普通高等教育“十二五”规划教材

线性代数及其应用

主编 王艳

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材

线性代数及其应用

主　编　王　艳
副主编　程　茜
参　编　李维佳　杨　卫

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

线性代数及其应用：含习题集/王艳主编．—北京：北京理工大学出版社，2015.6

ISBN 978-7-5682-0705-8

Ⅰ.①线… Ⅱ.①王… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 123892 号

出版发行 /北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 /北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 /100081
电　　话 /（010）68914775（总编室）
　　　　　82562903（教材售后服务热线）
　　　　　68948351（其他图书服务热线）
网　　址 /http://www.bitpress.com.cn
经　　销 /全国各地新华书店
印　　刷 /三河市天利华印刷装订有限公司
开　　本 /787 毫米×1092 毫米 1/16
印　　张 /10.5
字　　数 /238 千字
版　　次 /2015 年 6 月第 1 版 2015 年 6 月第 1 次印刷
总 定 价 /26.00 元

责任编辑 /高 芳
文案编辑 /江 立
责任校对 /周瑞红
责任印制 /马振武

前言 Preface

在科学技术飞速发展、知识更替日新月异的今天，希望、困惑、挑战等无时无刻不出现在我们的生活和学习当中，如何抓住机遇，寻求发展，如何学会迎接挑战，适应变化，最直接的办法就是学习——学会学习，终身学习.

大学生的学习任务相当繁重，加上不断压缩的学时，使许多学生对所学的知识缺乏思考，难以深入理解，整体表现出一种浮躁的状态，如果再加之教材的理论过于深入，语言晦涩难懂，就更给学习者带来消极的影响. 为了使学生真正掌握所学知识的内涵，把握知识点，了解重点、难点和解题思路，达到事半功倍的效果，我们结合在教学过程中的经验和全国乃至国外优秀教材的精华编写了本教材.

线性代数是大学的一门重要基础课，也是培养学生抽象思维和逻辑思维能力及空间想象能力的重要课程. 是否全面系统地理解和掌握它的基本内容将直接影响到后续课程的学习.

线性代数的特点是高度抽象并且概括性强，具有严密的逻辑性和独特的公式语言的特点. 为了帮助学生更好地学习线性代数，本书虽然围绕着线性代数教学大纲的基本要求展开，但在内容安排、形式体例、行文风格等方面都做了调整，注意表述的清晰与逻辑的严密，同时注重语言的通俗易懂. 每一章用一个实际问题引入并展开知识点的讲解，最后又回到开始的实际问题进行全面的讲解，同时引入了软件求解的内容，让学生在掌握基本求解方法的同时学会在现实生活中利用软件求解实际问题.

本书还配备了练习题，学生可通过知识回顾、课堂练习和课后作业、章节测试对本书设计的知识点进行学习.

本书由王艳主编，并负责编写第一章，程茜负责编写第二章，李维佳负责编写第三章，杨卫负责编写第四章.

由于编者水平有限，在编写的过程中难免有疏漏或是不妥之处，欢迎读者批评指正.

编　者

目录 Contents

第一章 行列式和矩阵

如果一个函数、方程或不等式中出现的数学表达式是关于未知数或变量的一次式，那么这个函数、方程或不等式就相应称为线性函数、线性方程或线性不等式. 如果从一个实际问题归纳出来的数学模型中出现的函数、方程式或不等式都是线性的，我们就称这个数学模型为线性模型. 在经济管理活动中，许多变量之间存在着或近似存在着线性关系，因而对这种关系的研究显得尤为重要. 投入产出线性规划数学模型是最常见的线性模型，在数据计算、信息处理、均衡生产、减少消耗、增加产出等方面有着广泛应用. 在模型的建立中，我们也常将非线性关系近似看作线性关系. 线性代数就是研究线性关系的基本数学工具.

早在 1683 年与 1693 年，日本数学家关孝和与德国数学家莱布尼茨就分别独立地提出了行列式的概念. 之后很长一段时间内，行列式主要应用于对线性方程组的研究. 大约一个半世纪后，行列式逐步发展为线性代数的一个独立分支. 1750 年，瑞士数学家克拉默在他的论文中提出了利用行列式求解线性方程组的著名法则——克拉默法则. 随后，1812 年，法国数学家柯西发现了行列式在解析几何中的应用. 如今，由于计算机的发展，行列式的数值意义已经不大，但行列式的理论依然占据着重要的地位. 特别是在本课程中，行列式是研究后面线性方程组、矩阵的重要工具.

1.1 行列式的概念

引例 1.1

设有二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1}$$

用消元法解方程组(1)，当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组(1)有唯一解，且得

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases}$$

为了便于研究,引入二阶行列式的定义.

引例 1.2

假设甲、乙两个运输公司组成一个运输队,他们分别对外提供服务,在运输期间又商定相互提供服务,已知甲公司每创造单位产值需要乙公司提供 0.1 单位服务;乙公司每创造单位产值需要甲公司提供 0.2 单位服务. 又知道在该时期内,两个公司分别创造的产值为:甲公司 500 万元,乙公司 700 万元. 求每个公司创造的总产值分别为多少.

假设甲公司产值为 x_1,乙公司产值为 x_2,可列方程组如下:

$$\begin{cases} x_1 = 0.1x_2 + 500, \\ x_2 = 0.2x_1 + 700. \end{cases}$$

移项后是一个二元一次方程组

$$\begin{cases} x_1 - 0.1x_2 = 500, \\ -0.2x_1 + x_2 = 700. \end{cases}$$

解得

$$x_1 = 581.6327 \text{ 万元},$$
$$x_2 = 816.3265 \text{ 万元}.$$

1.1.1 行列式的定义

1. 二阶行列式

定义 1 由 2^2 个数组成的符号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,表示代数和 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,称它为**二阶行列式**,常用 D 来表示. 即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

其中 a_{ij} 表示二阶行列式中第 i 行第 j 列的**元素**;横排称为行,竖排称为列. 二阶行列式表示一个数值,它只是一个数的另一种表示方式,代表一种运算. 二阶行列式的计算可以用对角线法则来计算,如下式所示:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

我们将从左上角到右下角的对角线称为行列式的**主对角线**;从右上角到左下角的对角线称为行列式的**副(次)对角线**. 所以 a_{11} 到 a_{22} 的实连线为主对角线,a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为次对角线. 因此,二阶行列式是主对角线

上的元素乘积减去次对角线上的元素乘积.

例 1 计算二阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1\times 5 - 2\times 3 = -1.$$

例 2 计算二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

有了二阶行列式的概念,对于引例 1.1,就可以记 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$,$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$,当 $D\neq 0$ 时,引例 1.1 中方程组(1)的解可表示成 $x_1=\dfrac{D_1}{D}$,$x_2=\dfrac{D_2}{D}$.

例 3 解二元一次线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2=5, \\ 3x_1+4x_2=9. \end{cases}$

解

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 9 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}=\frac{5\times 4-2\times 9}{-2}=-1,$$

$$x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}=\frac{1\times 9-5\times 3}{-2}=3.$$

所以,$x_1=-1$,$x_2=3$.

同样地,对于引例 1.2,也可以采用行列式的方法进行求解. 那么,对于三元一次线性方程组,又该如何求解呢? 为此,我们给出三阶行列式的定义.

2. 三阶行列式

对于三元一次线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases}$ 其系数行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为三阶行列式.

即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

同样，它代表一个数. 三阶行列式由 9 个元素组成，它表示 $3!=6$ 项的代数和，其中正负项各占一半，每一项都是取不同行不同列的 3 个元素的乘积. 类似于二阶行列式，三阶行列式也可以用对角线法则记忆其计算方法，如图 1-1 所示，实连线的三个元素之积带正号，虚连线的三个元素之积带负号.

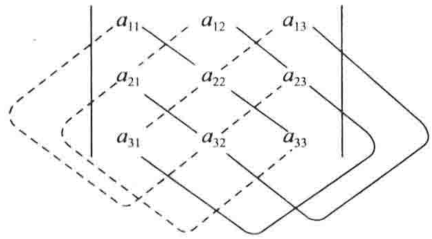

图 1-1

例 4 计算三阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -3 \\ -4 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ 的值.

解 $D=1\times3\times5+(-1)\times(-3)\times(-4)+(-2)\times2\times4-(-2)\times3\times(-4)-(-1)\times2\times5-1\times(-3)\times4$
$=15-12-16-24+10+12=-15.$

例 5 已知三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a & 3 & 4 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix}=0$，求元素 a 的值.

解 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a & 3 & 4 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix}=a^2-4a+3=(a-1)(a-3)$，

已知 $D=0$，所以 $(a-1)(a-3)=0$，得 $a=1$ 或 $a=3$.

对于求解三元一次线性方程组，若令 $D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$，$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$，利用对角线法则计算出 D,D_1,D_2,D_3 的值，当系数行列式 $D\neq0$ 时，$x_1=\dfrac{D_1}{D}$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}$，$x_3=\dfrac{D_3}{D}$.

注：对角线法则只适用于二、三阶行列式.

3. n 阶行列式的定义

定义 2　由 n^2 个数排成 n 行 n 列，$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，称其为 n 阶行列式.

n 阶行列式表示 $n!$ 项的代数和，其中正负项各占一半，每一项都是取不同行不同列的 n 个元素的乘积. $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 所在的对角线称为行列式的主对角线.

1.1.2　特殊的行列式

1. 上三角形行列式

上三角形行列式形式如下：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

特点：主对角线及其上方元素不全为零，其余元素全为零.

2. 下三角形行列式

下三角形行列式形式如下：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

特点：主对角线及其下方元素不全为零，其余元素全为零. 下三角形行列式与上三角形行列式统称为三角形行列式.

3. 主对角线行列式

主对角线行列式的形式如下：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

特点:主对角线元素不全为零,其余元素全为零.

4. 次对角线行列式

次对角线行列式的形式如下:

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

特点:次对角线元素不全为零,其余元素全为零.

1.2 行列式的计算及应用

用行列式的定义计算行列式比较麻烦,下面介绍利用行列式的性质及展开定理计算行列式的方法.

1.2.1 行列式的计算

1. 行列式的性质

定义 1 将行列式 D 的行变成相应的列,得到新的行列式,称它为行列式 D 的转置行列式,记为 D^{T}.

例如, $D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -3 \\ -4 & 4 & 5 \end{vmatrix}$, 那么 D 的转置行列式就是 $D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 5 \end{vmatrix}$.

性质 1 行列式转置后的值不变,即 $D^{\mathrm{T}}=D$.

如 $\quad D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=5,\quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=5.$

注:行列式中的行与列具有同等的地位,行列式的性质凡是对行成立

的，对列也成立.

性质 2　交换行列式的两行(或两列)，行列式变号.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

用 r_i 表示行列式的第 i 行，用 c_i 表示行列式的第 i 列. 交换 i,j 两行，记作 $r_i \longleftrightarrow r_j$. 交换 i,j 两列，记作 $c_i \longleftrightarrow c_j$.

如 $$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 \longleftrightarrow c_2} -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

性质 3　行列式的任一行乘以数 k，等于用数 k 乘以此行列式.

推论　行列式的某一行(列)的公因子可以提到行列式外面.

第 i 行的每一个元素都乘以 k，记作 r_ik. 第 i 列的每一个元素都乘以 k，记作 c_ik.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xlongequal{r_2k} k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

性质 4　行列式的任一行(列)的 k 倍加到另外一行(列)上去，行列式的值不变.

第 i 行的 k 倍加到第 j 行，记作 r_ik+r_j；第 i 列的 k 倍加到第 j 列，记作 c_ik+c_j.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xlongequal{kr_1+r_3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{11} & a_{32}+ka_{12} & a_{33}+ka_{13} \end{vmatrix}.$$

性质 5　若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和，则这个行列式等于两个行列式的和. 这两个行列式除这一行(列)以外，其余行(列)全与原来行列式的对应行(列)一致.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

推论 1　若行列式中有一行(列)的元素全为 0，则行列式的值一定等于 0. 如 $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0$.

推论 2　若行列式中有两行(列)的对应元素相同，则行列式的值一定等于 0. 如 $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=0$.

推论 3 若行列式中有两行(列)的元素对应成比例,则行列式的值一定等于 0. 如$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=0$.

例 1 利用行列式的性质计算 $D=\begin{vmatrix} 3 & 8 & 6 \\ 1 & 5 & -1 \\ 6 & 9 & 21 \end{vmatrix}$.

解

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 8 & 6 \\ 1 & 5 & -1 \\ 6 & 9 & 21 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 8 & 6 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3\times 2 & 3\times 3 & 3\times 7 \end{vmatrix}=3\times\begin{vmatrix} 3 & 8 & 6 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2+r_3}3\times\begin{vmatrix} 3 & 8 & 6 \\ 3 & 8 & 6 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

$$=0.$$

例 2 计算 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

解

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}\xlongequal{c_1\leftrightarrow c_2}-\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4+5r_1]{r_2-r_1}-\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-8r_2]{r_3+4r_2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix}\xlongequal{r_4+\frac{5}{4}r_3}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{vmatrix}$$

$$=40.$$

例 3　计算 $D=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$.

解　$$D=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}\xlongequal{r_1+r_2+r_3+r_4}\begin{vmatrix}6&6&6&6\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1\div 6}6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix}=48.$$

例 4　计算行列式 $D=\begin{vmatrix}a&b&c&d\\a&a+b&a+b+c&a+b+c+d\\a&2a+b&3a+2b+c&4a+3b+2c+d\\a&3a+b&6a+3b+c&10a+6b+3c+d\end{vmatrix}$.

解　从第 4 行开始，每后一行减前一行

$$D=\begin{vmatrix}a&b&c&d\\a&a+b&a+b+c&a+b+c+d\\a&2a+b&3a+2b+c&4a+3b+2c+d\\a&3a+b&6a+3b+c&10a+6b+3c+d\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_2-r_1]{\substack{r_4-r_3\\r_3-r_2}}\begin{vmatrix}a&b&c&d\\0&a&a+b&a+b+c\\0&a&2a+b&3a+2b+c\\0&a&3a+b&6a+3b+c\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_2]{r_4-r_3}\begin{vmatrix}a&b&c&d\\0&a&a+b&a+b+c\\0&0&a&2a+b\\0&0&a&3a+b\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_3}\begin{vmatrix}a&b&c&d\\0&a&a+b&a+b+c\\0&0&a&2a+b\\0&0&0&a\end{vmatrix}=a^4.$$

2. 行列式按行(列)展开

定义 1　在 n 阶行列式 D 中，划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行第 j 列后，剩下的元素构成的 $n-1$ 阶行列式，称其为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}. 并称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式，记作 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

例 5　已知 $D=\begin{vmatrix}7&4&0\\1&5&2\\8&5&0\end{vmatrix}$，求 M_{23}，A_{23}.

解 由定义可知，$M_{23}=\begin{vmatrix}7&4\\8&5\end{vmatrix}$，$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}7&4\\8&5\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}7&4\\8&5\end{vmatrix}$.

引理 1 一个 n 阶行列式，如果其中第 i 行所有元素除 a_{ij} 外都为 0，那么这个行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积，即 $D=a_{ij}A_{ij}$.

定理 1 设 D 是 n 阶行列式，第 i 行第 j 列元素 a_{ij} 的代数余子式记为 $\mathrm{A_{ij}}$，则

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\ (i=1,2,\cdots,n)$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\ (j=1,2,\cdots,n)$$

这个定理叫作行列式按行(列)展开定理，利用此定理就可以将一个 n 阶行列式按某一行(列)展开，转化为 $n-1$ 阶行列式来计算，从而简化行列式的计算. 为了计算简单，可以先利用行列式的性质，将行列式的某一行(列)化成只有一个非零元素，然后再按这行(列)展开.

例 6 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}7&0&4&0\\1&0&5&2\\3&-1&-1&6\\8&0&5&0\end{vmatrix}$.

解

$$D=\begin{vmatrix}7&0&4&0\\1&0&5&2\\3&-1&-1&6\\8&0&5&0\end{vmatrix}=\!=(-1)\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}7&4&0\\1&5&2\\8&5&0\end{vmatrix}$$

$$=\!=2\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}7&4\\8&5\end{vmatrix}=-2\times(35-32)=-6$$

例 7 当 k 为何实数时，行列式 $D=\begin{vmatrix}k^2&2&1&1\\4&k&2&3\\0&0&k&2\\0&0&-2&k\end{vmatrix}=0$.

解

$$D=\begin{vmatrix}k^2&2&1&1\\4&k&2&3\\0&0&k&2\\0&0&-2&k\end{vmatrix}=\!=k^2\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}k&2&3\\0&k&2\\0&-2&k\end{vmatrix}+$$

$$4\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&1&1\\0&k&2\\0&-2&k\end{vmatrix}$$

$$=k^2\times k\begin{vmatrix}k&2\\-2&k\end{vmatrix}-4\times2\begin{vmatrix}k&2\\-2&k\end{vmatrix}$$