

教与学 · 教与学 · 教与学 · 教与学 · 教与学

立体几何



天津科学技术出版社

教 与 学

立 体 几 何

丛书顾问 崔孟明

编 者 逯新丽 刘 砚 玉 坚

天津科学技术出版社

教 与 学

立 体 几 何

丛书顾问 崔孟明

编 者 逯新丽 刘 砚 玉 坚

※

天津科学技术出版社出版

天津市赤峰道130号

天津市新华印刷二厂印刷

新华书店天津发行所发行

※

开本787×1092毫米 1/32 印张7.375 字数152 000

1988年5月第1版

1988年5月第1次印刷

印数:1—51900

ISBN 7-5308-0334-4/G·69 定价: 1.60元

前 言

教学过程是师生双边活动统一的过程。但应强调指出：教学活动的中心是学生，教和学都是为使學生尽多尽快地增长知识和才干；教学活动的主体也是学生，不论多么高明的教师用怎样巧妙的方法去教，学生都必须经过自己的实践和思维，才能最后牢固地掌握知识和增长能力。因此，教师的主导作用，首先是激发学生学习的积极性、主动性，同时要及时地满足学生对知识的需要，恰当地帮助学生克服学习中的困难。在整个教学活动中教师都要注意，不要伤害学生的主动性和积极性，不要破坏学生思维的连续和完整。要做到这一点，教师就必须充分了解学生的学习过程和心理活动。因此，当今国内外，都把对学习方法的研究作为教法研究的一项重要内容，以使教学活动更好地适应学生需要，进一步提高教学效率。

《教与学》丛书就是基于上述思想和多年实践经验编写而成的，旨在从教和学两方面启发学生主动探求，积极思维，尽多尽快地增长知识和自主学习的能力。

本丛书包括数学、物理、化学、生物、语文和英语六个学科，每科与课本对应分册，每册均按章或单元设有若干栏目。因这些栏目是根据学科内容需要设置的，因此，有共同的，也有专设的。

“知识结构”是用图表或简短文字说明相关范围内各项

知识间的推演、包含等内在联系，从中可找到学习的途径、知识的重点和把握知识的关键。可见它既是学习入门的向导，也是掌握知识的纲领。

“知识反馈”是一组检查课堂学习效果的练习题。它的编写，既考虑了覆盖面，也考虑了重点、难点和能力、方法的训练。因此，通过这套练习题，不仅能了解课堂效果，而且能使所学知识得到及时的巩固和进一步的理解，并可提高对知识的运用能力。

“课堂以外”是一在较大知识范围设立的比较活跃的栏目，可满足多方面的需要。其内容既与教材紧密衔接，又属课堂以外，有动脑的也有动手的。希望通过它能启迪智力、训练能力、开阔视野、疏通思路。

“教材提示”和“学法指导”，一方面是给学生以具体的知识，一方面是通过具体的学习过程教给学生一些富有成效的学习方法。

本丛书由景山学校校长、特级教师崔孟明同志任学术指导，由李勃梁、高柏林、宋志唐、邢永庆等同志分任各科主编，由京津部分有多年教学经验的教师编写。

本丛书的编写，虽几经讨论修改，但由于是经验性材料，难免有不足之处，欢迎读者批评指正。

目 录

第一章 直线和平面	(1)
第一单元 平面	(2)
知识结构	(2)
教材提示	(4)
知识反馈	(7)
答案与提示	(11)
学法指导	(17)
课堂以外	(21)
第二单元 空间两条直线	(23)
知识结构	(23)
教材提示	(25)
知识反馈	(32)
答案与提示	(41)
学法指导	(47)
课堂以外	(54)
第三单元 空间直线和平面	(58)
知识结构	(58)
教材提示	(62)
知识反馈	(72)
答案与提示	(80)
学法指导	(83)
课堂以外	(90)

第四单元 空间两个平面(92)

知识结构(92)

教材提示(96)

知识反馈(101)

答案与提示(110)

学法指导(115)

课堂以外(123)

第二章 多面体和旋转体.....(127)

第一单元 多面体.....(127)

知识结构(127)

教材提示(131)

知识反馈(136)

答案与提示(145)

学法指导(149)

课堂以外(155)

第二单元 旋转体.....(158)

知识结构(158)

教材提示(163)

知识反馈(169)

答案与提示(177)

学法指导(181)

课堂以外(190)

第三单元 多面体和旋转体的体积.....(193)

知识结构(193)

教材提示(195)

知识反馈(199)

答案与提示(210)

学法指导(215)

课堂以外(222)

第一章 直线和平面

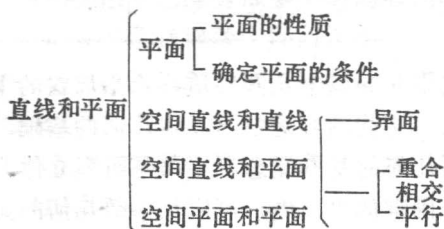
平面几何研究平面图形的性质，立体几何研究空间图形的性质。图形的性质反映形状、大小和相互位置关系，通常是用定义、公理和定理来描述的。

在立体几何中，图形各部分不全在同一平面内，图形各元素之间的位置关系较为复杂，但它们都可以借助于直线和平面的位置关系来研究。因而直线和平面的位置关系就成了研究立体几何的中心。

直线和直线、直线和平面、平面和平面之间的三种位置关系，即重合、相交、平行。（直线在平面内可视为直线与平面重合）

由于在直线和平面的位置关系中，平行和垂直应用较为广泛，因此它就成了研究的重点。

在研究方法上，有关直线和平面平行或垂直的问题，常常要转化为直线和直线平行或垂直的问题。即转化为平面几



何的问题，所以要以平面几何为基础来研究立体几何。但要注意应用平面几何知识时，首先应确定研究对象是在同一平面内。

第一单元 平 面

【知识结构】

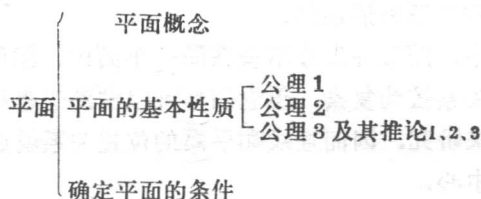
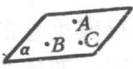
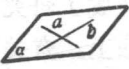
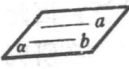


表 1-1

确定平面条件	不在同一条直线上的三点	一条直线和直线外的一点	两条相交直线	两条平行直线
图形				

本单元主要研究平面的概念及其性质，水平放置的平面图形的直观图的画法。这些内容是学习立体几何的基础。

直线是研究平面几何的基本概念，平面是研究立体几何的基本概念。在一个确定的平面内，可以用平面几何的方法来确定直线。两个平面相交，则可在空间确定一条直线，又

有公理 3 来保证确定平面的条件。

一、平面概念

与平面几何中学过的点、直线的概念一样，平面也是一个不需定义的基本概念。对于平面概念的理解主要应抓住平面的两个基本特征：（1）平；（2）可以无限延展。

二、平面的基本性质

公理 1、2、3 是平面的三个基本性质，它们是立体几何进一步推理的基础。

公理 1 是直线在平面内这一概念的理论依据，可用来判定直线在平面内。

公理 2 是确定两个平面交线位置的根据。如果两个平面有已知两个公共点，依据公理 1 和公理 2，这两个平面的交线就是过这两个公共点的一条直线。

公理 3 及其三个推论是确定一个平面的 4 条依据。确定平面是建立空间图形的基础。确定平面的条件为解题时引入辅助平面及以后作出几何体的截面起着重要作用。

三、重点和难点

本单元的重点是平面的概念及三个公理、三个推论。

难点是对平面的“无限延展”特征的理解。对于平面概念，虽然生活中已经有很多平面的形象，但抽象为平面概念，它具有无限延展的特征。学生对此不易理解，经常误认为平面是平行四边形。这里应着重培养学生的抽象思维能力和空间想象能力。

三个公理及三个推论是进一步学习立体几何的基础，要求能熟练掌握。

【教材提示】

一、关于平面概念的教学

1. 用类比法讲清平面概念的两个特征

平面概念的两个特征是“平”、“平面可以无限延展”。

“平”是一种形象，生活中有很多平的形象，学生较为容易理解。在讲解三个公理及推论时，应联系平面的“平”的形象，使学生加深对平面概念的理解。公理及推论都具体反映了“平”的特征。平面可以无限延展这一概念，学生不容易理解。由于生活中思维定势的消极影响，暂时理解了，但到具体解题时又忘记了“可以无限延展”这一特征，故解题时找不到思路和条件。这要在后续的教学经常不断地说明。另外，在开始教学时，可以类比直线的概念和性质来进行研究。

比如，直线上任意两点间的部分是线段，可以量出线段的长度，但整条直线则无法量长度；平面上任何一个封闭图形可以度量面积，但整个平面则无法度量面积。

又如，过任意两点可以确定一条直线的位置。但直线是可以向两方无限延伸的，所以画不出一条完整的直线。在空间根据一定的条件可以确定平面的位置，并可以依据一定的画法把平面表示出来，但因为平面是无限延展的，则不可能画出一个完整的平面。

对平面的无限延展性还可以举出如下情况加深理解。

一条直线可以把一个平面分成两部分，且从平面的一部分到另一部分必须越过这条直线，但不可能绕过这条直线。

同样，一个平面把空间分成两部分，且从空间的一部分到另一部分必须穿过平面，不穿过平面则不可能从一部分到

达另一部分，因为平面是无限延展着的。

同时要注意，直线是有方向的。它只能向两方延伸着，而平面是在向任何方向延展着。象直线没有粗细一样，平面没有厚薄。

2. 举反例加深对平面概念的理解

为了加深学生对平面概念的理解，在教学中可以举反例加以说明。

比如：问学生“一个平面长5米、宽4米”的说法对吗？为什么？“一条直线的一部分在一个平面内，另一部分在平面外”，这种说法对吗？为什么？

又如：图1-1，直线 AB 中的一部分在平面 α 内，另一部分不在平面 α 内的说法对吗？为什么？

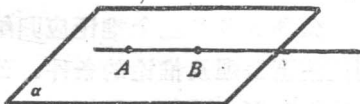


图1-1

通过以上教学能使学生对平面概念的两个特征。特别是加深对平面的无限延展性这一特征的认识，为今后学好立体几何打下良好的基础。

二、关于平面基本性质的教学

平面基本性质的教学，要尽量采用直观教具，通过直观形象，可加深对平面性质的认识。

公理1的教学，要着重用直线可以向两方无限延伸及平面的无限延展性来理解。反过来，公理1又可以加深对平面延展性的认识。

公理2的教学，首先要引导学生从生活中所接触到的平面的交线去认识。如教室的地面、墙面、天花板平面，它们

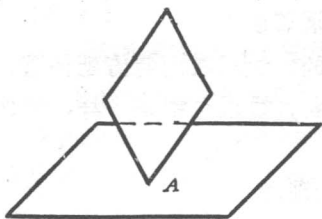


图 1-2

之间的交线都是直线的形象。再进一步引导学生思考：两个平面有没有可能只有一个公共点。教师可拿两个矩形平面板摆成如图 1-2 的位置。由学生得出不可能的结论。理由是平面可以无限延展，图中的矩形只是平面的一部分。

通过公理 1、2 的教学，使学生不仅掌握公理的内容、同时应加深对平面概念的认识。它们是平面两个重要特征的具体反映。

公理 3 及其三个推论应归纳为确定平面的四个条件。特别应注意公理及推论的条件。公理 3 的条件是“不在同一条直线上的三点。”要强调这里三个点的位置是不在同一条直线上，而不是“任意三个点”。推论 1 的条件是“一条直线和这条直线外的一点”，而不是“任何一点和一条直线”。这就是说，“在同一条直线上的三个点”或“一条直线和这条直线上的一点”都不能确定平面。另外，在公理和推论中的“有且只有一个”的含义，要加以解释，“有”是存在的意思，“只有一个”是唯一的意思。因此“有且只有一个”的含义是“存在且唯一”，在这里就是“确定”的意思。

三、要重视直观图的画法

立体图形画在平面纸上还要直观地反映出立体形象。这对初学者是比较困难的，但它是学习立体几何的基本功，是建立空间概念、培养空间想象能力的重要基础。在教学中应给以足够的重视，要从画三角形、平行四边形的水平放置的平面图形开始，然后再画比较复杂的图形。如正五边形、正

六边形的水平放置的平面图形. 要边画边讲, 使学生在画的过程中掌握作图步骤. 课本中所采用的“斜二则画法”中, 坐标系的选择是比较重要的. 坐标系位置选取的好, 可以使作图简化. 因此, 对于没有指定坐标系位置的图形, 应引导学生总结出选取坐标轴位置的一般方法. 如:

有中心的图形, 坐标原点一般选在中心; 轴对称图形则以对称轴为一条坐标轴; 一般几何图形最好使坐标轴在其中一边所在的直线上, 顶点在坐标原点.

【知识反馈】

训练题应抓住对平面概念的理解, 公理的应用, 确定平面的条件的应用.

一、口答题

1. 经过一点可以作多少个平面? 经过两点可以作多少个平面?
2. 经过三点可以作多少个平面?
3. 经过一条直线可以作多少个平面?
4. 经过一点和一条直线可以作多少个平面?
5. 经过一条直线和直线外一点可以确定多少个平面?
6. 经过一条直线和直线外两点可以确定多少个平面?
7. 有三个公共点的两个平面一定重合吗?
8. 三角形、平行四边形、梯形都是平面图形吗? 为什么?
9. 在空间四边相等的四边形一定是菱形吗? 为什么?
10. 如果线段 AB 在平面 α 内, 那么线段 AB 所在的直线是否一定在平面 α 内?

二、判断下列命题的正误

1. 有三个公共点的两个平面必重合；
2. 一条直线和一个点确定一个平面；
3. 任何三个点都不在同一条直线上的四个点必不在同一平面内；
4. 经过一点的两条直线确定一个平面；
5. 三点 A 、 B 、 C 都在平面 α 内，点 D 不在平面 α 内，则 A 、 B 、 C 、 D 四点必不在同一平面内。

以上口答题和判断正误题均可在课堂上用提问方式口答，这样可以加深学生对公理及其推论的理解，同时也可以培养学生全面分析问题的能力。解答问题时必须认真考虑点、直线在空间所有可能的位置关系，才能得出正确答案，以培养学生的空间想象能力。

三、选择题（题中有且只有一个正确答案）

1. 空间不共线的四点可以确定平面的个数是（ ）

(A) 1个或3个； (B) 3个或4个；
(C) 1个、3个或4个； (D) 1个或4个。

2. 在空间，可以确定平面的条件是（ ）

(A) 两条直线；
(B) 两两相交的三条直线；
(C) 三个点；
(D) 经过同一点且与另一条直线都相交的三条直线。

3. 三条直线两两平行，则它们可以确定平面的个数是（ ）

(A) 1个； (B) 3个；
(C) 1个或3个？ (D) 不能确定一个平面。

4. 空间四点，如果其中任意三点都不共线，那么经过其

中三个点的平面的个数是 ()

- (A) 4 个或 1 个; (B) 3 个;
(C) 只能是 4 个; (D) 只能是 1 个.

5. 经过一点的三条直线可以确定平面的个数是 ()

- (A) 3 个; (B) 1 个或 3 个;
(C) 只能是 1 个; (D) 2 个或 3 个.

6. 点 A 在直线 l 上, 直线 l 又在平面 α 内, 则 A 、 l 、 α 的关系可用符号记作 ()

- (A) $A \subset l \subset \alpha$; (B) $A \in l \subset \alpha$;
(C) $A \in l \in \alpha$; (D) $A \subset l \in \alpha$.

四、简答题

1. 过平面外的一点和平面内的一点引一条直线, 这条直线和这个平面为什么只有一个公共点?

2. 画出经过正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的三个顶点 A 、

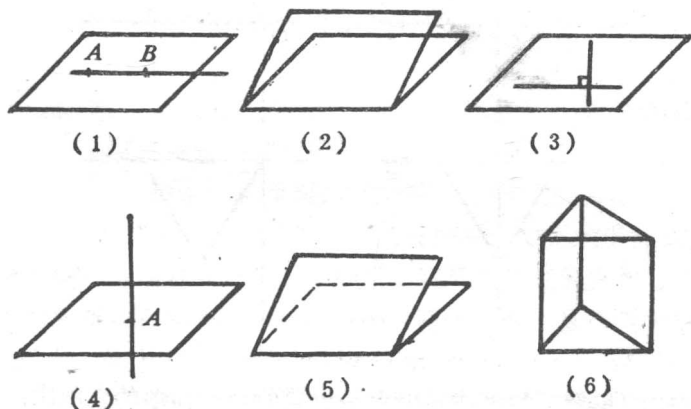


图 1-3