. 特别引人注目的是, 这本书独创了一种新方法, 一种被称为**公理化体系**的陈述方法. 在这本书中, 作为预备知识, 欧几里得先对有关的数学概念给出了明确的定义, 并精心挑选了几条 "不证自明" 的公理,

然后运用逻辑推理方法, 有条不紊地、由简到繁地证明了近五百个重要的几何定理. 这些定理几乎涵盖了古希腊几何学的全部成果. 欧几里得因此被尊为"几何学之父".

(二)

继欧几里得之后, 古希腊又涌现出一位大数学家阿基米德 (Archimedes, 公元前 287— 前 212).

阿基米德有许多故事, 其中流传最广的是关于检测皇冠的传说.

一次为了检测皇冠的含金量, 阿基米德整天冥思苦想, 终于在洗澡时触发了灵感. 当他感悟到浮力原理后竟光着身子跑到大街上狂叫: "尤里卡! 尤里卡!" 尤里卡是希腊语 "我发现了" 的意思.

阿基米德有惊人的创造力. 他将高超的计算技巧与严谨的数学论证融为一体, 取得了许多常人难以想象的成就. 阿基米德被后世尊为 "古代数学之神".

阿基米德重大数学成就之一是, 他用**穷竭法**计算了一些曲边图形所围成的面积. 穷竭法的处理步骤酷似微积分方法, 只是缺少极限思想, 因此人们惊呼, 在早于牛顿两千年之前, 阿基米德已经走到了微积分的大门口.

(三)

在古希腊数学家中, 欧几里得与阿基米德成就

辉煌, 但不能因此轻视 “祖师爷” 毕达哥拉斯学派 (Pythagoras, 约公元前 580 — 约前 500) 的功绩.

我们特别关注毕达哥拉斯, 基于如下三点考虑:

第一, 毕达哥拉斯学派是个集哲学、学术与宗教三位一体的秘密组织. 这个组织的活动不对外界公开. 他们规定学派一切学术成果全都归功于首领, 因此人们有时将毕达哥拉斯 “个人” 与 “学派” 混为一谈. 这个学派没有留下学术资料. 人们只能依据有限的旁证史料揭开其神秘的面纱, 因而研究的难度大.

第二, 毕达哥拉斯学派是古希腊数学的 “开山祖师”, 他们的研究工作是古希腊数学的源头. 数学史明确地肯定:

“毕达哥拉斯学派创立了纯数学, 把它变成一门高尚的艺术.”

第三, 毕达哥拉斯学派的研究成果, 以及他们所获得的一些数学瑰宝, 都是中学数学的核心内容. 探究这些数学成果的内涵与实质, 对于中学数学教学具有启迪与指导意义.

可见, 研究毕达哥拉斯数学的现实意义重大.

人们自然好奇, 在两千五百年前, 毕达哥拉斯学派究竟是怎样创立 “纯数学” 的? 他们所创立的 “纯数学” 具有怎样的形态呢?

毕达哥拉斯学派的数学研究带有浓厚的哲学背景, 他们发现, 有些完全不同的现象, 却具有一致的数学属性. 他们因此认为数学属性是自然现象的本质特征, 进而他们把数看作是宇宙的实质和形式, 是

一切现象的根源. 这个带有宗教色彩的学术团体奉行的信条是 “万物皆数”.

特别是, 他们把几何图形、工程测量与美学探索等问题都归结为数的形式, 这些特殊类型的数有:

- “形作数” 之图形数;
- “量作数” 之勾股数;
- “美作数” 之黄金数.

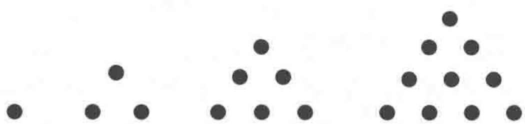
本书将着重剖析这些数的内涵与实质, 希望透过这些数欣赏古希腊数学的精彩.

一、"形作数"之图形数

也许人们不会相信，千古流传的所谓"三角形数"是玩出来的. 古希腊人通过摆弄小石子"玩"出了一系列图形数.

艺术家爱美. 画家迷恋山水的形象美，泰山的雄伟，华山的险峻，黄河的蜿蜒，长江的浩瀚……

数学家也爱美. 古希腊人特别注重数字的形象美. 毕达哥拉斯学派在海滩上用小石子排列成各种美丽的图形. 他们用一些规则的图形表达某一类数字，例如所谓**三角形数**(图 1)和所谓**正方形数**(图 2).



三角形数 a_n	1	3	6	10
序数 n	1	2	3	4

图 1

数学史上明确指出，古希腊人已经知道

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad b_n = n^2.$$

正方形数 b_n	1	4	9	16
序数 n	1	2	3	4

图 2

古希腊人是怎样推导出这些算式的?

三角形数和正方形数是两种特殊的图形数. 所谓图形数, 就是借助于几何图形来表征刻画数的某些属性.

很明显, 毕达哥拉斯学派研究的数, 已经不是具体的多少匹马, 或是多少头牛; 他们所研究的几何图形, 也不是具体的一块麦地, 一片苗圃 …… 毕达哥拉斯的 “纯数学”, 把现实事物和实际图形, 通过思维的抽象升华为数学中的数和形, 这是数学思维的重大的飞跃.

这样, 纯数学这门学科诞生了. 由于数和形被抽象成数学的概念, 人们可以致力于探索这些概念的内在规律, 从而更广泛地探讨客观世界的数量关系和空间形式. 毕达哥拉斯学派赋予数学真理以最抽象的形式和性质, 这是古希腊文明对人类数学发展最伟大的贡献之一.

(一) 雾里看花图形数

在数学史上关于毕达哥拉斯三角形数留下了诸

多疑惑.

疑惑之一. 众所周知, 三角形是由首尾衔接的三条线段生成的几何图形, 怎么允许在三角形数的内部布点呢? 比如, 图 3 中欧几里得三角形每边 4 个点子, 共有 9 个点子, 为什么毕达哥拉斯三角形数 $a_4 = 10$ 呢?

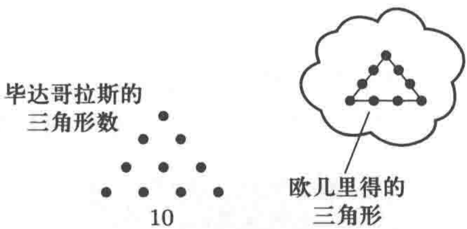


图 3

这个问题的症结在于, 在古希腊时代, 关于几何图形的概念是变动过的.

我们知道, 数学起源于人类的生产实践与社会生活. 在古埃及, 尼罗河水周期性泛滥. 当河水退去后, 田野上原有的标记荡然无存, 人们需要重新丈量土地, 这样, 几何学便应运而生了.

原来, 早期几何图形注重区域的面积, 毕达哥拉斯学派也持有这种观点. 关于三角形数的这种认识, 还可以用正方形数作为佐证. 第 n 个正方形数为 n^2, 它正是指第 n 个正方形的面积.

一百多年后, 欧几里得为了构建公理化体系, 才将多边形定义为若干直线段首尾连接生成的图形, 正如人们所熟悉的那样.

(二) 牵强附会高斯法

关于三角形数的另一个疑惑是，在两千五百年前，毕达哥拉斯学派是怎样推导出三角形数的计算公式

$$1+2+3+4+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

的?

关于这个问题，数学史上大数学家高斯 (Gauss, 1777—1855) (图 4) 幼年时的一个小故事广为流传.

高斯

图 4

一次，小学老师在课堂上出了一道试题:

$$1+2+3+4+\cdots+100=?$$

即要求小学生们计算前 100 个自然数之和. 正当其他同学忙于逐项累加而算得晕头转向时，十岁的小高斯却很快交上了试卷，并给出了正确的答案 5050.

小高斯究竟是怎样算的, 数学史上并没有明确交待. 后人猜测了如下的所谓"高斯算法": 将算式 $1+2+3+\cdots+n$ 倒转过来, 两式相加得

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & + & 2 & +\cdots+ & n-1 & + & n \\ n & + & n-1 & +\cdots+ & 2 & + & 1 \\ \hline (n+1) & + & (n+1) & +\cdots+ & (n+1) & + & (n+1) \end{array},$$

注意到每一项上下两数之和全为 $n+1$, 共 n 项, 因之有

$$2a_n=(n+1)n,$$

故有

$$a_n=\frac{(n+1)n}{2}.$$

这就导出了三角形数的计算公式.

这种推导过程在逻辑上是正确的, 但它不一定符合历史事实. 早于高斯两千年的古希腊人, 他们怎么可能掌握这种算式加工技术呢?

也许有人会问: 推导三角形数的计算公式, 除了高斯算法以外, 难道还会有其他的捷径吗?

(三) 直觉之花结硕果

三角形数本质上是面积, 这一理解将三角形数与正方形数紧密联系在一起. 这样, 三角形数的计算就变得简单了.

为了便于刻画区域面积这一特征, 不妨将三角形表示为阶梯式的等腰直角三角形, 即考察如下图形序列 (图 5):