

初中重难点突破宝典

MATHS

BAODIAN

突破

初二
数学

宝典

主 编 叶尧城
副主编 冯善庆
孙延洲



突破

初中重难点突破宝典

BAODIAN 宝典

主 编 叶尧城
副主编 冯善庆 孙延洲
编 委 李作松 罗昭旭

初二
数学

湖北教育出版社

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

初二数学重难点突破宝典/叶尧城主编.—2 版.
—武汉:湖北教育出版社,2002
ISBN 7-5351-2699-5

I.初… II.叶… III.数学课—初中—教学参考资料 IV.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 012409 号

出版 发行:湖北教育出版社
网址:<http://www.hbedup.com>

武汉市青年路 277 号
邮编:430015 传真:027-83619605
邮购电话:027-83669149

经 销:新 华 书 店
印 刷:文字六〇三厂印刷
开 本:850mm×1168mm 1/32
版 次:2003 年 8 月第 2 版
字 数:203 千字

(441021·湖北襄樊盛丰路 45 号)
8 印张
2003 年 8 月第 2 次印刷
印数:10 001—15 000

ISBN 7-5351-2699-5/G·2195

定价:10.00 元

如印刷、装订影响阅读,承印厂为你调换

前 言

《初中重难点突破宝典》(数、理、化)是依据九年义务教育初中各科最新教学大纲规定的任务和要求,为培养面向 21 世纪初中学生应具备的学科素质和能力而编写的。旨在密切配合初中各科教学,拓宽学生的知识面,提升学生的综合素质。本书将通过对精典例题的分析与说明,导出学习中的重难点,再对重难点知识进行消化、分解、综合,总结学习方法,归纳认知规律,拓展思维路径,使学生能掌握并运用知识解决问题,且能在应用能力与创新意识上有所突破。

根据当前初中数理化教学的实际需要及学生的知识结构,《初中重难点突破宝典》按教材中的顺序分章节进行编写,每章节由以下四部分组成:



精典题解

Learn

精选典型例题进行精炼讲解,力求使每道例题都能对该章节的重点或难点有所反映。在分析中着重注意问题的解题思路,阐释思想方法,引导读者掌握分析问题、解决问题的方法(重点突出解决问题的通法),并给出较为详细规范的解答。



重难点透析

Understand

重点剖析本章的重难点知识,说明重在何处,难在哪里,如何理解,怎样归纳、拓展,以知识为载体培养学生分析问题和解决问题的能力。同时,为进一步加强重难点知识的理解和把握,也适当补充了一些例子加以阐述。



突破训练

Try

依据剖析的本章内容的重难点,有针对性地精选一些习题供学生练习。其中带★号的习题稍稍增加了一些思维强度和综合度。



创新与应用

Create

为积极贯彻国家教育部有关实施素质教育的文件精神,在本书中特选了一些与生产和生活实际相关的学科问题及创新题型,着重培养综合能力、创新意识和创新能力。

在每章学习结束后,我们均给出了一组单元训练题,其目的是使学生巩固所学的有关知识,同时也便于教师对学生反馈的情况进行评介与调控。书末附有3套综合测试题以及参考答案。

“精、实、新”是本书的主要特色,我们在编写过程中力求例题精、讲解精、习题精;用朴实的文笔,使内容较为充实,能为学生打下扎实的基础;同时在选编例习题时,注意了选用近两年出现的新颖问题和最新题型,培养学生的创新意识和创新能力,从而使得本书具有较强的针对性、启发性、实用性和指导性。

参加本丛书编写的均是湖北省一线优秀的特级教师和高级教师,他们不仅教学经验丰富,而且极富开拓精神,为奉献给读者真正实用的精品,在萃取和钻研最新资料上下了很深的功夫。相信读者在使用本书的过程中就有体会。

在编写和审校中,尽管我们力求避免失误,但疏漏之处仍恐在所难免,敬请广大读者批评指正。

编者

2002年1月21日

代 数

第八章 因式分解

8.1 提公因式法	1
8.2 运用公式法	4
8.3 分组分解法	8
8.4 十字相乘法	11
单元训练(一)	14

第九章 分式

9.1 分式	16
9.2 分式的性质	18
9.3 分式的乘除法	22
9.4 分式的加减法	25
9.5 含有字母系数的一元一次方程	29
9.6 可化为一元一次方程的分式方程 及其应用	32
单元训练(二)	35

第十章 数的开方

10.1 平方根	38
10.2 平方根表	42
10.3 用计算器进行数的简单计算	44

2.1-3.5

10.2

10.4 立方根	47
10.5 ~ 10.6 立方根表、用计算器求数的 立方根	50
10.7 实数	53
单元训练(三)	56

第十一章 二次根式

11.1 二次根式	59
11.2 二次根式的乘法	62
11.3 二次根式的除法	66
11.4 最简二次根式	71
11.5 二次根式的加减法	73
11.6 二次根式的混合运算	77
11.7 二次根式 $\sqrt{a^2}$ 的化简	82
单元训练(四)	85

几 何

第三章 三角形

3.1 关于三角形的一些概念	88
3.2 三角形三条边的关系	91
3.3 三角形的内角和	93
3.4 全等三角形	96
3.5 全等三角形的判定(一)	99
3.6 全等三角形的判定(二)	102

3.7 全等三角形的判定(三)	106
3.8 直角三角形全等的判定	109
3.9 角的平分线	112
3.10 尺规作图	115
3.11 作图题举例	117
3.12 等腰三角形	119
3.13 等腰三角形的判定	122
3.14 线段的垂直平分线	125
3.15 轴对称和轴对称图形	128
3.16 直角三角形	131
3.17 勾股定理	133
3.18 勾股定理的逆定理	136
单元训练(五)	139

第四章 四边形

4.1 四边形	142
4.2 多边形的内角和	144
4.3 平行四边形	147
4.4 平行四边形的判定	150
4.5 矩形,菱形	153
4.6 正方形	156
4.7 中心对称和中心对称图形	159
4.8 梯形	162

4.9 平行线等分线段定理	165
---------------------	-----

4.10 三角形、梯形的中位线	167
-----------------------	-----

单元训练(六)	171
---------------	-----

第五章 相似形

5.1 比例线段	174
----------------	-----

5.2 平行线分线段成比例定理	178
-----------------------	-----

5.3 相似三角形	183
-----------------	-----

5.4 三角形相似的判定	186
--------------------	-----

5.5 相似三角形的性质	191
--------------------	-----

5.6 相似多边形	196
-----------------	-----

单元训练(七)	198
---------------	-----

综合测试(一)	201
---------------	-----

综合测试(二)	204
---------------	-----

综合测试(三)	207
---------------	-----

参考答案及提示	211
---------------	-----



第八章 因式分解

8.1 提公因式法



精典题解

* 例 1 下列整式变形中,属于因式分解的是().

(A) $(x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

(B) $x^3 + 2x^2 + 3x + 5 = x(x^2 + 2x + 3) + 5$

(C) $x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = (x+y)^2(x-y)^2$

(D) $x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x)$

分析 对一个式子的变形是否为因式分解,其根据是因式分解的意义,即在保证变形正确的前提下,主要看结果是不是整式的积的形式.

解 (A)式的结果是多项式,所以(A)不是因式分解变形;(B)式右边仍是多项式和的形式,也不是因式分解;(D)式左边 $\neq$ 右边,本身就是错误的变形.因此(C)正确.即(C)符合因式分解的要求,是因式分解变形.

 说明 (1)“多项式的乘法”和“因式分解”属互逆变形.如(A)中,从左到右,属“多项式乘法”,而从右到左,则属“因式分解”;(2)提取公因式时,应注意“公因式”是指各项都具有的因式,(B)中, x

* 本书中选择题的 4 个选项中,仅有一项是正确的.

就不是多项式“ $x^3 + 2x^2 + 3x + 5$ ”的公因式；(3)提取公因式时应注意分解后，项数不能减少。(D)中右边应为“ $x(x^2 + 2x + 1)$ ”，只因掉“1”而造成变形错误。

例 2 分解因式

$$(1) -2x^3 + 4x^2 - 10x;$$

$$(2) 5a(a - 2b)^2 - 20b(2b - a)^2;$$

$$(3) -7(m - n)^3 + 21(n - m)^2 - 28(n - m)^3;$$

分析 提取公因式法实际是乘法分配律的逆运算，找公因式从三步入手：一看各项系数的最大公约数；二看各项中相同的字母；三看相同字母的最低次幂。但要注意这三道例题中(1)是提取单项式型，(2)、(3)是把一个多项式看成一个整体。

$$\begin{aligned}\text{解 } (1) -2x^3 + 4x^2 - 10x &= -(2x^3 - 4x^2 + 10x) \\ &= -2x(x^2 - 2x + 5).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) 5a(a - 2b)^2 - 20b(2b - a)^2 \\ = 5a(a - 2b)^2 - 20b(a - 2b)^2 \\ = 5(a - 2b)^2(a - 4b).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) -7(m - n)^3 + 21(n - m)^2 - 28(n - m)^3 \\ = -7(m - n)^3 + 21(m - n)^2 + 28(m - n)^3 \\ = -7(m - n)^2(-3m + 3n - 3) \\ = 21(m - n)^2(m - n + 1).\end{aligned}$$

 说明 对于把某一多项式看成一个整体的提取公因式，首先要使它们变为可提取的公因式，如例(3)中 $(m - n)^3$ 与 $(n - m)^2$ ，须把 $(n - m)^2$ 变为 $(m - n)^2$ 。

例 3 将多项式 $756a^{2m} - 280a^m + 540a^{m-1}$ 分解因式(m 为大于 1 的整数)。

分析 本题的关键问题是在 $756a^{2m}$ 、 $-280a^m$ 和 $540a^{m-1}$ 三个项中，它们的最大公因式是什么？这里可分两步进行：(1)将各项系数用竖式除法分别分解为 $2^2 \times 3^3 \times 7$ 、 $-2^3 \times 5 \times 7$ 和 $2^2 \times 3^3 \times 5$ ，它们的最大公因数应为 2^2 ；(2)对于 a^{2m} 、 a^m 和 a^{m-1} ，其最大公因式应为 a^{m-1} 。

解 $756a^{2m} - 280a^m + 540a^{m-1} = 4a^{m-1} \cdot (189a^{m+1} - 70a + 135)$.

 **说明** 提取公因式时,一定要提取多项式各项中的最大公因式,否则就算没有完成因式分解.为了便于比较,可将 a^{2m} 、 a^m 分别改写成 $a^{m+1} \cdot a^{m-1}$ 、 $a^{m-1} \cdot a$.



重难点透析

因式分解是多项式变形的重要手段,在化简分式、解一元二次(或高次)方程、解二次不等式中的作用举足轻重.熟练掌握因式分解对提高解题技能十分重要.由于因式分解是整式乘法的逆运算,因此逆向思考问题总是比较困难的,认真掌握分解因式的方法是学习因式分解的关键之所在.提取公因式法是因式分解中最优先考虑的方法,也是用得最多的方法.在综合题的因式分解中,提取公因式法往往成为采用其它方法的前提.

本节内容的难点在于正确判断多项式中的最大公因式.提取公因式后,括号中各项的符号,项数等都发生变化,这也常常会造成错误.应在学习中引起注意.



突破训练

1. 下列各式由左到右的变形是因式分解的是().

(A) $9x^2 + x = x^2(9 + \frac{1}{x})$

(B) $-9 + m^2 = (3 + m)(m - 3)$

(C) $a^2 - 2ab + b^2 + a - b = (a - b)^2 + (a - b)$

(D) $(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$

2. 下面是对多项式 $-60x^{2n+1} + 90x^{2n-1} - 360x^{n+1}$ 的因式分解(n 为大于 2 的整数),其中正确的是().

(A) $-60x^{2n+1} + 90x^{2n-1} - 360x^{n+1} = -30x^{n+1}(2x^n + 3x^{n-2} - 12)$

(B) $-60x^{2n+1} + 90x^{2n-1} - 360x^{n+1} = -30(2x^n - 3x^{n-2} - 12)$

(C) $-60x^{2n+1} + 90x^{2n-1} - 360x^{n+1} = -30x^{n+1}(2x^n - 3x^{n-2} + 12)$

(D) $-60x^{2n+1} + 90x^{2n-1} - 360x^{n+1} = -30x^{n+1}(2x^n - 3x^{n-1} + 12)$

3. 分解因式

(1) $6x^3 - 8x^2 - 4x$;

(2) $5m(a+2) - 2n(2+a)$;

(3) $a(x-2) - b(2-x) + c(x-2)$;

(4) $x(x+y)(x-y) - x(x+y)^2$;

(5) $-x^{n+4} + x^{n-1} - x^{2n-1}$ (n 为大于 1 的整数);

(6) $-126y^{m-3} - 105y^{2m-3} + 210y^{m-5}$ (m 为大于 1 的整数);

4. 若代数式 $x(x-3)(x-4) - 5(x-3)(x-4)$ 的值为零, 则 x 的值是多少?

5. 若 $x^2 = x - 1$, 求 $x^{2000} - x^{1999} + x^{1998}$ 的值.

6. 若 a, b, c 为三角形三条边, 且 $(a-b)b + c(b-a) = c(c-a) + b(a-c)$. 试问这个三角形是什么三角形?

★7. 分解因式后, $(x^2 + 5x + 3)(x^2 + 5x - 23) + k = (x^2 + 5x - 10)^2$. 则 k 的值是多少?

★8. 若 x 和 y 是大于 1 的整数, 求证: 代数式 $[(x^2y + 2yx - 3y) - (3x - 2x^2 - x^3)]$ 是代数式 $(x+y)$ 的整数倍.



创新与应用

9. 若代数式 $x + 1 + \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{6}(x+1) + \frac{1}{12}(x+1) + \cdots + \frac{1}{1892}(x+1) + \frac{1}{1980}(x+1)$ 的值是 89, 试问 x 的值是多少?

10. 已知代数式 $(a_1 - a_2)a_2 + a_3(a_2 - a_1)$ 是正数, 而 $(a_1 - a_2)a_3 + a_2(a_2 - a_1)$ 是负数, 试判断 a_1, a_2, a_3 的大小关系.

11. 计算 $1999 \times 1999 + 2000 + 1999$.

12. 当 $x = 22.3$ 时, 求代数式 $2.46x + 8.72x - 1.18x$ 的值.

8.2 运用公式法



精典题解

例 1 分解因式: $64x^7y - xy$.

分析 本题两项很明显的有最大公因式: “ xy ”. 当“ xy ”提出

后,多项式“ $64x^6 - 1$ ”能否再分解呢?可将其变形后继续观察.如“ $64x^6 - 1$ ”可改写成“ $(4x^2)^3 - 1^3$ ”,也可改写成“ $(8x^3)^2 - 1^2$ ”.可见,还可以用乘法公式继续分解.

$$\begin{aligned}\text{解(一)} \quad 64x^7y - xy &= xy(64x^6 - 1) = xy[(8x^3)^2 - 1^2] = xy \\ &(8x^3 + 1)(8x^3 - 1) = xy[(2x)^3 + 1][(2x)^3 - 1] = xy(2x + 1) \cdot (4x^2 \\ &- 2x + 1)(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) = xy(2x + 1)(2x - 1) \cdot (4x^2 - 2x \\ &+ 1)(4x^2 + 2x + 1).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{解(二)} \quad 64x^7y - xy &= xy(64x^6 - 1) = xy[(4x^2)^3 - 1] = xy(4x^2 \\ &- 1)[(4x^2)^2 + 4x^2 + 1] = xy(2x + 1)(2x - 1) \cdot [(4x^2)^2 + 8x^2 + 1 - \\ &4x^2] = xy(2x + 1)(2x - 1)[(4x^2 + 1)^2 - 4x^2] \\ &= xy(2x + 1)(2x - 1)[(4x^2 + 1 + 2x)(4x^2 + 1 - 2x)] \\ &= xy(2x + 1)(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)(4x^2 - 2x + 1).\end{aligned}$$

说明 一个二次以上的多项式能否分解因式应视题目要求决定.如“ $4x^2 + 2x + 1$ ”和“ $4x^2 - 2x + 1$ ”在有理数范围内不能再分解,那么在以后学习的实数范围内能不能再分解呢?目前我们只考虑在有理数范围内分解因式.

例2 利用因式分解计算

$$(1) 1999^2 - 1998 \times 2000;$$

$$(2) 101^2 + 99^2.$$

分析 运用因式分解的方法能对某些较复杂的数的计算起到简化作用,关键是要正确掌握公式的特点,合理变形,巧妙运用.

$$\begin{aligned}\text{解} \quad (1) 1999^2 - 1998 \times 2000 &= 1999^2 - (1999 - 1)(1999 + 1) \\ &= 1999^2 - (1999^2 - 1) = 1999^2 - 1999^2 + 1 = 1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) 101^2 + 99^2 &= (100 + 1)^2 + (100 - 1)^2 \\ &= 100^2 + 200 + 1 + 100^2 - 200 + 1 \\ &= 2000 + 2 = 2002.\end{aligned}$$



重难点透析

本节内容一是公式多,容易混淆;二是题目类型多,解题思路

广;三是提取公因式法和应用公式法联用,变形复杂,项数、指数、系数和符号容易出错.可谓集重难点于一体.

运用公式法分解因式是因式分解中的重要方法,它和提取公因式法一样,不受多项式项数的限制,用途极为广泛.但要熟练运用公式法分解因式,其难度也不可低估.需要较强的观察能力、熟练的变形技能和良好的思维及学习习惯.难就难在:

(1)如何选用公式;

(2)如何通过变形满足乘法公式所需的条件.如 $4x^2$ 、 $\frac{1}{8}x^3$ 可分别变形为 $(2x)^2$ 和 $(\frac{1}{2}x)^3$, $4x^2 - 4x + 1 - 9y^2$ 可变形为 $(2x - 1)^2 - (3y)^2$ 等;又如例 2,看起来不能运用公式分解,但变形后可用乘法公式分解;

(3)分解后的因式能否运用公式再分解.如 $(x^3 + 1)(x^2 - x + 1)$ 中的 $x^3 + 1$ 在有理数范围内还可以继续分解.



突破训练

1. 下面四个多项式,在有理数范围内不能分解因式的多项式是().

(A) $x^4 + x^2y^2 + y^4$ (B) $3x^2 + 5y^2$

(C) $\frac{1}{4}x^2 + xy + y^2 - 1$ (D) $4x^2 + 2xy + \frac{1}{4}y^2 - 1$

2. 下面因式分解正确的是().

(A) $x^{12} - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)(x^6 + 1)$

(B) $x^4y + xy = xy(x + 1)(x^2 + x + 1)$

(C) $y^2(2x - y) - 4x(y - 2x) - 8x^2(y - 2x) = (2x - y)(y^2 + 4xy - 8x^2)$

(D) $x^6 - 64 = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 2x + 4)(x^2 - 2x + 4)$

3. 下列各式中,是完全平方式的是().

(A) $16x^2 - 4xy + y^2$ (B) $m^2 + mn + n^2$

(C) $9p^2 - 24pq + 16q^2$ (D) $u^2 + 2uv + \frac{1}{4}v^2$

4. 运用公式计算 99^2 ,可以先计算().

(A) $(100 - 1)^2$ (B) $(100 + 1)(100 - 1)$

(C) $(99 + 1)(99 - 1)$ (D) $(99 + 1)^2$

5. 把下列各式分解因式

(1) $(3a - 2b)^2 - (2a + 3b)^2$;

(2) $a^2(x - y) + b^2(y - x)$;

(3) $25a^2 + 36b^4 + 60ab^2$;

(4) $-3xy - 9y^2 - \frac{1}{4}x^2$;

(5) $3p(x + 1)^3y^2 + 6p(x + 1)^2y + 3p(x + 1)$;

(6) $0.04a^2 - \frac{1}{9}b^2 - \frac{1}{6}bc - \frac{1}{16}c^2$;

(7) $\frac{1}{729}x^6 - 64y^6$.

6. 若 x, m, n 均为大于 1 的不同整数, 求证: $3x^{3m+2n} - 12x^m$ 的值至少有四个正整数因数.

★7. 已知 $a^2b^2 + 1 = 4ab - a^2 - b^2$, 求 a, b 的值.

★8. 已知 $x + y = -2, x^2 + y^2 = 2$, 求 $x^4 + y^4 - 2x^2y^2$ 的值.



创新与应用

9. 图 8-1 是一个边长为 $(a + b + c)$ 的正方体; 图 8-2 是边长分别为 a, b, c 的三个正方体; 图 8-3 是一个长为 $(a + b)$, 宽为 $(b + c)$, 高为 $(a + c)$ 的长方体. 用因式分解的方法证明: 图 8-1 中的正方体的体积减去图 8-2 中“三个正方体体积之和”的差是图 8-3 中长方体体积的 3 倍.

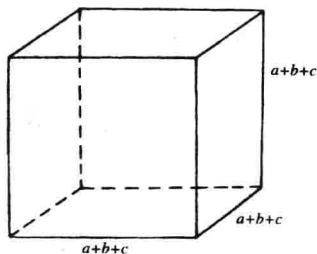


图 8-1

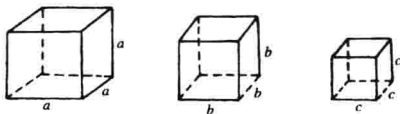


图 8-2

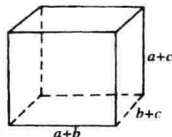


图 8-3

10. 在边长为 $(a + b + c)$ 的正方形中, 作图证明 $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = (a + b + c)^2$.

✓ 求证: $25^7 + 5^{13}$ 能被 30 整除.

12. 计算: $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + 96^2 - 95^2 + \cdots + 2^2 - 1^2$.

8.3 分组分解法



经典题解

例 1 分解因式 $5a^2 - 15a + 3ab - 9b$

分析 先观察多项式中的各项系数,发现一、三两项结合,二、四两项结合后,两组均能提取公因式,并且提取公因式后,两项之和又有公因式 $(5a + 3b)$ 可提.

$$\begin{aligned}\text{解 } 5a^2 - 15a + 3ab - 9b &= (5a^2 + 3ab) - (15a + 9b) \\ &= a(5a + 3b) - 3(5a + 3b) \\ &= (5a + 3b)(a - 3).\end{aligned}$$

例 2 已知: $ab \neq 0$. 而 $a^4b - a^2b^2 + a^3b^2 - ab^4$ 的值为零. 求证: $|a| = |b|$.

分析 由题意,若结论成立,则有 $a = b$ 或 $a = -b$ 即 $a - b = 0$ 或 $a + b = 0$,故多项式 $a^4b - a^2b^2 + a^3b^2 - ab^4$ 必能被多项式 $(a + b)$ 和 $(a - b)$ 整除,这就提示我们必须对多项式进行因式分解,因式中必有 $(a + b)$ 和 $(a - b)$ 的因式.

$$\begin{aligned}\text{解 } a^4b - a^2b^2 + a^3b^2 - ab^4 &= (a^4b - a^2b^2) + (a^3b^2 - ab^4) = \\ &= a^2b(a^2 - b^2) + ab^2(a^2 - b^2) = (a^2 - b^2)(a^2b + ab^2) = ab(a + b)^2(a - b)\end{aligned}$$

由题设: $ab(a + b)^2(a - b) = 0$, 且 $ab \neq 0$, $\therefore (a + b)^2$ 或 $(a - b) = 0$, 即 $a = b$ 或 $a = -b$, 故 $|a| = |b|$.

说明 通过分组对多项式进行因式分解. 其分组的方法较多,但应注意如下原则:(1)分组仍属于恒等变形;(2)分组后有利于用其它方法对多项式进行因式分解.

例 3 分解因式 $x^3 + x - 2$.

分析 通过实践发现这个多项式的三项无论怎么分组都没有公因式可提,但补入 $(x^2 - x^2)$ 后就有公因式可提,变为 $(x^3 - x^2) +$