俄罗斯数学精品译丛

“十二五”国家重点图书

# Advanced Algebra (I)

# 高等代数（上）

[苏] 奥库涅夫 著　杨从仁 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

俄罗斯数学精品译丛

“十二五”国家重点图书

# 高等代数（上）

# Advanced Algebra (I)

[苏] 奥库涅夫 著

杨从仁 译

HITP

哈爾濱工業大學出版社

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

## 内容简介

本书是根据莫斯科、列宁格勒国营工业及理论书藉出版社出版的奥库涅夫教授所著《高等代数》一书译出的.本书分上、下两册,上册分为四章.分别为行列式论、线性方程式、线性变换和矩阵,群,环和体、二次形式.本册习题及练习答案见本书下册的书末.

本书适合于大学师生及数学竞赛爱好者阅读参考.


**图书在版编目(CIP)数据**

高等代数.上/(苏)奥库涅夫著;杨从仁译.—
哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2016.1
ISBN 978-7-5603-5481-1

Ⅰ.①高… Ⅱ.①奥… ②杨… Ⅲ.①高等代数
Ⅳ.①O15

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第176710号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 李 欣
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张12 字数227千字
版 次 2016年1月第1版 2016年1月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-5481-1
定 价 38.00元

◎

# 目录

# 行列式论

# 第1章

## §1 二阶行列式

代数是什么？这个问题，读者或许提出过不止一次了. 要对它的内容做一个详尽和完全的说明，是比较困难的，因为正和每门科学一样，它并不是一个已经死去的或者硬化了的理论. 相反的，它是不断地在变化和发展着.

所谓古典代数（系指18世纪到19世纪的代数），主要是从事于高次方程式的解法和有理函数性质的研究. 在近百年来，代数得到了它前所未有的发展. 近世代数的内容，多半在研究某一些集合的元素的运算. 这些运算和集合的元素，可能是各种各样的，但要紧的是：在许多地方，我们仅仅要求这些运算适合算术上的一些普通规则就够了. 还应该指出的是近世代数多半在讨论集合，根据运算规则的不同，我们就分别叫这些集合为群或环.

由于代数经过这样的扩张，许多初看起来好像和代数没有关系的问题，因而也得到了解答. 例如把群论和环论应用在微分方程式论、拓扑学、代数几何等，都得到了很大的成功.

为了使读者先熟习代数上的一些东西，我们把群和环的概念留在以后（第3章）再讲，现在先讲行列式.

在这个高等代数的教程里，我们先从行列式的理论开始，因为这个理论不仅在代数上有重要意义，而且在另外的数学分支里（例如，解析几何）也是一样. 以下我们就会看出，行列式的概念和含有多个未知量的一次方程式的理论是密切关联着的.

最简单的一次方程式——我们以后常常把它叫作线性方程式——是只含有一个未知量的方程式. 由初等代数,我们知道每一个只含有一个未知量的一次方程式都可以写成

$$ax = b \tag{1}$$

的形式. 假若 $a\neq 0$,以 $a$ 除方程式(1)的两端,就得出式(1)的唯一解,或者说方程式(1)的根为 $x=\frac{b}{a}$. 假若 $a=0$,但 $b\neq 0$,则方程式(1)无解,因为每一个数 $x$[①] 乘以零后,显然是零. 最后,假若 $a=0,b=0$,则每一个数都满足方程式(1),在这个情形下,我们所讨论的方程式就有无限多的根.

比较复杂一点的情形,是含有两个未知量的两个方程式

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \tag{2}$$

所谓方程组(2)的解,是指这样的一对数 $\alpha,\beta$:若令 $x=\alpha,y=\beta$,我们就可以把方程组(2)还原成恒等式.

要求出方程组(2)的解,先以 $b_2$ 乘遍第一个方程式,$b_1$ 乘遍第二个方程式,然后再由第一个方程式减去第二个方程式. 由此得出

$$(a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1 \tag{3}$$

用同样方法消去 $x$,得

$$(a_1b_2-a_2b_1)y=a_1c_2-a_2c_1 \tag{4}$$

假若代数式 $a_1b_2-a_2b_1$ 不等于零,用它除式(3)和式(4)的两端,得

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1},y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1} \tag{5}$$

我们很容易证明,未知量 $x,y$ 所取的值公式(5)满足方程组(2). 在本章§8,我们还可以看出,在 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ 的情形下,公式(5)代表方程组(2)的唯一的解.

**例 1** 解方程组

$$\begin{cases} 2x-5y=1 \\ 3x+y=4 \end{cases}$$

**解** 由公式(5),立刻得到方程式的根

$$x=\frac{1\times 1-4\times(-5)}{2\times 1-3\times(-5)}=\frac{1+20}{2+15}=\frac{21}{17}$$

$$y=\frac{2\times 4-3\times 1}{2\times 1-3\times(-5)}=\frac{8-3}{2+15}=\frac{5}{17}$$

直到现在,我们的讨论是限制在 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ 的情形下,但是,方程组

---

① 以后说"数"这个字,假若不做特别声明,都指的是复数(复数的特别情形是实数).

(2)的系数所取的数值有时满足 $a_1b_2-a_2b_1=0$. 在这个时候,公式(5)已不能适用,因为我们不可能以零作除数. 由一些例子,容易看出,在 $a_1b_2-a_2b_1=0$ 的情形下,方程组(2)或为矛盾方程组,或具有无限多的解.

例如,方程组

$$\begin{cases}x+y=1\\2x+2y=1\end{cases}\quad(a_1b_2-a_2b_1=1\times2-2\times1=0)$$

就是一个矛盾方程组,因为第二个方程式的左端是第一个方程式左端的二倍,但是它们的右端则相等.

方程组

$$\begin{cases}2x+y=2\\4x+2y=4\end{cases}\quad(a_1b_2-a_2b_1=2\times2-4\times1=0)$$

具有无限多的解,因为第二个方程式是第一个方程式乘以 2 的结果.

现在再回到公式(5),我们试研究它构造的规律.

我们先把方程组(2)的未知量前面的系数列成形式

$$\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{pmatrix}\tag{$*$}$$

这个形式叫作一个矩阵,系数 $a_1,b_1,a_2,b_2$ 叫作这个矩阵的元素. 这个矩阵的第一行是第一个方程式的系数,第二行是第二个方程式的系数. 从矩阵( * )作两个乘积(交叉相乘):$a_1b_2$ 和 $a_2b_1$. 假若由第一个乘积减去第二个乘积,恰得公式(5)的公分母

$$D=a_1b_2-a_2b_1$$

这个代数式叫作二阶行列式,它是由矩阵( * )的数所构成的,$a_1,a_2,b_1,b_2$ 叫作行列式的元素. 行列式 $D$ 常用符号

$$D=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$$

代表.

现在就容易看出公式(5)的分子的构造. $x$ 的分子是把分母的 $a_1$ 和 $a_2$ 依次换成方程组的绝对项 $c_1$ 和 $c_2$ 而得来. 完全同样,$y$ 的分子是把分母的 $b_1$ 和 $b_2$ 依次换成绝对项 $c_1$ 和 $c_2$ 而得来. 依照上面用的符号,我们就可以把这两个分子写成

$$c_1b_2-c_2b_1=\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\c_2 & b_2\end{vmatrix}$$

$$a_1c_2-a_2c_1=\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\a_2 & c_2\end{vmatrix}$$

由此,就可以把公式(5)写成

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \tag{6}$$

的形式.

**例2** 解方程组

$$\begin{cases} 5x-3y=7 \\ 2x-5y=1 \end{cases}$$

**解** 我们首先求这个方程组的行列式

$$D=\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}=5\times(-5)-2\times(-3)=-19$$

要求 $x$ 的分子,我们把行列式 $D$ 的第一列依次换成绝对项 7 和 1,经过这个代换后得

$$D_1=\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}=7\times(-5)-1\times(-3)=-32$$

同样,把 $D$ 的第二列依次换成绝对项,得出下面行列式

$$D_2=\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=5\times1-2\times7=-9$$

因为 $D\neq0$,由公式(5)得

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{-32}{-19}=\frac{32}{19},y=\frac{D_2}{D}=\frac{-9}{-19}=\frac{9}{19}$$

## §2 三阶行列式

现在我们讨论含有三个未知量的方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases} \tag{1}$$

为了求这个方程组的解,我们用下述的方法,这个方法虽不太自然,但是很快的就会达到目的.

所谓方程组(1)的解,是指这样的三个数 $\alpha,\beta,\gamma$:若令 $x=\alpha,y=\beta,z=\gamma$,我们就可以把方程组(1)还原成恒等式组.

用 $b_2c_3-b_3c_2$ 乘第一个方程式,$b_3c_1-b_1c_3$ 乘第二个方程式,$b_1c_2-b_2c_1$ 乘第三个方程式,然后再把这三个方程式相加得

$$(a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1)x+$$

$$(b_1b_2c_3-b_1b_3c_2+b_2b_3c_1-b_2b_1c_3+b_3b_1c_2-b_3b_2c_1)y+$$
$$(c_1b_2c_3-c_1b_3c_2+c_2b_3c_1-c_2b_1c_3+c_3b_1c_2-c_3b_2c_1)z=$$
$$(d_1b_2c_3-d_1b_3c_2+d_2b_3c_1-d_2b_1c_3+d_3b_1c_2-d_3b_2c_1)$$

我们容易看出,$y$ 和 $z$ 前面的括弧内所含的项相互消去,未知量 $y$ 和 $z$ 因而不再出现,由此得

$$(a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1)x=$$
$$(d_1b_2c_3-d_1b_3c_2+d_2b_3c_1-d_2b_1c_3+d_3b_1c_2-d_3b_2c_1) \tag{2}$$

在方程式(2)的左端,$x$ 前面的系数是一个比较繁长的式子

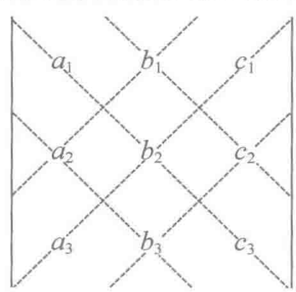
$$D=a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1 \tag{3}$$

这个式子叫作三阶行列式,$a_1,a_2,a_3,b_1,\cdots,c_1,\cdots$叫作这个行列式的元素. 三阶行列式常用记号

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

代表.

假若研究这个行列式的构造,我们就会发现规则(通常叫它对角线定则)




按照上式,沿着左主对角线从左上方到右下方得 $a_1b_2c_3$,沿着右主对角线从右上方到左下方得 $c_1b_2a_3$. 除了这两个主对角线外,还可以引四个不完全对角线 $b_1c_2,a_2b_3,b_1a_2$ 和 $c_2b_3$. 和左主对角线平行的不完全对角线可以叫它不完全左对角线,反之,叫它不完全右对角线. 我们容易看出,左主对角线上的元素的积 $a_1b_2c_3$,在行列式 $D$ 中是正号,右主对角线上的元素的积 $a_3b_2c_1$ 在 $D$ 中是负号. 行列式 $D$ 的其余四项的每一个,都同样是三个元素的积,在这个积中,有两个因子位于同一不完全对角线上,另外一个因子则在相反位置的角落里. 假若这个乘积的两个因子在不完全左对角线上,它在 $D$ 内的符号就是正,反之就是负. 例如由不完全对角线上取 $a_2$ 和 $b_1$,相反位置的角落里取 $c_3$,就得出 $D$ 的一项 $a_2b_1c_3$,因为有两个因子在不完全右对角线上,所以它在 $D$ 内的符号是负.

**例 1** 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&1&2\end{vmatrix}$$

**解** 利用对角线定则得

$$D=1\times2\times2+2\times1\times3+3\times2\times1-3\times2\times3-$$
$$2\times2\times2-1\times1\times1=-11$$

方程式(2)的右端,也同样是一个三阶行列式

$$D_1=\begin{vmatrix}d_1&b_1&c_1\\d_2&b_2&c_2\\d_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$$

由此我们就可以把方程式(2)写成

$$\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}\cdot x=\begin{vmatrix}d_1&b_1&c_1\\d_2&b_2&c_2\\d_3&b_3&c_3\end{vmatrix}\tag{4}$$

的形式.

同样可以证明未知量 $y$ 和 $z$ 依次满足方程式

$$\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}\cdot y=\begin{vmatrix}a_1&d_1&c_1\\a_2&d_2&c_2\\a_3&d_3&c_3\end{vmatrix}\tag{5}$$

$$\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}\cdot z=\begin{vmatrix}a_1&b_1&d_1\\a_2&b_2&d_2\\a_3&b_3&d_3\end{vmatrix}\tag{6}$$

事实上,假若用 $a_3c_2-a_2c_3$ 乘方程组(1)的第一个方程式,用 $a_1c_3-a_3c_1$ 乘第二个方程式,$a_2c_1-a_1c_2$ 乘第三个方程式,然后再把这些方程式相加,就会得出方程式(5).

最后,用 $a_2b_3-a_3b_2$ 乘方程组(1)的第一个方程式,用 $a_3b_1-a_1b_3$ 乘第二个方程式,$a_1b_2-a_2b_1$ 乘第三个方程式,然后再把这些方程式相加,就会得出方程式(6).

假若行列式 $D\neq0$,由方程式(4),(5),(6)就可以解出 $x,y,z$,即

$$x=\frac{\begin{vmatrix}d_1&b_1&c_1\\d_2&b_2&c_2\\d_3&b_3&c_3\end{vmatrix}}{D},y=\frac{\begin{vmatrix}a_1&d_1&c_1\\a_2&d_2&c_2\\a_3&d_3&c_3\end{vmatrix}}{D},z=\frac{\begin{vmatrix}a_1&b_1&d_1\\a_2&b_2&d_2\\a_3&b_3&d_3\end{vmatrix}}{D}$$

把未知量所取的值代入方程组(1),经过较长的计算后,就会知道方程组

(1)的每一个方程式都还原成为恒等式.

在本章§8中我们更进一步的研究一般的情形,就是含有 $n$ 个未知量和 $n$ 个方程式的线性方程组,由此,还可以知道,在 $D\neq 0$ 的情形下,方程组(1)只能有唯一的一组解.

**例 2** 利用行列式解方程组

$$\begin{cases} 2x_1-4x_2+x_3=1 \\ x_1-5x_2+3x_3=2 \\ x_1-x_2+x_3=-1 \end{cases}$$

**解** 首先计算行列式 $D$,即

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=2\times(-5)\times1+(-4)\times3\times1+1\times(-1)\times1-1\times(-5)\times1-(-4)\times1\times1-(-1)\times3\times2=-8$$

因为 $D\neq 0$,所以方程组有解,而且是唯一的. 其次,再计算其余的三个行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=1\times(-5)\times1+(-4)\times3\times(-1)+2\times(-1)\times1-(-1)\times(-5)\times1-(-1)\times3\times1-2\times(-4)\times1=11$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=2\times2\times1+1\times3\times1+1\times(-1)\times1-1\times2\times1-(-1)\times3\times2-1\times1\times1=9$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=2\times(-5)\times(-1)+(-4)\times2\times1+1\times(-1)\times1-1\times(-5)\times1-(-1)\times2\times2-1\times(-4)\times(-1)=6$$

由此得

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-\frac{11}{8}$$

$$x_2=\frac{D_2}{D}=-\frac{9}{8}$$

$$x_3=\frac{D_3}{D}=-\frac{6}{8}=-\frac{3}{4}$$

把未知量所取的值,代入原方程组验算,就知道都能适合.

## 习　题

1. 计算下面二阶行列式的数值

$$\begin{vmatrix}1 & 1\\2 & 3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3 & 5\\6 & 8\end{vmatrix},\begin{vmatrix}5 & 10\\2 & 4\end{vmatrix}$$

2. 计算下面的行列式

$$\begin{vmatrix}a^2 & ab\\ab & b^2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\dfrac{1+t^2}{1-t^2} & \dfrac{2t}{1-t^2}\\ \dfrac{2t}{t^2-1} & \dfrac{1+t^2}{t^2-1}\end{vmatrix}$$

3. 由验算法,证明下面的恒等式:

a) $\begin{vmatrix}a+a_1 & b+b_1\\c & d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\c & d\end{vmatrix}.$

b) $\begin{vmatrix}a+a_1 & b\\c+c_1 & d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1 & b\\c_1 & d\end{vmatrix}.$

c) $\begin{vmatrix}aa_1+bc_1 & ab_1+bd_1\\a_1c+c_1d & b_1c+dd_1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\c_1 & d_1\end{vmatrix}.$

d) $a_1\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\b_2 & c_2\end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\a_2 & c_2\end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}=0.$

e) $a_1\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\b_3 & c_3\end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix}a_2 & c_2\\a_3 & c_3\end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\a_3 & b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}.$

4. 利用二阶行列式解方程组:

a) $\begin{cases}5u+2v=3\\11u-7v=1\end{cases}.$

b) $\begin{cases}x\cos\alpha-y\sin\alpha=a\\x\sin\alpha+y\cos\alpha=b\end{cases}.$

c) $\begin{cases}5x-y=0\\x-2y=0\end{cases}.$

5. 利用对角线定则计算三阶行列式

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\\2 & 3 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\3 & 1 & 4\\8 & 9 & 5\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0 & a & 0\\b & 0 & c\\0 & d & 0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0 & -a & -b\\a & 0 & -c\\b & c & 0\end{vmatrix}$$

6. 证明

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

7. 把习题 3 的恒等式 a),b),d)扩充到三阶行列式.

8. 利用三阶行列式,解方程组:

a) $\begin{cases} x+y-2z=-3 \\ 5x-2y+7z=22. \\ 2x-5y+4z=4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} bx-ay=-2ab \\ -2cy+3bz=bc. \\ cx+az=0 \end{cases}$

## §3 高阶行列式

由于研究了二阶和三阶行列式的构造,我们就可以引入任意阶行列式的概念,利用高阶行列式,可以解含有任意多个未知量的线性方程组.

在此我们先用所谓二重添数去代表行列式的元素:行列式的每一个元素都用同一个字母 $a$ 代表,但是在 $a$ 的下面附加两个添数,第一个添数代表这个元素所在的行的数目,第二个添数代表它所在的列的数目. 例如在行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

中,元素 $c_2$ 所在的位置是第二行和第三列,所以我们可用 $a_{23}$ 去代表它.

利用新的记号,我们就可以把一个二阶或三阶行列式写成形式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \tag{2}$$

现在,利用这个新的记号来研究行列式的构造,就可以看出,用这样的记号,会得到怎样的成功.

为了这个目的,我们预先讨论另外一个问题. 假设给定了某一些元素的全体:$a_1, a_2, \cdots, a_n$,由初等代数知道,从这 $n$ 个元素,总共可以作出 $1\times2\times3\times\cdots\times$

$n$ 个顺列. 乘积 $1\times2\times\cdots\times n$ 常用简写记号 $n!$ 代表,并把它叫作 $n$ 的阶乘. 因为我们只注意这些元素在某一个顺列中的先后顺序,至于这些元素的性质如何,可以不必过问. 因此这些元素常用自然数 $1,2,\cdots,n$ 代表它. 以后我们把这些数叫作记数.

例如取三个记数:1,2,3. 由这三个记数,总共就可以作出 $3!=1\times2\times3=6$ 个顺列:123,132,312,321,231 和 213.

在这六个顺列中,先取出第一个 123. 在这个顺列中,记数是依着自然顺序排列着的,但是,其余的顺列就不然了. 例如取顺列 132,我们就可以看出,记数 3 是排列在记数 2 的前面. 一般地,在某一个顺列中,假如有某一个较大的记数排列在某一个较小的记数的前面,我们就说,在这个顺列中,有一个反序在这两个记数之间. 例如,顺列 132 就含有一个反序. 其次再看 312,我们立刻就知道它含有两个反序:3 排列在 2 的前面和 3 在 1 的前面. 又如 321,则含有三个反序,其余的依次类推,就可得出表 1:

**表 1**

| 顺列 | 反序数 |
|---|---|
| 123 | 无反序 |
| 132 | 一个反序 |
| 312 | 两个反序 |
| 321 | 三个反序 |
| 231 | 两个反序 |
| 213 | 一个反序 |

我们可以按照下述方法,计算反序数:首先计算有多少记数排列在 1 的前面. 其次,把 1 划去,再计算有多少记数排列在 2 的前面(划去了的记数 1,不再计算),把 2 划去后,再计算有多少记数排列在 3 的前面(划去了的两个记数,不再计算),其余依此类推下去. 假设在 1 前面有 $m_1$ 个记数,在 2 前面有 $m_2$ 个记数,等等,最后在 $n$ 前面有 $m_n$ 个记数,这个顺列的反序数应等于 $m_1+m_2+\cdots+m_n$.

**例 1** 计算顺列 531246 的反序数.

**解** 分别记数为:

1 前面有两个记数(5 和 3),划去 1:53~~1~~246.

2 前面有两个记数(5 和 3),划去 2:53~~1~~~~2~~46.

3 前面有一个记数(5),划去 3:5~~3~~~~1~~~~2~~46.

4 前面有一个记数(5),划去 4:$5\cancel{3}\cancel{1}\cancel{2}\cancel{4}6$.

5 前面没有任何记数,划去 5:$\cancel{5}\cancel{3}\cancel{1}\cancel{2}\cancel{4}6$.

最后,6 前面也没有记数(所有的都被划去). 由此,知道所求的反序数等于 6:2 +2 +1 +1 +0 +0 =6.

现在再回到前面的二阶行列式(1). 在式(1)右端的每一项中,我们特别把它的第一个添数按照自然顺序书写. 至于每项的第二个添数,则构成两个记数各种可能的顺列,即 12 和 21. 第一个顺列所对应的项$a_{11}a_{22}$取的是正号,第二个顺列所对应的项 $a_{12}a_{21}$ 取的是负号. 由此,可以看出,假若由某一项的文字的第二添数所构成的顺列,含有偶数个反序,这一项的符号就是正. 反之,假若这个顺列含有奇数个反序,这一项的符号就是负(零当作偶数看待). 最后我们再注意一点,在每一项中,都必须含有行列式的每一行和每一列的一个且唯一一个元素.

上面得出来的符号规则,对于三阶行列式,也同样的适用. 每一项的文字的第一个添数,都是按照自然顺序排列着的,第二个添数则构成三个记数 1,2,3 所有可能的顺列,即 3! =6 个顺列(123,231,312,321,213,132). 假若某个顺列所含的反序数是偶数,它所对应的项就取正号,反之,假若这个顺列所含的反序数是奇数,它所对应的项就取负号. 最后,每一项都必须含有行列式每一行和每一列的一个且唯一一个元素.

我们可以把上面所得出的符号规则作为基础,去定义任意阶行列式的概念.

设想给定了 $n^2$ 个数 $a_{ij}$被排列成形式

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (*)$$

我们把这个排列(*)叫作一个矩阵,每个数 $a_{ij}$都叫作这个矩阵的元素. 由这个矩阵,我们介绍下述定义:

**定义 1** 由矩阵(*)的 $n^2$ 个元素所构成的 $n$ 阶行列式,是指一个含有 $n!$ 项的代数和,每一项都是由(*)中的每一行和每一列任取一个且唯一一个元素所构成的积. 把每一项的因子按照第一个添数的自然顺序书写后,假若第二个添数所成的顺列的反序数是 $t$,这一项前面的符号就令它等于$(-1)^t$.

由此,假若 $t$ 是偶数,这一项的前面就是正号,反之,$t$ 是奇数时,就是负号.

$n$ 阶行列式常用记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$①

代表.

**例 2** 设有一四阶行列式,除 $a_{11}, a_{14}, a_{22}, a_{23}, a_{32}, a_{33}, a_{41}$ 和 $a_{44}$ 外,其余的元素全是零. 试计算这个行列式.

**解** 根据假设,这个行列式的形式是

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$$

依照定义 1,$D$ 是一个含有 $4!=1\times2\times3\times4=24$ 项的代数和. 但是,在所有假设下,除去

$$a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}, a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}, a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}, a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$$

四项外,其余的项完全是零.

每一项的第一个添数是按照自然顺序排列着的,第二个添数依次构成四个顺列

$$4231 \quad 4321 \quad 1234 \quad 1324$$

这四个顺列的反序数依次是 5,6,0 和 1. 由此第一项和第四项应取负号,第二、三两项应取正号,即

$$D=-a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}+a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}+a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} \tag{3}$$

特别地,假若

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

把这些元素的数值代入式(3),得

$$D=-2\times3\times3\times4+2\times1\times1\times4+1\times3\times3\times5-1\times1\times1\times5=-24$$

**例 3** 问 $i$ 和 $j$ 取何数值时,五阶行列式的项 $a_{21}a_{1i}a_{5j}a_{43}a_{32}$ 取负号?

**解** 首先添数 $i$ 和 $j$ 只能取下面两组值:a) $i=4, j=5$,或 b) $i=5, j=4$. 因为,假若 $i$ 和 $j$ 取另外的数值,乘积 $a_{21}a_{1i}a_{5j}a_{43}a_{32}$ 就会至少含有某一列的两个元素. 为了决定这一项的符号,先把元素书写的顺序变更,使第一个添数按照自然

① 假使在某些情形下,不会发生误解时,我们常用简写记号 $|a_{ik}|$ 代表行列式.