序与拓扑

徐晓泉 著

科学出版社

序与拓扑

徐晓泉　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书主要从序与拓扑的交叉角度,拓展Domain理论的框架和应用范围,深入讨论sober空间、稳定紧空间与紧pospace、spectral空间与Priestley空间,系统地研究格序结构的关系表示问题,并给出关系表示理论在拓扑、格论、Domain理论中的一系列应用,尤其是一些经典拓扑问题的代数化处理新方法. 由此建立了二元关系、序结构、拓扑结构的若干新联结,发展了一个用二元关系研究序结构、拓扑结构和Domain理论的新途径及方法。

本书的阅读对象主要是一般拓扑、格论、Domain理论等领域的学者,数学专业的研究生和高年级本科生,本书可作为相应方向研究生的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

序与拓扑/徐晓泉著. —北京:科学出版社,2016.1

ISBN 978-7-03-047271-7

Ⅰ.①序… Ⅱ.①徐… Ⅲ.①拓扑-研究 Ⅳ.①O189

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第025440号

责任编辑:王雨舸/责任校对:董艳辉

责任印制:彭 超/封面设计:苏 波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

武汉市首壹印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

开本:787×1092 1/16

2016年1月第 一 版 印张:21 3/4

2016年1月第一次印刷 字数:501 000

定价:59.80元

前　言

近 40 年来，数学与计算机科学的交叉，尤其是格序结构、拓扑方法、范畴理论等在计算机科学中的应用引起了数学家和理论计算机科学家的广泛关注. 可以说，模糊集理论和 Domain 理论都是在此背景下建立的.

20 世纪 70 年代初，Turing 奖获得者 Scott、Plotkin 和 Smyth 等人创建了 Domain 理论，其结构理论成为计算机程序的指称语义学研究的一个关键点，因而引起了人们的广泛兴趣. Domain 理论发展的另一个动力来自纯数学的若干领域，特别是 Lawson、Hofmann、Keimel、Day 等人的重要工作. 1980 年，Gierz、Hofmann、Keimel、Lawson、Mislove 和 Scott 6 人合写的"A Compendium of Continuous Lattices"，标志着连续格理论的成熟和 Domain 理论基本框架的建立；而他们于 2003 年出版的"Continuous Lattices and Domains"则标志着 Domain 理论的成熟. 值得指出的是，中国学者对 Domain 理论做出了重要贡献.

代数、拓扑、序是数学中的三大结构，可以说 Domain 理论的一大特色就是充分体现了这三大结构的交叉，其中序与拓扑的交叉尤为明显. 诚然，序与拓扑的交叉并不是一个新的论题，众所周知，1936 年，Nachibin 就写了著名的《Order and Topology》一书.

本书的书名是《序与拓扑》，与 Nachibin 的"Order and Topology"不同的是，从某种意义上来说，作者并不是按标准数学用书的格式撰写的，书中的论题主要取决于作者的兴趣，尽管所涉及的论题有着紧密联系，在某种意义上也构成体系. 下面简要介绍本书涉及的主要论题.

首先，无论从理论计算机科学还是从数学的角度而言，Domain 理论研究的一个重要方面是尽可能地扩展其理论框架和应用范围，这方面已有一系列工作. 其中，Gierz 和 Lawson 等人在 1980 年引入的拟连续 domian、超连续 domian 尤其受到关注，它们属连续 Domain 最为成功的推广之列. 在本书中，我们将拟连续 domian 理论扩展至了一般子集系统. Domain理论研究的另一个重要方面是建立其与其他学科及领域的交叉与联系，这些重要学科及领域除了理论计算机科学、范畴论、拓扑、格论、locale 理论等外，还包括逻辑、格上拓扑、动力系统、离散数学、信息系统等，甚至还包括广义相对论. 在本书中，我们主要关注的是 Domain 理论与拓扑、格论的交叉.

需要指出的是，计算机科学的序理论基础是连续格理论乃至 Domain 理论建立的主要动力，而连续性是这种研究的坚实基础. 尽管 Domain 理论为更为一般框架的进一步研究提供了充足的信息，但连续性始终是几乎所有进一步研究的坚实基础. 另一方面，完备性的要求无论是从计算机科学的角度还是从纯数学的角度来看都过于严格，因而研究更一般的具有某种连续性的偏序集自然受到人们的关注，自 20 世纪 80 年代以后成为研究热点. 本书的内容基本上都是围绕连续性展开的，并尽可能地对一般偏序集进行讨论.

值得注意的是，作为数学中最简单的对象之一的二元关系能以一种自然的方式生成完备格. 设 ρ 是集 X 上的一个二元关系，$A\subseteq P$，定义

$$\rho(A)=\{x\in X: \exists a\in A \text{ 使}(a,x)\in\rho\}$$

(称为 A 在 ρ 下的像). 令 $\Phi\rho(X)=\{\rho(A):A\subseteq X\}$，则在集包含序下，$\Phi\rho(X)$ 为完备格. 从格序结构的角度二元关系引起人们的关注最早源于 Zareckiĭ 的工作. 1963 年，Zareckiĭ 证明了下述经典结果：集 X 上二元关系 ρ 是正则的当且仅当 $(\Phi\rho(X),\subseteq)$ 为完全分配格. Zareckiĭ 的工作引起了人们对正则关系的关注，这里可提到著名数学家 Markowsky、Schein、Bandelt 等人的工作. 在 Domain 理论中，具有某些特殊性质的二元关系也有着重要的应用. 事实上，就连续 domain 而言，其最重要的性质之一是它上面的 way bleow 关系≪具有插入性质. 1982 年，Scott 给出了 Scott domain 的信息系统表示，为 Domain 理论提供了一个逻辑处理方式. Scott 信息系统本质上是一种具有自反性和传递性的特殊二元关系. 其后，Vickers、Hofmann、Zhang、Bedregal、Spreen 等人建立了更为一般的连续信息系统理论，而一个连续信息系统就是一个集合与其上的一个具有插入性和传递性的二元关系(一个幂等关系，自然是正则的).

由于 1960 年 Raney 关于完全分配格的内蕴式刻画(可以视为一种基于点的序分离性)，人们自然寻找格序结构的这种基于序分离性的内蕴式刻画乃至用这种方式引入新的格序结构. 而这些性质本质上是关系“$\not\leq$”的某种代数性质，如“正则”性等，同时与区间拓扑的 T_2 性和 Priestley 性密切相关，因而值得进行系统深入的研究. 特别地，一个自然而重要的问题是，什么样的格序结构可以仅仅只用其上原始、简单的偏序关系≤完全描述？即格序结构的内蕴式刻画问题. 由于内蕴式刻画是直接的、自然的、简洁的，因而对格序结构的研究无疑具有重要意义. 与上述问题密切相关的问题(更广的问题)是，什么样的格序结构可以用一些简单的二元关系表示，即格序结构的关系表示问题. 它能使人们从关系的角度自然而深刻地揭示序结构，也能使我们从格序结构的角度来刻画一些特殊而重要二元关系的特征. 关系表示理论在拓扑、Domain 理论、格论等领域有着重要应用，而我们更期望在二元关系和序结构、拓扑结构之间架起一个桥梁，为人们提供用二元关系研究拓扑、格序结构和 Domain 理论的一个新途径和方法.

众所周知，连续格等价于定向分配格，而完全分配格表现为一种强连续格. 2009 年，Erné 证明了超连续格等价于对偶滤子分配格. 因而，从某种意义上来说，格的连续性和分配性是“等价”的，即某种连续性均有相应的分配性与之对应，反之亦然. 因而，寻找拟连续格和拟超连续格的分配律刻画就成为有趣而重要的问题，以进一步建立连续性与分配性的“等价”理论.

正如前面所说，序与拓扑的交叉是 Domain 理论的一个基本特征，尤其是基于对偶理论的角度. 序结构与拓扑结构之间对偶性的研究主要源于 20 世纪 30 年代 Stone 的著名工作. 1936 年和 1937 年，Stone 分别证明了 Boolean 代数范畴与紧 T_2 零维空间(称为 Stone 空间)对偶等价，分配格范畴与紧、紧开集构成基、凝聚的 sober 空间(称之为 spectral 空间)范畴对偶等价. 值得指出的是，1969 年，Hochster 证明了如下重要结果：交换环的素理想构成的谱空间(赋予 Zariski 拓扑)恰好就是 spectral 空间. 由于 Stone 和 Hochster 的工作，spectral 空间的研究受到了广泛关注. 1970 年，利用“双边”拓扑，Priestley 证明了分配格范畴与紧 T_2 的序完全不连通空间(称之为 Priestley 空间)范畴是对偶等价的，因而 Priestley 空间与 spectral 空间具有密切的内在联系. 事实上，spectral 空间的 patch 拓扑是 Priestley 的，而 Priestley 空间中由上开集构成的拓扑是 spectral 的，因而通过这两个相应的函子，

Priestley 空间范畴与 spectral 空间范畴是同构的. 关于稳定紧空间和紧 pospace 之间的关系,有类似的结果,即稳定紧空间的 patch 拓扑是紧 pospace,而紧 pospace 中由上开集构成的拓扑是稳定紧的,因而通过这两个相应的函子,紧pospace范畴与稳定紧空间范畴是同构的. 1974 年,Easkia 发展了 Priestley 的工作,证明了 Heyting 代数范畴与 Easkia 空间(一种特殊的 Priestley 空间,现在称之为 Easkia 空间或 Heyting 空间)对偶等价. 这些对偶定理无论是从数学的角度还是从计算机科学的角度都具有重要意义,因而受到极大关注,不断被扩展到其他重要范畴(序的或拓扑的),并获得了在格论、Domain 理论、拓扑、逻辑、理论计算机科学、离散数学等领域中的一系列重要应用.

关于稳定紧空间和紧 pospace,下面的问题是自然而重要的:偏序集上赋予一些重要的"单边"(特别是 Scott 拓扑、上(下)拓扑)和"双边"拓扑(如 Lawson 拓扑、区间拓扑、序收敛拓扑等)何时成为稳定紧空间和紧 pospace? 关于 spectral 空间和 Priestley 空间,有类似的问题. 在完备格情形和附加了一些特殊条件的偏序集情形,Erné、Jung、Lawson、Priestley、Venugopalan(Menon)、Yokoyama 等人已有一系列重要工作,但仍遗留不少问题,需要对更一般偏序集情形作深入的研究,这正是本书讨论的一个重要内容.

作为介于 T_0 空间和 T_2 空间之间的一类重要而特殊的空间,sober 空间成为 Domian 理论与拓扑交叉的另一个重要对象,其研究一直受到拓扑学家和理论计算机科学家的重视. 对于 sober 空间,Hofmann 和 Mislove 于 1981 年证明了著名的 Hofmann-Mislove 定理,它成为在理论计算机科学、拓扑和 Domian 理论中最常被应用的结果之一. 近十多年来,Hofmann-Mislove 定理被推广到了更一般的偏序集、拓扑空间和双拓扑空间,建立了相应类型的 Hofmann-Mislove 定理. 需要指出的是,这些 Hofmann-Mislove 定理均是对 Scott 拓扑函子建立的. 为进一步研究和扩展其应用框架,我们自然希望对其他类型的拓扑函子(如上拓扑函子)建立相应的 Hofmann-Mislove 定理,并期望获得在 Domain 理论、拓扑和计算机科学中的应用.

最后,无论从数学的角度还是从理论计算机科学的角度,偏序集的完备化都是一个基本问题,而 Dedekind-MacNeille 完备化(也称为正规完备化)显然是其中最自然而重要的一种. 一个自然的问题是,哪些性质是 Dedekind-MacNeille 完备化不变性质? 另一个与此相关的问题是,作为连续 domian 概念的推广,哪些推广是"好"的推广(即是 Dedekind-MacNeille完备化不变性质)? 或者说,基于 Dedekind-MacNeille 完备化不变性的角度,我们如何将 Domain 理论的框架用一种"好"的方式进行推广?

所有这些重要而密切相关的问题成为本书的主要研究内容,并通过二元关系、序和拓扑交叉而联系在一起.

本书共 10 章,每章主要内容如下:

第 1 章是序与拓扑预备,给出了全书所需的有关格论、Domain 理论、拓扑、范畴等的一些基本概念、记号和结论.

第 2 章讨论如何将拟连续 domain 理论的框架拓展至一般的子集系统,对一般的子集系统 Z,建立了 Z-拟连续 domain 理论.

第 3 章讨论拓扑空间的 sober 性和 sober 空间的性质,给出了 sober 性的若干刻画和著名的 Hofmann-Mislove 定理,并将 Hofmann-Mislove 定理扩展至了更广泛的拓扑

函子.

第 4 章讨论超连续拓扑及超代数拓扑的一些重要性质,给出它们的若干刻画. 特别地,讨论了分配超连续格和分配超代数格的拓扑表示问题;给出了超连续(代数)sober 拓扑的序特征;讨论了局部超紧空间的 Hoare 空间与 Smyth 空间的性质;基于拓扑的超连续性,给出了 Lawson 问题的一个部分解答.

第 5 章讨论如何基于拓扑的方式将拟连续 domain 理论的框架扩展至一般子集系统,并讨论其上 Scott 拓扑和 Lawson 拓扑的性质. 基于通常方式和拓扑方式这两种等价的方式,分别将拟超连续 domain 和拟超代数 domain 的概念推广至了一般偏序集. 本章的另一主要内容是系统地讨论拟连续性和拟超连续性在相应同态映射下的保持性.

第 6 章系统地讨论格序结构的关系表示问题,主要包括完全分配格、超连续格、区间拓扑 T_2 的完备格和 κ-超连续格的关系表示问题,基于 Dedekind-MacNeille 完备化,对偏序集进行相应讨论.

第 7 章基于正则关系讨论格序结构到方体的嵌入问题,建立相应的嵌入定理.

第 8 章给出了完备格的关系表示理论在拓扑中的若干应用,尤其是一些经典拓扑问题的代数化处理新方法.

第 9 章主要讨论稳定紧空间与紧 pospace,特别是偏序集上 Lawson 拓扑和区间拓扑的紧 pospace 性、Scott 拓扑和下(上)拓扑的稳定紧性,以及它们与拟连续性和拟超连续性的密切关系.

第 10 章讨论偏序集上 Lawson 拓扑和区间拓扑的 Priestley 性以及 Scott 拓扑和下(上)拓扑的 spectral 性.

在本书撰写期间,作者得到了国家自然科学基金(10861007,11161023)、教育部全国优秀博士学位论文作者专项资金(2007B14)、“赣鄱英才 555 工程”科技领军人才培养基金和江西省自然科学基金(20114BAB201008)的资助,借本书出版之机,作者深表感谢.

徐晓泉

2015 年 5 月

目　　录

第 1 章　序与拓扑预备

本章给出了全书所需的有关格论、Domain 理论、拓扑、范畴等的一些基本概念、记号和结论.

第 1.1 节引入的主要概念有 Galois 联络、Dedekind-MacNeille 完备化、完备化不变性质、子集系统、偏序集的 M- 完备性等. 另外，我们还引入了偏序集的性质 S、序分离性和强序分离性等概念.

在第 1.2 节中，我们介绍了拓扑诱导的特殊化(预) 序，偏序集上的上(下) 拓扑、区间拓扑、Z-Scott 拓扑、Z-Lawson 拓扑、Scott 拓扑、Lawson 拓扑，偏序集之间的 Scott 连续映射、Lawson 连续映射，偏序集上的序相容的拓扑，拓扑空间中的饱和子集，序拓扑空间，pospace，Priestley 空间，R_0 序拓扑空间，严格完全正则序拓扑空间和 Lawson 公开问题等.

第 1.3 节主要介绍了关于偏序集的性质 M，引入了关于偏序集的一种弱于性质 M 的性 WM.

第 1.4 节介绍的概念主要有偏序集上的附加序、正则附加序、Z-below 关系，插入性质和择一性质，Z- 连续 domain、Z- 代数 domain、连续 domain、代数 domain 等. 还给出了连续 domain 上的 way below 关系 $\ll$ 所具有的最重要的性质 —— 插入性质.

第 1.5 节介绍的主要概念是各种分配性，包括分配律、交连续性、M- 分配律、完全分配律、定向分配律，给出了完全分配性的自对偶性和若干刻画. 对完备格，证明了 M- 分配律性与弱 M- 连续性的等价性，特别地，连续性等价于定向分配性，完全分配性等价于强连续性；证明了完全分配格上的完全 below 关系 $\lhd$ 具有插入性质，给出了完全分配(强代数) 格与连续(代数) 格之间的内在关系.

第 1.6 节主要讨论拓扑的完全分配性和强代数性，给出了一系列刻画.

第 1.7 节给出了超连续偏序集的概念，讨论了拓扑的超连续性和超代数性，给出了一系列刻画，给出了超连续(超代数) 偏序集与连续(代数) 偏序集之间的关系.

1.1　集　与　序

在本书中，基数和序数的全体分别记为 **Cn** 和 **On**. 集 X 的基数记为 $|X|$. 可数无限集的基数记为 ω，最小的不可数基数记为 ω_1. $\forall \kappa \in \mathbf{Cn}$，记

$$\mathbf{Cn}_{(<\kappa)} = \{\mu \in \mathbf{Cn} : \mu < \kappa\}, \quad X^{(<\kappa)} = \{A \subseteq X : |A| < \kappa\}.$$

特别地，$X^{(<\omega)}$ 为 X 的有限子集全体. 自然数全体记为 N.

下面是本书用到的几个范畴：

(1) **Set** 表示集合范畴.

(2) **Poset** 表示以偏序集为对象，保序映射为态射的范畴.

(3) **SUP** 表示以完备格为对象，保任意并映射为态射的范畴.

(4) **INF** 表示以完备格为对象,保任意交映射为态射的范畴.

(5) $\mathbf{INF}^{\uparrow}$ 表示以完备格为对象,保任意交和定向并映射为态射的范畴.

(6) $\mathbf{COM}=\mathbf{SUP}\cap\mathbf{INF}$ 是以完备格为对象,完备格同态为态射的范畴.

(7) **Top** 表示以拓扑空间为对象,连续映射为态射的范畴.

设$(P,\leqslant)$为拟序集(即$\leqslant$是P上满足自反性和传递性的二元关系,但不要求满足反对称性),$\forall x\in P,A\subseteq P$,记

$$\uparrow x=\{y\in P:x\leqslant y\},\quad \uparrow A=\bigcup_{a\in A}\uparrow a;$$

对偶地定义$\downarrow x$和$\downarrow A$.若$A=\uparrow A(A=\downarrow A)$,则称$A$是上(下)集.$A$称为是序凸的,若$A=\uparrow A\cap\downarrow A$.$A$中的极小集全体记为$\mathrm{Min}(A)$.$A$在$P$中的极小上界全体记为

$$\mathrm{mub}\,A,\quad 即\quad \mathrm{mub}\,A=\mathrm{Min}(A^{\uparrow}),$$

其中,$A^{\uparrow}$是A在P中的上界全体.P中的定向下集称为理想,其全体记为$Id(P)$(若看成偏序集,除特别说明外总是赋予集包含关系).对偶地定义滤子,P中的滤子全体记为$\mathrm{Filt}(P)$.形如$\downarrow x\ (x\in P)$的理想称为主理想;对偶地,形如$\uparrow x\ (x\in P)$的滤子称为主滤子.P的对偶拟序集记为P^{op}.对P上的任意一个集族$\mathcal{A}$,记

$$\mathcal{A}_{+}=\{B\in\mathcal{A}:B=\uparrow B\}\quad 和\quad \mathcal{A}_{-}=\{C\in\mathcal{A}:C=\downarrow C\}.$$

对集X上的拓扑η,(X,η)的闭集全体记为η^{c},即

$$\eta^{c}=\{X\backslash U:U\in\eta\}.$$

$\forall P\in ob(\mathbf{Poset})$,记

$\mathbf{up}(P)=\{A\subseteq P:A=\uparrow A\}$ (有时也记$\mathbf{Up}(P)=\{A\subseteq P:A=\uparrow A\}$),

$\mathbf{down}(P)=\{A\subseteq P:A=\downarrow A\}$, $P^{(<\omega)}=\{F\subseteq P:F$为有限的$\}$,

$\mathbf{Prin}\,P=\{\uparrow x:x\in P\}$, $\mathbf{Fin}\,P=\{\uparrow A:A\in P^{(<\omega)}\}$.

定义$\mathbf{Min}:\mathbf{Fin}\,P\to 2^{P}$如下:

$$\forall F\in\mathbf{Fin}\,P,\mathbf{Min}(F)=\{x\in F:x为F的极小元\}.$$

$\forall P_1,P_2\in ob(\mathbf{Poset})$,若$P_1$与$P_2$同构,则记为$P_1\cong P_2$.偏序集$P$称为是$\omega$-链完备的,若$P$中的可数链均有上确界.

本书约定,当将$\mathbf{Up}(P)$,$\mathbf{Prin}\,P$和$\mathbf{Fin}\,P$看成偏序集时,总是指$(\mathbf{Up}(P),\supseteq)$,$(\mathbf{Prin}\,P,\supseteq)$和$(\mathbf{Fin}\,P,\supseteq)$,即它们均被赋予集反包含序.因而,它们中的定向族,如$\mathbf{Fin}\,P$中的定向族$\{\uparrow F_i\in\mathbf{Fin}\,P:i\in I\}$,等价于$\{\uparrow F_i\in\mathbf{Fin}\,P:i\in I\}$满足:$\forall i,j\in I,\exists k\in I$使$\uparrow F_k\subseteq\uparrow F_i\cap\uparrow F_j$.$\forall L\in ob(\mathbf{COM})$,记$\mathcal{D}(L)=\{D\subseteq L:D$是定向子集$\}$.

设$P,Q\in ob(\mathbf{Poset})$.映射$f:P\to Q$称为是单调的(也称是保序的),若$\forall x,y\in P,x\leqslant y$,有$f(x)\leqslant f(y)$.

定义 1.1.1 $f:P\to Q$称为是并稠嵌入,若f是序嵌入,且$f(P)$是Q的并稠子集,即

$$\forall q\in Q,q=\bigvee(\downarrow q\cap f(P)).$$

定义 1.1.2 设$P,Q\in ob(\mathbf{Poset})$,$f:P\to Q$,$g:Q\to P$.映射对$(f,g)$称为是$P$与$Q$之间的一个附加(adjunction)或一个Galois联络,若f与g都是保序的,且$\forall(p,q)\in P\times Q$,有$f(p)\geqslant q\Leftrightarrow p\geqslant g(q)$.此时$f$称为是为$g$的上伴随(upper adjoint),$g$称为是$f$的下伴随(lower adjoint).

下述结论是众所周知的(参见文献[1,2]).

引理 1.1.1　设 $P,Q\in ob(\mathbf{Poset})$, $f:P\to Q$ 和 $g:Q\to P$ 是单调的.考虑下述各条件:

(1) (f,g) 是 P 与 Q 之间的一个 Galois 联络.

(2) $\forall q\in Q, g(q)=\min f^{-1}(\uparrow q)$.

(3) $\forall p\in P, f(p)=\max g^{-1}(\downarrow p)$.

(4) f 保任意(存在)交, g 保任意(存在)并.

则(1)⇔(2)⇔(3)⇒(4);若 P 与 Q 是完备格,则(4)⇒(1),从而所有条件等价.

定义 1.1.3　设 $P,Q,Q_i\ (i\in I)$ 均为偏序集.

(1) 映射 $f:P\to Q$ 称为是一个序嵌入,若 $\forall x,y\in P, x\leqslant y\Leftrightarrow f(x)\leqslant f(y)$.

(2) 称映射簇 $\Phi=\{f_i:P\to Q_i\mid i\in I\}$ 序分离(也称强分离[3]) P 中的点,若 $\forall x,y\in P, x\not\leqslant y, \exists i\in I$ 使 $f_i(x)>f_i(y)$.

显然,若 Φ 序分离 P 中的点,则对角映射

$$f=\mathop{\Delta}_{i\in I}f_i:P\to\prod_{i\in I}Q_i,\quad f(x)=(f_i(x))_{i\in I},$$

为序嵌入.

在本书中,一些结论并不需要选择公理,而只需要下面的选择公理 DC_ω.

定义 1.1.4　(ω 相关选择公理 DC_ω) 设 X 为非空集, $u\in X$, R 为 X 上的一个二元关系.若 $\forall x\in X, \exists y\in X$ 使 xRy,则 $\exists$序列 $\{x_n:n<\omega\}\subseteq X$ 满足:

(1) $x_0=u$,

(2) $\forall n<\omega, x_nRx_{n+1}$.

DC_ω 是 Bernays[4] 于 1942 年提出的一个弱于选择公理 AC 的公理.以下用 ZF 表示 Zermelo-Fraenkel 集论公理系统, ZFDC_ω 表示 ZF 加上 ω 相关选择公理 DC_ω, ZFAC 表示 ZF 加上选择公理 AC.

定义 1.1.5[5,6]　设 P 为偏序集, $A\subseteq P$.记

$$A^{\uparrow}=\{u\in P:u \text{ 是 } A \text{ 的一个上界,即 } A\subseteq\ \downarrow u\},$$

对偶地,记 $A^{\downarrow}$ 为 A 的下界全体,并记 $A^{\delta}=(A^{\uparrow})^{\downarrow}$. $\delta(P)=\{A^{\delta}:A\subseteq P\}$ 称为 P 的 Dedekind-MacNeille 完备化,也称正规完备化.

利用 cut 算子 δ, Dedekind 给出了基于有理数集构造实数集的方法(参见文献[5]), MacNeille 在文献[6]中将 Dedekind 的方法推广至了一般偏序集,给出了通常所称的偏序集的 Dedekind-MacNeille 完备化.为简便起见,以下我们称之为完备化.

偏序集的完备化是一个基本问题(参见文献[7,8,9,10,11,12,13,14]),而 Dedekind-MacNeille 完备化(也称为正规完备化)显然是其中最自然而重要的一种.一个自然的问题是(参见文献[8,9,15,16,17]):哪些性质是 Dedekind-MacNeille 完备化不变性质?另一个与此相关的问题是:作为连续 domian 概念的推广,哪些推广是“好”的推广(即是 Dedekind-MacNeille 完备化不变性质)?或者说,基于 Dedekind-MacNeille 完备化不变性的角度,我们如何将 Domain 理论的框架用一种“好”的方式进行推广.

引理 1.1.2　设 P 为偏序集,则有:

(1) 映射 $(-)^{\uparrow}:(2^P)^{op}\to 2^P, A\mapsto A^{\uparrow}$, $(-)^{\downarrow}:\to 2^P\to(2^P)^{op}, A\mapsto A^{\downarrow}$,均是保序的.

(2) $((-)^{\uparrow},(-)^{\downarrow})$ 是 $(2^P)^{op}$ 与 2^P 之间的一个 Galois 联络(等价地,$((-)^{\downarrow},(-)^{\uparrow})$ 是 $(2^P)^{op}$ 与 2^P 之间的一个 Galois 联络),即 $\forall A,B\subseteq P, B^{\uparrow}\supseteq A\Leftrightarrow B\subseteq A^{\downarrow}$. 从而 $\delta:2^P\to 2^P$, $A\mapsto A^{\delta}=(A^{\uparrow})^{\downarrow}$, $\delta^{*}:2^P\to 2^P, A\mapsto (A^{\downarrow})^{\uparrow}$,均是闭包算子.

(3) $\forall\{C_j:j\in J\}\subseteq 2^P$, $\left(\bigcup_{j\in J}C_j\right)^{\uparrow}=\bigcap_{j\in J}C_j^{\uparrow}$, $\left(\bigcup_{j\in J}C_j\right)^{\downarrow}=\bigcap_{j\in J}C_j^{\downarrow}$.

(4) 记 $L=\delta(P)$. $\forall\{A_i^{\delta}:i\in I\}\subseteq L$, $\bigwedge_L\{A_i^{\delta}:i\in I\}=\bigcap\{A_i^{\delta}:i\in I\}$,

$$\bigvee_L\{A_i^{\delta}:i\in I\}=(\bigcup\{A_i^{\delta}:i\in I\})^{\delta}=\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)^{\delta}.$$

证明 (1) 显然.

(2) $\forall A,B\subseteq P$,有 $B^{\uparrow}\supseteq A\Leftrightarrow\forall a\in A, B\subseteq\downarrow a\Leftrightarrow\forall a\in A, b\in B, b\in\downarrow a\Leftrightarrow\forall a\in A, b\in B, a\in\uparrow b\Leftrightarrow\forall b\in B, A\subseteq\uparrow b\Leftrightarrow B\subseteq A^{\downarrow}$.

(3) 由(2)和引理 1.1.1.

(4) 记 $L=\delta(P)$. $\forall\{A_i^{\delta}:i\in I\}\subseteq L$,由 $\delta:2^P\to 2^P$ 是闭包算子,有

$$\bigwedge_L\{A_i^{\delta}:i\in I\}=\bigcap\{A_i^{\delta}:i\in I\}.$$

下证 $\bigvee_L\{A_i^{\delta}:i\in I\}=(\bigcup\{A_i^{\delta}:i\in I\})^{\delta}=\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)^{\delta}$.

显然有

$$\bigcup_{i\in I}A_i\subseteq\bigcup\{A_i^{\delta}:i\in I\}\subseteq\bigvee_L\{A_i^{\delta}:i\in I\},$$

从而由 $\delta:2^P\to 2^P$ 是闭包算子,有

$$\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)^{\delta}\subseteq(\bigcup\{A_i^{\delta}:i\in I\})^{\delta}\subseteq(\bigvee_L\{A_i^{\delta}:i\in I\})^{\delta}=\bigvee_L\{A_i^{\delta}:i\in I\}.$$

另一方面,$\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)^{\delta}$ 显然是 $\{A_i^{\delta}:i\in I\}$ 在 L 中的一个上界,故 $\bigvee_L\{A_i^{\delta}:i\in I\}\subseteq\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)^{\delta}$. 所以

$$\bigvee_L\{A_i^{\delta}:i\in I\}=(\bigcup\{A_i^{\delta}:i\in I\})^{\delta}=\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)^{\delta}.$$

推论 1.1.1 设 P 是偏序集,则 P 到其 Dedekind-MacNeille 完备化 $\delta(P)$ 有一个标准的嵌入映射 $j:P\to\delta(P), x\mapsto\downarrow x$.

(1) j 保任意存在并和任意存在交.

(2) $j:P\to\delta(P)$ 是并稠嵌入,因为 $\forall A^{\delta}\in\delta(P), A^{\delta}=\bigvee_{a\in A}j(a)=\bigvee_{a\in A^{\delta}}j(a)$.

对偏序集 P,在同构意义下,其 Dedekind-MacNeille 完备化 $\delta(P)$ 被下述性质唯一确定:

P 到完备格 $\delta(P)$ 有一个并稠和交稠的序嵌入,即对某完备格 L,若存在并稠和交稠的序嵌入 $i:P\to L$,则存在完备格同构 $\eta:\delta(P)\to L$ 使 $i=\eta\circ j$(参见文献[9]).

就 Dedekind-MacNeille 完备化而言,一个自然而重要的问题是:偏序集的哪些性质在完备化下保持?1980 年,Erné 考虑了"逆问题",引入了下述概念.

定义 1.1.6(Erné[9,18]) 设 S 是关于偏序集的一个性质,S 称为是完备化不变性质,若对任意偏序集 P,P 具有性质 S 当且仅当 P 的 Dedekind-MacNeille 完备化 $\delta(P)$ 具有性质 S.

模性(modularity) 和分配性(distributivity) 在完备化下不保持是 1944 年分别由

Cotlar[19] 和 Funayama[20] 所发现(也可参见文献[15,16,21]). Boolean 代数在完备化下保持是由 Glivenko[22] 和 Stone[23] 独立发现的,现在称之为 Glivenko-Stone 定理(参见文献[24,25]). 同样,Heyting 代数在完备化下也是保持的(参见文献[9,17,21,24,26,27]). 特别值得关注的是,1981 年 Erné[8] 首先注意到 domain 的连续性在完备化下不保持,为此基于 Frink 理想[28],他对偏序集引入了一种全新的连续性 —— 预连续性(precontinuity),证明了这种预连续性是完备化不变性质. 后面我们将看到其他分配性,如 Raney 分离性[29](Erné 称之为分离性,参见文献[9,27,30])和主分离性[9,27,31](也可以称之为强 Raney 分离性)等,均是完备化不变性质(参见文献[8,9,18,26,27,30,32],也可看本书第 6 章),但用"通常方式"定义的各种"连续性"和"代数性"一般都不是完备化不变性质(参看本书第 6 章). 受 Erné 在文献[8]中工作的启发,我们可以基于完备化不变性的角度推广各种连续性和代数性.

定义 1.1.7　称偏序集 P 具有性质 S 或称偏序集 P 是 S 偏序集,若 $\forall F,G\in P^{(<\omega)}\backslash\{\varnothing\}$,$F\subseteq G^{\downarrow}$,$\exists u\in P$ 使 $F\subseteq {\downarrow} u\subseteq G^{\downarrow}$.

注 1.1.1　(1) P 是 S 偏序集 $\Leftrightarrow \forall G\in P^{(<\omega)}\backslash\{\varnothing\}$,$G^{\downarrow}$ 是空集或定向的(从而是理想).

(2) P 是格 $\Rightarrow P$ 是并(交)格 $\Rightarrow P$ 是 S 偏序集.

命题 1.1.1　若 P 是 S 偏序集,则 P^{op} 是 S 偏序集,即 S 偏序集是自对偶的.

证明　设 P 是 S 偏序集,$F,G\in P^{(<\omega)}\backslash\{\varnothing\}$,$G\subseteq F^{\uparrow}$. 则由引理 1.1.2,有 $F\subseteq F^{\uparrow\downarrow}\subseteq G^{\downarrow}$. 由 P 是 S 偏序集,$\exists u\in P$ 使 $F\subseteq {\downarrow} u\subseteq G^{\downarrow}$;从而由引理 1.1.2,有

$$G\subseteq G^{\downarrow\uparrow}\subseteq({\downarrow} u)^{\uparrow}={\uparrow} u\subseteq F^{\uparrow}.$$

故 P^{op} 是 S 偏序集.

下面的例子说明 S 偏序集一般不是交(并)半格(参看注 1.1.1).

例 1.1.1　令 $P=\{a,b\}\cup N$,$N=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$ 为自然数集. 在 N 上赋予自然数序;$\forall n\in N$,$n<a$,$n<b$;a 与 b 序不可比较(见图 1.1). 易知 P 是 S 偏序集,但不是交半格,因为 a 与 b 在 P 中无下确界. 对偶地,P^{op} 是 S 偏序集,但不是并半格.

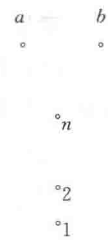

图 1.1

定义 1.1.8　函子 Z:**Poset** → **Set** 称为是 **Poset** 上的一个子集系统,简称 Z 是一个子集系统,若 Z 满足以下条件:

(1) $\forall P\in ob(\mathbf{Poset})$,$Z(P)\subseteq 2^{P}$.

(2) $\forall P,Q\in ob(\mathbf{Poset})$,保序映射 $f:P\to Q$,$A\in Z(P)$,有

$$Z(f)(A)=f(A)\in Z(P).$$

(3) $\exists P\in ob(\mathbf{Poset})$ 使 $Z(P)$ 含有 P 的非单点的非空子集.

注 1.1.2　(Baranga[33])　$\forall P\in ob(\mathbf{Poset})$,有:

(i) $\forall p\in P$,$\{p\}\in Z(P)$.

(ii) $\forall Q\in ob(\mathbf{Poset})$,若 $Q\subseteq P$,则 $Z(P)\subseteq Z(Q)$.

(iii) $\forall x,y\in P$,$x<y$,有 $\{x,y\}\in Z(P)$.

以下是三个常用的子集系统:

(1) $\mathcal{P}$($\forall P\in ob(\mathbf{Poset})$,$\mathcal{P}(P)$ 为 P 的子集全体).

(2) $\mathcal{D}$($\forall P \in ob(\mathbf{Poset})$, $\mathcal{D}(P)$ 为 P 的定向子集全体).

(3) $\mathcal{F}$($\forall P \in ob(\mathbf{Poset})$, $\mathcal{F}(P)$ 为 P 的有限子集全体).

在以下讨论中, Z 总表示 **Poset** 上的一个子集系统. $\forall P \in ob(\mathbf{Poset})$, 称 $Z(P)$ 为 P 上的一个子集系统. 当将 $Z(P)$ 看成偏序集时,其上的偏序总是指集包含关系.

定义 1.1.9 设 Z 是一个子集系统.

(1) 称 Z 是并完备的,若 $\forall P \in ob(\mathbf{Poset})$, $\mathcal{S} \in Z(Z(P))$, 有 $\bigcup \mathcal{S} \in Z(P)$.

(2) 称 Z 为具有有限族并性质,若 $\forall P \in ob(\mathbf{Poset})$, $\{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \cdots, \mathcal{S}_n\} \in \mathcal{F}(Z(\mathbf{Fin}\ P))$, 有

$$\left\{ \bigcup_{i=1}^{n} A_i : A_i \in \mathcal{S}_i, i = 1, 2, \cdots, n \right\} \in Z(\mathbf{Fin}\ P).$$

(3) 称 Z 具有性质 M, 若 $\forall P \in ob(\mathbf{Poset})$, $\uparrow F \in \mathbf{Fin} P$, 有

$$\downarrow_{\mathbf{Fin}\ P} \uparrow F = \{ \uparrow G \in \mathbf{Fin}\ P : \uparrow F \subseteq \uparrow G \} \in Z(\mathbf{Fin}\ P).$$

定义 1.1.10 设 Z 是一个子集系统, P 和 Q 是偏序集, M 是 P 的一个子集族(即 $M \subseteq \mathcal{P}(P)$).

(1) P 称为是 M- 完备的,若 $\forall S \in M$, S 在 P 中有上确界 $\bigvee S$.

(2) P 称为是 Z- 完备的,若 P 是 $Z(P)$- 完备的. $\mathcal{D}$- 完备的偏续集称为定向完备偏序集,简称为 **dcpo**.

(3) $f: P \to Q$ 称为是保 Z- 并的,若 $\forall S \in Z(P)$, $f(\bigvee S) = \bigvee f(S)$.

在本书中,为强调起见,我们将具有某种连续性 S 的 **dcpo** 称为 S 连续 domain,如连续 domain,交连续 domain,拟连续 domain,超连续 domain,拟连续 domain,等等. 对于一般的子集系统 Z,也类似这样强调.

定义 1.1.11 设 P 为偏序集, $\mathcal{U} \subseteq 2^P$, $\mathcal{W} \subseteq 2^P$.

(1) 称 $\mathcal{U}$ 与 $\mathcal{W}$ 可以序分离 P 中的点,若 $\forall x, y \in P$, $x \not\leq y$, $\exists U \in \mathcal{U}$, $W \in \mathcal{W}$ 使 $x \notin W$, $y \notin U$, $U \cup W = P$. 若 $\mathcal{U} = \mathcal{W}$, 则简称 $\mathcal{U}$ 可以序分离 P 中的点.

(2) 称 $\mathcal{U}$ 与 $\mathcal{W}$ 可以序强分离 P 中的点,若 $\forall x, y \in P$, $x \not\leq y$, $\exists U \in \mathcal{U}$, $W \in \mathcal{W}$ 使 $x \notin W$, $y \notin U$, $U \cup W = P$, $U \cap W = \varnothing$. 若 $\mathcal{U} = \mathcal{W}$, 则简称 $\mathcal{U}$ 可以序强分离 P 中的点.

1.2 偏序集上的内蕴拓扑

设 (X, τ) 为拓扑空间. $\forall A \subseteq X$, 记 $\mathrm{int}_\tau A$ 和 $\mathrm{cl}_\tau A$ 分别为集合 A 在空间 (X, τ) 中的内部与闭包. 在不引起混淆时,简记为 $\mathrm{int}A$ 和 $\mathrm{cl}A$. 用 τ^c 表示 (X, τ) 中闭集全体,即

$$\tau^c = \{X \setminus U : U \in \tau\}.$$

下面的诸概念是众所周知,读者可参见文献[1,2].

定义 1.2.1 设 (X, δ) 为拓扑空间,定义 X 上的一个预序关系 $\leqslant_\delta$ 如下:

$$x \leqslant_\delta y \Leftrightarrow x \in \mathrm{cl}_\delta \{y\}.$$

$\leqslant_\delta$ 称为是由 δ 诱导的特殊化预序(specialization preorder),简称由 δ 诱导的预序. 易知, $\leqslant_\delta$ 是 X 上的一个偏序当且仅当 (X, δ) 是 T_0 空间. $\forall A \subseteq X$, 记

$$\uparrow_\delta A = \{x \in P : \exists a \in A \text{ 使 } a \leqslant_\delta x\}, \quad \downarrow_\delta A = \{x \in P : \exists a \in A \text{ 使 } x \leqslant_\delta a\}.$$

当 $A=\{x\}$ 时，$\uparrow_\delta A$ 和 $\downarrow_\delta A$ 分别简记为 $\downarrow_\delta x$ 和 $\downarrow_\delta x$. 显然，(X,δ) 中的开子集是拟偏序集 $(X,\leqslant_\delta)$ 中的上集，而闭子集是下集.

偏序集 P 上以 $\{P\setminus\uparrow x: x\in P\}$ 为开子基生成的拓扑称为下拓扑，记为 $\omega(P)$；对偶地定义 P 上的上拓扑 $\upsilon(P)$.

定义 1.2.2 偏序集 P 上的拓扑 η 称为是序相容的，若 $\leqslant_\eta$ 等同于 P 上的原有序关系 $\leqslant$. 显然，η 是序相容的 $\Leftrightarrow \upsilon(P)\subseteq\eta\subseteq up(P)$.

本书涉及的紧性、局部紧性等性质，除明确指出外，均不预先假定任何分离性. 下面的结论是众所周知(参见文献[52]).

引理 1.2.1 设 τ 和 δ 是集 X 上的两个拓扑，$\tau\subseteq\delta$，(X,τ) 是 Hausdorff 的，(X,δ) 是紧空间，则 $\tau=\delta$.

定义 1.2.3 设 (X,τ) 为 T_0 空间，$A\subseteq X$.

(1) 记 $\mathrm{sat}(A)=\bigcap\{U\in\tau: A\subseteq U\}$. 称 A 为拓扑空间 (X,τ) 中的饱和子集(saturated set)，若 $A=\mathrm{sat}(A)$. 容易验证，$\mathrm{sat}(A)=\uparrow_\tau A$. 故 A 为饱和集当且仅当 $A=\uparrow_\tau A$；A 为紧子集当且仅当 $\mathrm{sat}(A)$ 为紧子集.

(2) (X,δ) 中的饱和紧子集全体记为 $Q(X)$，赋予反包含序后，所得偏序集记为 $(Q(X),\supseteq)$，在不引起混淆的情况下，简记为 $Q(X)$.

定义 1.2.4 设 τ 和 δ 是 X 上的两个拓扑，X 上以 $\tau\cup\delta$ 为子基生成的拓扑记为 $\tau\vee\delta$. 显然 $\tau\vee\delta$ 是 τ 和 δ 在 $(\mathbf{Top}(X),\subseteq)$ 中的并，其中 $\mathbf{Top}(X)$ 是 X 上的拓扑全体.

设 P 是偏序集，$\theta(P)=\upsilon(P)\vee\omega(P)$ 称为 P 上的区间拓扑. 显然 $\theta(P)$ 是自对偶的，即 $\theta(P)=\theta(P^{op})$. 本书中，$[0,1]$ 上的拓扑均为通常的区间拓扑.

引理 1.2.2 设 P 是偏序集，$S\subseteq P$. 则 $\theta(S)\subseteq\{U\cap S: U\in\theta(P)\}$，即 S 上的区间拓扑粗于 P 上区间拓扑在 S 上的子拓扑.

证明 $\forall x\in S$，显然有 $\downarrow_S x=\downarrow x\cap S$，$\uparrow_S x=\uparrow x\cap S$. 故

$$\theta(S)\subseteq\{U\cap S: U\in\theta(P)\}.$$

引理 1.2.3 设 L 是完备格，$S\subseteq L$.

(1) 若 S 是 L 的交生成集，则 $(S,\upsilon(S))$ 是 $(L,\upsilon(L))$ 的子空间，即

$$\upsilon(S)=\{U\cap S: U\in\upsilon(L)\}.$$

(2) 若 S 是 L 的并生成集，则 $(S,\omega(S))$ 是 $(L,\omega(L))$ 的子空间，即

$$\omega(S)=\{U\cap S: U\in\omega(L)\}.$$

(3) 若 S(在 L 的诱导序下) 是 L 的完备子格，则 $(S,\theta(S))$ 是 $(L,\theta(L))$ 的子空间，即

$$\theta(S)=\{U\cap S: U\in\theta(L)\}.$$

证明 (1) $\forall x\in S$，$\downarrow_S x=\downarrow x\cap S$，故 $\upsilon(S)\subseteq\{U\cap S: U\in\upsilon(L)\}$.

另一方面，$\forall y\in L$，由 S 是 L 的交生成集，有 $y=\bigwedge(\uparrow y\cap S)$；从而

$$\downarrow y\cap S=\bigcap\{\downarrow_S u: u\in\uparrow y\cap S\}\in\upsilon(S)^c.$$

故 $\{U\cap S: U\in\upsilon(L)\}\subseteq\upsilon(S)$. 所以 $\upsilon(S)=\{U\cap S: U\in\upsilon(L)\}$.

(2) 是(1) 的对偶.

(3) 由(1) 和(2) 得到.

引理 1.2.4 设 P 是偏序集，$j: P\to\delta(P)$，$x\mapsto\downarrow x$，是 P 到其 Dedekind-MacNeille 完

备化 $\delta(P)$ 的嵌入映射. 则 $(j(P),\theta(j(P)))$(同胚于 $(P,\theta(P))$) 是 $(\delta(P),\theta(\delta(P)))$ 的子空间.

证明 显然 P 与 $j(P)$(赋予 $\delta(P)$ 的诱导序,即集包含序)是同构的,故 $(P,\theta(P))$ 同胚于 $(j(P),\theta(j(P)))$. 下证 $(j(P),\theta(j(P)))$ 是 $(\delta(P),\theta(\delta(P)))$ 的子空间. 记 $L=\delta(P)$.

1° $\theta(j(P))\subseteq\{U\cap j(P):U\in\theta(L)\}$.

$$\forall x\in P, \downarrow_{j(P)} j(x)=\{j(y):y\leqslant x\}=\downarrow_L j(x)\cap j(P),$$
$$\uparrow_{j(P)} j(x)=\{j(y):x\leqslant y\}=\uparrow_L j(x)\cap j(P),$$

故 $\theta(j(P))\subseteq\{U\cap j(P):U\in\theta(L)\}$.

2° $\{U\cap j(P):U\in\theta(L)\}\subseteq\theta(j(P))$.

$\forall A^\delta,B^\delta\in L$,

$$\downarrow_L A^\delta\cap j(P)=\{j(x):j(x)\subseteq A^\delta\}=\{\downarrow x:\downarrow x\subseteq A^\delta\}=\bigcap_{u\in A^\uparrow}\downarrow_{j(P)} j(u),$$
$$\uparrow_L B^\delta\cap j(P)=\{j(y):B^\delta\subseteq j(y)\}=\{\downarrow y:B^\delta\subseteq\downarrow y\}=\bigcap_{v\in B^\delta}\downarrow_{j(P)} j(v),$$

故 $\{U\cap j(P):U\in\theta(L)\}\subseteq\theta(j(P))$.

由 1° 和 2°,有 $\theta(j(P))=\{U\cap j(P):U\in\theta(L)\}$.

由引理 1.2.4 若偏序集 P 的 Dedekind-MacNeille 完备化 $\delta(P)$ 上的区间拓扑 $\theta(\delta(P))$ 是 T_2 的,则 $(P,\theta(P))$ 是 T_2 的.

定义 1.2.5 设 P 为 Z- 完备的偏序集. 令

$$\sigma^Z(P)=\{U\subseteq P:U=\uparrow U,\text{且 }\forall S\in Z(P),\text{若 }\bigvee S\in U,\text{则 }S\cap U\neq\varnothing\}.$$

以 $\sigma^Z(P)$ 为开子基生成的拓扑称为 P 上的 Z-Scott 拓扑,记为 $\sigma_Z(P)$. P 上的 Z-Lawson 拓扑定义为 $\lambda_Z(P)=\omega(P)\vee\sigma_Z(P)$. 记

$$\Omega_Z=\{A\subseteq P:A=\downarrow A,\text{且 }\forall S\in Z(P),S\subseteq A,\text{有 }\bigvee S\in A\}.$$

则 $A\in\Omega_Z\Leftrightarrow P\backslash A\in\sigma^Z(P)$. 故 Ω_Z 为 P 上 Z-Scott 拓扑的闭子基.

显然有 $\upsilon(P)\subseteq\sigma_Z(P)$,$\theta(P)\subseteq\lambda_Z(P)$,故 $\sigma_Z(P)$ 是 P 上的序相容拓扑,$(P,\sigma_Z(P))$ 为 T_0 空间,$(P,\lambda_Z(P))$ 为 T_1 空间. 当 $Z=\mathcal{D}$ 时,有 $\sigma^Z(P)=\sigma_Z(P)$,此拓扑为通常的 Scott 拓扑 $\sigma(P)$;相应地,$\lambda_Z(P)$ 为通常的 Lawson 拓扑 $\lambda(P)$.

易知,$\sigma^Z(P)$ 对集合并运算封闭,Ω_Z 对集合交运算封闭. $\forall X=\uparrow X\subseteq P,M\subseteq P$,定义

$$\mathrm{int}_{\sigma^Z(P)}X=\bigcup\{U\in\sigma^Z(P):U\subseteq X\}\in\sigma^Z(P),$$
$$\mathrm{cl}_{\sigma^Z(P)}M=\bigcap\{A\in\Omega_Z:M\subseteq A\}\in\Omega_Z.$$

注 1.2.1 可以在一般偏序集上定义 Z-Scott 拓扑和 Z-Lawson 拓扑(参见文献[34,35,36]),只需令

$$\sigma^Z(P)$$
$$=\{U\subseteq P:U=\uparrow U\text{ 且 }\forall S\in Z(P),\text{若 }\bigvee S\text{ 存在,且 }\bigvee S\in U,\text{则 }S\cap U\neq\varnothing\}.$$

特别地,P 上的 Scott 拓扑

$$\sigma(P)$$
$$=\{U\subseteq P:U=\uparrow U,\text{且 }\forall D\in\mathcal{D}(P),\text{若 }\bigvee D\text{ 存在,且 }\bigvee D\in U,\text{则 }D\cap U\neq\varnothing\}.$$