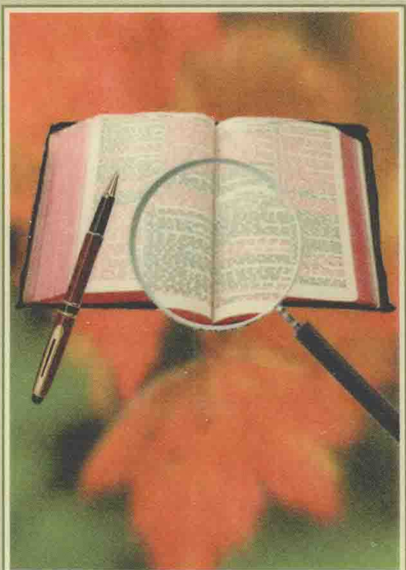
SHUXUE

高等教育学历文凭考试全国统考课程

同步辅导/同步训练



高等数学

附：五套命题预测试卷

司马洪 主编

全国高等教育学历文凭考试命题研究组 审定

北京广播学院出版社

高等教育学历文凭考试全国统考课程

同步辅导/同步训练

高等数学

司马洪　主编

全国高等教育学历文凭考试命题研究组　编审

北京广播学院出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/司马洪主编 .—北京:北京广播学院出版社,2002.9
(最新高等教育学历文凭考试全国统考同步辅导·同步训练/张伟主编)
ISBN 7-81085-057-1/N.24

Ⅰ.高 ... Ⅱ.司 ... Ⅲ.高等数学—高等教育—自学考试—自学参考资料
Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 066525 号

前　言

高等教育学历文凭考试是国家教育部高教司上个世纪九十年代中期开办的又一种高等教育形式，是国家组织的学历认定考试。应试对象是全日制民办高等学校的学生。

教育部先后制定和颁布了《高等教育学历文凭考试全国统考课程教学大纲（试行）》及《高等教育学历文凭考试全国统考课程考试大纲（试行）》，并依据上述两个大纲，组织编写了全国统考课程指定教材，作为全国各地参加学历文凭考试的全日制民办高等学校教学和考试指定用书。

大量成功的事实说明，在实际应试备考复习的过程中，为了应试成功，顺利通过考试，对一名考生而言，仅仅研读指定教材是远远不够的，必须阅读适量的与指定教材配套的高质量的辅导书目，才能胸有成竹，信心百倍迎接考试并取得成功。

我社发行的这套《最新高等教育学历文凭考试全国统考课程教材同步辅导/同步训练》系列丛书，正是适应考生这一实际需要，策划编辑而成。

为了保证这套丛书的质量，我们特别邀请、组织北京、西安、郑州、上海、广州、哈尔滨、济南等地经国家批准开设学历文凭考试的重点民办高等学校担任学历文凭考试教学任务的主讲教师，依据教育部最新教学大纲和考试大纲，悉心筹划、精心编写而成，从而保证了丛书的高水平、高质量、高命中率的特色，是参加学历文凭考试的广大考生完全可以信赖的优秀辅导丛书。

同步辅导/同步训练丛书，在编写体例、篇目结构上，创意新颖、科学合理、涵盖密度大；在内容选择上，既包含了教学考试大纲所有考核知识点的内容，又突出对重点难点内容的精讲，点面结合，相得益彰。特别是每种书都有高质量的五套命题预测试卷，这些试卷的题型、题量和难易程度与国家正式考试基本一致，是考生模拟实考演练不可多得的试卷，通过演练，定会大大提高考生的应考能力。

本套学历文凭考试同步辅导/同步训练丛书，共 10 册，包括：《邓小平理论概论》、《马克思主义哲学原理》、《马克思主义政治经济学原理》、《大学基础英语（第一册）》、《大学基础英语（第二册）》、《大学基础英语（第三册）》、《大学语文》、《高等数学》、《会计学基础》、《计算机基础》。

本套丛书适宜于参加全国学历文凭考试的全日制民办高等学校的教学及考生自学使用。

由于编写时间仓促，难免有疏漏或不当之处，敬请广大考生和读者批评指正。

全国高等教育学历文凭考试命题研究组

2002 年 9 月

为什么"阳春光华"系列丛书会如此畅销？

1. **成以桢**（男，湖北省武汉人，身份证号码420302810608093）：我是"阳春光华"系列丛书的忠实拥护者和受益者。去年我在一所全日制民办高等学校参加学历文凭考试正为自己的成绩深感忧虑，同学建议我买"阳春光华"系列丛书试试，比较之下，其质量之高令我大为惊讶，学历文凭考试用书浩如烟海，但"阳春光华"系列丛书出类拔萃、卓尔不群，它使我的成绩稳步提高，面对学历文凭考试从容而镇定，帮我顺利通过了考试！

2. **金静凡**（女，河南省濮阳市人，身份证号码410901810410272）：去年，我终于走出了铺天盖地的书山题海，顺利通过了学历文凭考试！而这一切都是我选择"阳春光华"系列丛书的结果！它不仅拥有新题目、新题型，更为我带来了解题的新思路、新方法，书中题目内容丰富而充实，重点提示、要点精析使我对学习内容一目了然，过目而不忘，它是成人学生进行复习用书的最好选择。

3. **陈子珩**（男，北京市海淀区人，身份证号码110108800715041）：去年，我幸运地通过了学历文凭考试。今天，终于有此机会让我向"阳春光华"系列丛书表达我诚挚的谢意！其实，是一个很偶然的机会使我看到了一些同学写给"阳春光华"的感谢信，我怀着质疑的心情买了一套丛书，用了之后才知道它难度适中，以及新颖、典型、全面而权威是别的资料无法比拟的，在它的帮助下，使我本来就优异的成绩有了更进一步的提高，这是多么不容易啊！尤其是公共政治课，居然有几道题跟真题非常相似。我由衷地感谢——"阳春光华"，愿更多的同学信赖它。

4. **何天娇**（女，贵州省贵阳市人，身份证号码521074821105046，现在北京某文化单位工作）：如果你是一名参加学历文凭考试的学生，如果您想在题海中轻松驾驭，如果你有一双慧眼，请选择"阳春光华"丛书吧！我打心底里向您推荐，因为我曾是它万千个受益中的一人。曾几何时，北京在我心中还是一个遥远的希望，一个舒展不开的梦，而正是"阳春光华"系列丛书，它字里行间的谆谆教诲以翔实而典型的内容，精辟而新颖的题型，极大地充实了我的头脑，在漆黑的海上为我点亮并挂起了一盏明灯，让我的脚步朝着正方向前进！

5. **朱星月**（女，内蒙古包头市人，身份证号码150165811212092）：记得那年参加学历文凭考试，我曾为苦于找不到好的复习资料而苦恼，后来费了好多周折才从重点班同学那儿打探到消息，他们用的是老师为他们推荐的"阳春光华"系列丛书！一下子就为我指明了方向，最初我就莫名奇妙地信赖它，没想到做了几套题后，就更变得爱不释手，我几乎做遍了那年的"阳春光华"系列丛书（学历文凭考试辅导资料）的练习题，果然，不负我望，通过了学历文凭考试。

6. **刘筱倩**（女，黑龙江绥化市人，身份证号码230403800101028）：回首准备学历文凭考试的日子，由心底里充满了甘甜苦乐的藉慰。因为今天能到北京工作，一方面更加肯定了"一份辛勤，一份收获"的哲理，另一方面不能否认父母为提高我的学习成绩为我购买的高质量的复习资料。而"阳春光华"系列丛书是我所有复习资料中最系统、最全面、最有效的丛书，通过这些资料，使我的解题、答题思路自然清晰地形成，题做得不多，方法却已牢牢掌握，效果颇佳！在此，我愿将"阳春光华"系列丛书作为礼物送给每一位圆大学梦的学子，愿你们美梦成真。

（以上来信只是众多读者来信中的筛选，均系原文摘录，它代表了学子们由衷地感谢并给予"阳春光华"系列丛书以高度的评价，仅供读者参考。编者）

目 录

附录三：

第一部分　精讲精练

第一章　函　数

第一节　实　数

一、集合

1. 集合与元素

集合：把一些确定的对象看成一个整体就形成了一个集合. 一般用大写拉丁字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合.

元素：集合里的每个对象叫做集合的元素. 一般用小写拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素.

$a \in S$：表示 a 是集合 S 的元素，读作"a 属于 S".

$a \notin S$：表示 a 不是集合 S 的元素，读作"a 不属于 S".

2. 集合的表示法

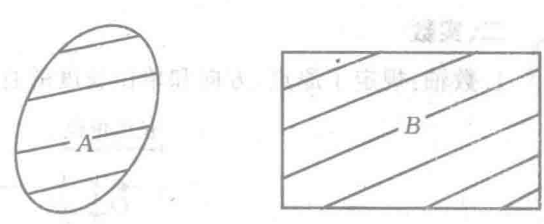
列举法：是指按任意顺序列出集合中所有的元素，并用花括号{} 括起来，如

由 1,3,5,7 组成的集合，可表示为 $A = \{1,3,5,7\}$ 或 $A = \{3,1,5,7\}$ 等. 用列举法表示集合时，必须列出集合中的所有元素，不能遗漏和重复.

描述法：是指把集合中元素所具有的某个共同属性描述出来，用$A = \{x \mid x$具有的共同属性$\}$ 表示. 如

$S = \{x \mid x > 0\}$，它表示由正数全体组成的集合，其元素为大于零的解，这里的属性即为 $x > 0$. 习惯上将正数全体构成的集合记为 $\mathbf{R}^+$，而将负数全体记为 $\mathbf{R}^-$.

图示法：(如图 1－1) 表示集合 A.



集合 A　　　　集合 B

图 1－1

3. 集合的分类(按元素的个体划分)

有限集：含有有限个元素的集合叫有限集.

无限集：含有无限个元素的集合叫无限集.

单元素集：只含有一个元素的集合叫做单元素集.

空集：不含有任何元素的集合叫做空集. 记作 $\varnothing$.

4.集合与集合的关系

(1) 子集

设有两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，那么集合 A 叫做 B 的子集，记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$，读作“A 包含于 B”或“B 包含 A”.

对于任一集合 A，规定 $\varnothing \subseteq A$.

由子集的定义可知：如果 $A \supseteq B, B \supseteq C$，那么 $A \supseteq C$.

真子集：如果集合 B 是集合 A 的子集，并且 A 中至少有一个元素不属于 B，那么集合 B 叫集合 A 的真子集，记作 $B \subsetneqq A$ 或 $A \supsetneqq B$(图 1－2)

集合相等：对于两个集合 A 与 B，如果 $A \subseteq B$，同时 $B \subseteq A$，那么就说集合 A 与集合 B 相等，记作 $A = B$.

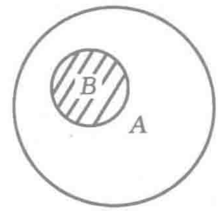


图 1－2

(2) 交集

由既属于集合 A 又属于集合 B 的公共元素汇总构成的集合，称为集合 A 与 B 的交集. 记为 $A \cap B$(读作 A 与 B 之交)，即 $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$，交可用(图 1－3) 中的阴影部分表示.

由交集的定义可知：$A \cap A = A, A \cap \varnothing = \varnothing$.

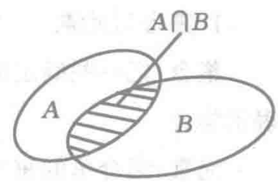


图 1－3

(3) 并集

由集合 A 与集合 B 中所有元素汇总构成的集合称为集合 A 与 B 的并集. 记为 $A \cup B$(读作 A 与 B 之并). A 与 B 的并可用(如图 1－4) 中阴影部分表示.

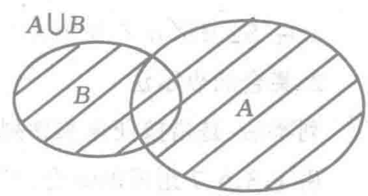


图 1－4

两个集合的并也可表示为

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$.

由并集定义可知：$A \cup A = A, A \cup \varnothing = A$.

二、实数

1.数轴：规定了原点、方向和单位长度的直线叫做数轴(如图 1－5)

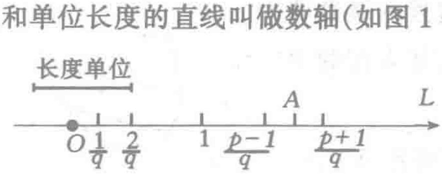


图 1－5

2.有理数：整数和分数的总称，任何有理数都可以表示为 $\frac{p}{q}$(p、q 为互质的整数，且 $q \neq 0$) 的形式.

有理数有两个重要性质：一个是有序性，即有理数集是一个有序集，在数轴上，所有的有理点是按照从小到大的顺序自左至右排列的. 有理数的另一个重要性质是它的稠密性，即任意两个有理数之间有无穷多个有理数，有理点在数轴上处处稠密的，即任意一个非空间的开区间内都有无穷多个

有理点.

3.无理数:无限而不循环的小数的总称.

4.实数:有理数和无理数总称为实数.

实数集合和数轴上点的集合是一一对应的,数轴上任一点对应的数总大于该点左边任一点所对应的数.

实数集同样具备有序性和稠密性.此外,还有另外一个重要性质,即实数集的连续性.

5.几种数集

自然数集:全体自然数的集合叫做自然数集,记作 **N**.

整数集:全体整数的集合叫做整数集,记作 **Z**.

有理数集:全体有理数的集合叫有理数集.记作 **Q**($\mathbf{Q}^+$ 表示有理数集,$\mathbf{Q}^-$ 表示负有理数集).

实数集:全体实数的集合叫做实数集,记作 **R**($\mathbf{R}^+$ 表示正实数集,$\mathbf{R}^-$ 表地负实数集).

三、实数的绝对值

1.绝对值的概念

对于任意一个实数 x,它的绝对值为 $|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

绝对值 $|x|$ 的几何意义:实数 x 的绝对值 $|x|$ 等于数轴上的点 x 到原点的距离.

2.绝对值的性质

(1) $|x| = \sqrt{x^2}$;

(2) $|x| \geqslant 0$;仅当 $x = 0$ 时,$|x| = 0$;

(3) $|-x| = |x|$;

(4) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$;

(5) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$;

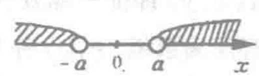
(6) $||x| - |y|| \leqslant |x-y|$;

(7) $|xy| = |x| \cdot |y|$;

(8) $\left|\dfrac{y}{x}\right| = \dfrac{|y|}{|x|} (x \neq 0)$.

3.绝对值不等式的解法

绝对值不等式的解一般可归纳为下面两种基本类型的解集,列表如下:

不等式	解集	数轴表示
$\lvert x\rvert > a(a>0)$	$\{x \mid x > a$ 或 $x < -a\}$	
$\lvert x\rvert < a(a>0)$	$\{x \mid -a < x < a\}$	

$|ax+b| \geqslant c$ 或 $|ax+b| \leqslant c$ 的解法都可归纳为以上两种形式解之.

四、若干常见的实数集

1.开区间:满足不等式 $a < x < b$ 的所有实数 x 的集合 $\{x \mid a < x < b\}$,记作 (a,b).

2. 闭区间：满足不等式 $a \leqslant x \leqslant b$ 的所有实数 x 的集合 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$，记作 $[a,b]$.

3. 半开半闭区间：满足不等式 $a \leqslant x < b$(或 $a < x \leqslant b$) 的所有实数 x 的集合 $\{x \mid a \leqslant x < b\}$(或 $\{x \mid a < x \leqslant b\}$)，记作 $[a,b)$(或 $(a,b]$).

4. 无穷区间：全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 记为 $(-\infty,+\infty)$.

相应地，用不等式 $x \geqslant a, x > a, x \leqslant b, x < b$ 表示的所有实数 x 的集合 $\{x \mid x \geqslant a\}$，$\{x \mid x > a\}$，$\{x \mid x \leqslant b\}$，$\{x \mid x < b\}$，分别记作 $[a,+\infty)$，$(a,+\infty)$，$(-\infty,b]$，$(-\infty,b)$.

不等式的解集、函数的定义域和值域，可以用区间表示.

五、平面上的点

1. 平面直角坐标系 xOy

在平面上作两条互相垂直的直线 Ox 和 Oy 交于点 O，每条直线当作一条实轴，原点都在点 O 处，并且两条实轴的单位长度相等. 这样就构成平面上的一个直角坐标系 xOy. 其中水平轴称为 x 轴或者横轴，坚直轴称为 y 轴或者纵轴(如图 1－6).

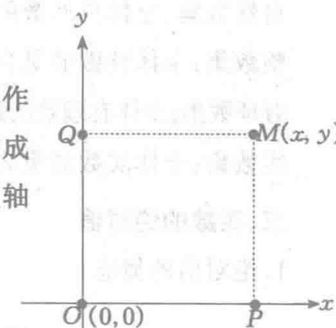


图 1－6

2. 点的坐标

设 M 是平面上任意一点，自点 M 分别向 x 轴和 y 轴引垂线，得到两个垂足 P 和 Q. 由于 P 和 Q 都是实轴上的点，它们分别惟一地对应实数 x 和 y. 这就是说，平面上每一点 M 都惟一地对应一个有序实数组 (x,y). 其中实数 x 称为点 M 的横坐标，实数 y 称为点 M 的纵坐标. 反之，任意给定一个有序实数组 (x,y)，可以在平面上找到一个点 M，使得点 M 的横坐标和纵坐标分别为 x 和 y.

点 M 可以这样求出，过点 P 和 Q 分别作横轴和纵轴的垂直线，两条垂直线相交于点 M，则 M 就是以 x 和 y 为横坐标与纵坐标的点. 这样的点 M 是惟一的. 因此，在建立了直角坐标系之后，平面上的点 M 与有序实数组 (x,y) 之间建立了一一对应的关系. 平面上的任何一个点 M 都可以惟一地用一个有序实数组 (x,y) 来表示；反之，任何一个有序实数组 (x,y) 都惟一地表示平面上的一个点 M. 与点 M 对应的有序实数组 (x,y) 称为点 M 的坐标.

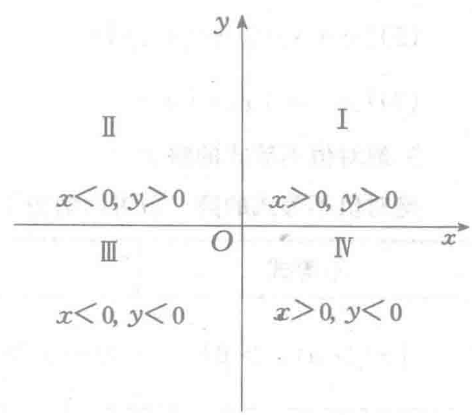


图 1－7

3. 象限

x 轴将平面分成上下两半，x 轴以上的部分称为上半平面，x 轴以下的部分称为下半平面. 同样，y 轴将平面分成左右两半，y 轴以左的部分称为左半平面，y 轴以右的部分称为右半平面. 两个坐标轴又将平面分成四个象限. 由右上角按逆时针方向旋转，分别称为第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ 象限(如图1－7).

4. 平面上两点间的距离

设 P 和 Q 是平面上两点，称连接两点的线段 PQ 的长度为两点之间的距离．用 $d(P,Q)$ 表示 P 和 Q 之间的距离．如果点 P 和 Q 的坐标分别为 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2)，则有

$$d(P,Q)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

六、平面上的直线

1．直线的斜率

直线的斜率等于该直线上方向与 x 轴正向夹角 α 的正切($0°\leqslant\alpha<180°$)，斜率用 k 表示，即 $k=\tan\alpha$(如图 1－8)．

(1) 当 $0°<\alpha<90°$ 时，$k>0$；

(2) 当 $90°<\alpha<180°$ 时，$k<0$；

(3) 当 $\alpha=0°$ 时，$k=0$；

(4) 当 $\alpha=90°$ 时，k 不存在．

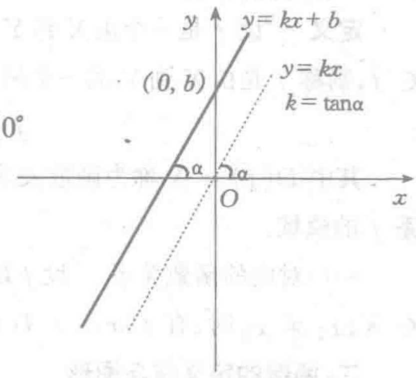


图 1－8

2．过两点直线的斜率公式

过两点 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$ 的直线的斜率公式为

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_2\neq x_1)$$

当 $x_1=x_2$ 时，直线 P_1P_2 平行于 y 轴或与 y 轴重合，倾斜角为 $\alpha=90°$，斜率不存在．

当 $y_1=y_2$ 时，直线 P_1P_2 平行于 x 轴或与 x 轴重合，倾斜角为 $\alpha=0°$，斜率 $k=0$．

3．几种直线方程：

(1) 平行于 x 轴的直线为 $y=b(b\neq0)$；

(2) x 轴所在直线为 $y=0$；

(3) 平行于 y 轴的直线为 $x=a(a\neq0)$；

(4) y 轴所在直线为 $x=0$；

(5) Ⅰ、Ⅲ 象限角的平分线方程为 $y=x$；Ⅱ、Ⅳ 象限角的平分线方程为 $y=-x$．

七、邻域

所谓点 x_0 的 δ 邻域，是指以 x_0 为中心的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$，亦即设 x_0 和 δ 为两个实数，$\delta>0$，则满足不等式 $|x-x_0|<\delta$ 的全体实数就称为点 x_0 的 δ 邻域，点 x_0 为该邻域的中心，δ 为该邻域的半径，在数轴上的表示(如图 1－9)．

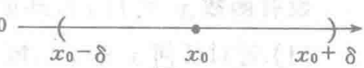


图 1－9

如果在邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 中除去点 x_0，则得到集合 $\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta\}$，称这个集合为 x_0 的一个空心邻域．它是两个开区间的并集：$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$．

今后如果说到点 x_0 的一个邻域，就是指某个开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$；如果说到点 x_0 的一个空心邻域，就是指 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$．其中 δ 是某个确定的正数，但有时没有必要指出这个正数 δ 的具体数值．

第二节　函数的定义与性质

一、函数的概念

定义　设 f 是一个由 X 到 Y 的关系，如果对每一个 $x \in X$，总有惟一的 $y \in Y$，使得 $(x,y) \in f$，则称 f 是由 X 到 Y 的一个函数关系，简称为函数，并称 x 为自变量，y 为因变量. 记作

$$f: X \to Y \text{ 或 } y = f(x), x \in X$$

其中 $D(f) = X$ 称为函数关系 f 的定义域；$Z(f) = \{y \mid y = f(x), x \in X\} \subset Y$ 称为函数关系 f 的值域.

一一对应的函数关系　设 f 是一个由 X 到 Y 的函数关系，如果 $Z(f) = Y$，且对任意的 x_1、$x_2 \in X$，$x_1 \neq x_2$ 时，有 $f(x_1) \neq f(x_2)$，称 f 是一一对应的函数.

二、函数的定义域与图形

函数的定义域是那些能使有关的运算得到成立的实数构成的集合。由实际问题得到的函数，其定义域需由问题本身的意义来确定.

函数的图形是平面上所有以 x 为横坐标，以 $y = f(x)$ 为纵坐标的点构成的点集，也就是平面上所有满足方程 $y = f(x)$ 的点构成的点集(如图 1 - 10).

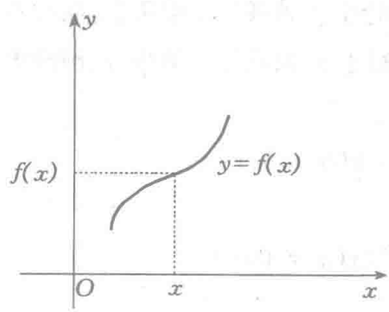


图 1 - 10

三、函数的一些重要属性

1. 奇偶性

设有函数 $y = f(x)$，其定义域 D_f 关于原点 O 对称，那么

(1) 若对任何 $x \in D_f$，恒有 $f(-x) = f(x)$，则称函数为偶函数.

(2) 若对任何 $x \in D_f$，恒有 $f(-x) = -f(x)$，则称函数为奇函数.

对于偶函数，由于在 x 和 $-x$ 处函数值相等，故其图形关于 y 轴对称(如图 1 - 11). 对于奇函数，由于 x 和 $-x$ 处的函数值仅差一个符号，其图形关于原点中心对称，即当把右半平面的图形绕原点旋转 180° 后恰与左半平面的图形重合(如图 1 - 12).

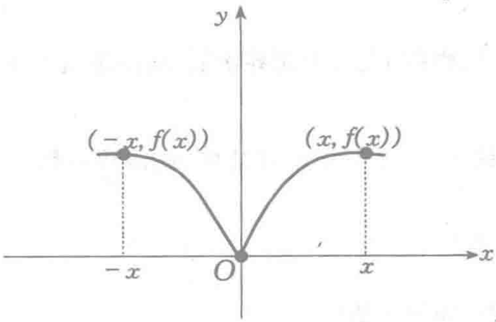


图 1－11

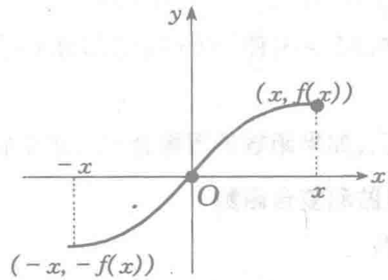


图 1－12

2. 单调性

假定 $f(x)$ 是定义在集合 D 上的函数.

单增函数:如果对于任意的 x_1、$x_2 \in D$,当 $x_1 < x_2$ 时恒有 $f(x_1) < f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 D 上为单调增加函数.

单减函数:如果对于任意的 x_1、$x_2 \in D$,当 $x_1 < x_2$ 时恒有 $f(x_1) < f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 D 上为单调减少函数.

单调非减函数:如果对于任意的 x_1、$x_2 \in D$,当 $x_1 < x_2$ 时恒有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 D 上为单调非减函数.

单调非增函数:如果对于任意的 x_1、$x_2 \in D$,当 $x_1 < x_2$ 时恒有 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 D 上为单调非增函数.

3. 周期性

设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的函数,如果存在正数 T,使得任意 $x \in (-\infty, +\infty)$,都有 $f(x+T) = f(x)$,则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数. 当 $f(x)$ 以 T 为周期时,那么对于任意的自然数 n,nT 也是 $f(x)$ 的周期. 一般的周期 T 是指 $f(x)$ 的最小正周期.

周期函数图形的特点是自变量每增加或减少一个周期后,图形重复出现(如图 1－13)

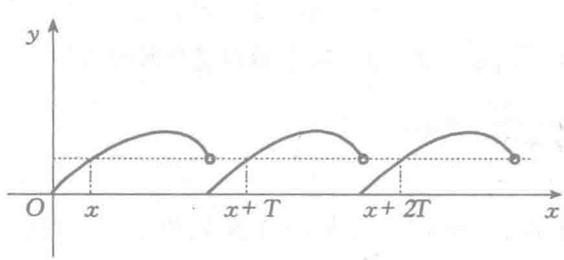


图 1－13

4. 有界性

对任意的 $x \in (a, b)$,若存在 $M > 0$,有 $|f(x)| \leqslant M$,则称 $f(x)$ 在 (a, b) 内是有界的. 其图

形介于直线 $y = M$ 与 $y = -M$ 之间.

若不存在 $M > 0$,使 $|f(x)| \leqslant M$ 永远成立,则称 $f(x)$ 为无界函数,其图像向上或向下无限伸展.

在几何上,如果函数的图像介于二水平直线 $y = A$ 与 $y = B$ 之间,则函数就是有界的.

四、反函数和复合函数

1.反函数

设 $y = f(x)$ 是一个由 X 到 Y 的函数关系,如果 f 的反关系也是一个函数关系,则称它为 $y = f(x)$ 的反函数.记作 $f^{-1}: Y \to X$ 或 $x = f^{-1}(y), y \in Y$.

通常把 $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 记作 $y = f^{-1}(x)$.

$y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 在平面直角坐标系中的图像关于直线 $y = x$ 对称;$y = f(x)$ 与 $x = f^{-1}(y)$ 的图形重合(如图 1 - 14)

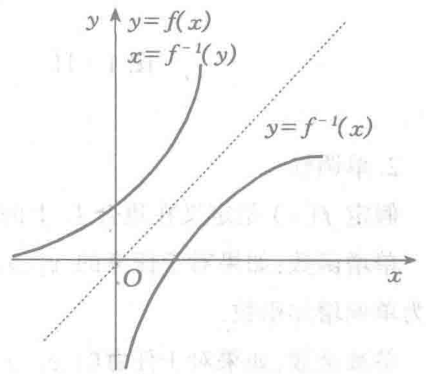


图 1 - 14

2.复合函数

设 y 是 u 的函数 $y = f(u)$,而 u 又是 x 的函数 $u = g(x)$,如果 x 在 $g(x)$ 的定义域或其一部分上取值时,对应的 u 值使 $y = f(u)$ 有定义,则 y 通过 u 和 x 建立的函数关系

$$y = f(u) = f[g(x)]$$

称为由函数 $y = f(u)$ 与 $u = g(x)$ 的复合而成的复合函数,并把 u 叫做中间变量.

复合函数的概念并不难,通俗地说是函数套函数.有的书把 $g(x)$ 叫做内函数,把 $f(u)$ 叫做外函数.由复合函数的定义可知,函数 f 和 g 能否构成复合函数的关键是第二个函数的值域是否包含在第一个函数的定义域中,亦即内函数的值域一定要落在外函数的定义域中,故为了使复合有意义,有时复合函数的定义域要缩小一些.

复合函数也可以由两个以上的函数复合而成.例如:

$$y = \ln\sqrt{2 + x^2},$$

就是由 $y = \ln u, u = \sqrt{v}, v = 2 + x^2$,三个函数复合而成的.

例 1 若 $f(x) = \dfrac{|x - 2|}{x + 1}$,试求

$f(0), f(a), f(a + b)$

解 $f(x_0)$ 就是函数 $f(x)$ 当 $x = x_0$ 时的函数值,将 $x = x_0$ 代入 $f(x)$ 关系式中的 x 即得 $f(x_0)$.

$$f(0) = \frac{|0 - 2|}{0 + 1} = \frac{2}{1} = 2$$

$f(a) = \frac{|a-2|}{a+1}$

$f(a+b) = \frac{|a+b-2|}{a+b+1}$

例 2　若 $g(x) = \begin{cases} 2^x, & -1 < x < 0 \\ 2, & 0 \leqslant x < 1 \\ x-1, & 1 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$

求 g(3),g(2),g(0),g(0.5),g(−0.5).

解　分段函数按段求函数值.

$g(3) = 3 - 1 = 2$

$g(2) = 2 - 1 = 1$

$g(0) = 2$

$g(0.5) = 2$

$g(-0.5) = 2^{-0.5} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

例 3　求函数 $y = 1 + \lg(x+2)$ 的反函数

解　由 $y = 1 + \lg(x+2)$

$y - 1 = \lg(x+2)$

$x + 2 = 10^{y-1}$

$x = 10^{y-1} - 2$

交换字母得反函数为 $y = 10^{x-1} - 2$

例 4　设 $y = \sqrt{1-x^2}, x \in [-1,0]$.

(1) 求反函数及其定义域;

(2) 作出已知函数及反函数的图形.

解

(1) 已知 $x \in [-1,0]$ 时函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ 的值域是[0,1].

由 $y = \sqrt{1-x^2}$ 得 $y^2 = 1 - x^2$,

即 $x^2 = 1 - y^2$.

两端同时开方,因为 $x \in [-1,0]$,所以等式右端根号前取"−"号得其反函数为

$$x = -\sqrt{1-y^2}, y \in [0,1].$$

交换字母得 $y = -\sqrt{1-x^2}, x \in [0,1]$.

(2) 作图:在同一个坐标下,$y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 的图形(如图 1−15)关于直线 $y = x$ 对称.