高中数学精华丛书

上海市课程改革新教材

高中数学

教学要点及范例解析

精 选

（高三年级）

上海市松江二中数学教研组 编

- 知识提要
- 范例解析
- 习题精选
- 各章自测
- 综合专题

华东理工大学出版社

高中数学精华丛书

高中数学教学要点及范例解析精选

（高三年级）

松江二中数学教研组　编

华东理工大学出版社

（沪）新登字 208 号

高中教学精华丛书
高中数学教学要点及范例解析精选
（高三年级）
松江二中数学教研组　编
华东理工大学出版社出版发行
上海市梅陇路 130 号
邮政编码　200237　电话　64250306
新华书店上海发行所发行经销
上海展望印刷厂印刷
开本 787×1092 1/16　印张 10　字数 240 千字
1998 年 7 月第 1 版　1998 年 9 月第 3 次印刷
印数 20001—31000 册

ISBN 7-5628-0865-1/O·45　定价 11.50 元

前　言

上海市课程改革教材已在全市普遍推广使用，该教材与原部编教材在教学要求、教学内容、编写体例等方面均有较大差异，这无疑会给广大师生的教与学带来新的问题。可喜的是，我校作为新教材试点学校之一，在数年的教学实践中，已逐步摸索出一套行之有效的方法，在实现从应试教育向素质教育的转变方面，在提高师生教与学的水平方面，都收到了显著的效果。

为帮助广大师生更好地把握住新教材，我们组织了一批富有教学经验的教师，在总结经验的基础上，精心编撰了这套《高中教学精华丛书》。它是我们新教材教学成果的结晶。

这套丛书有两个鲜明的特点：一是紧密配合新教材，与新教材配套；二是紧密配合学生学习，与学生实际相联系。

相信本书对教师有一定的参考价值，对学生有一定的指导作用。

这套《高中教学精华丛书》有外语、数学、物理、语文、化学等分册。

本册《高中数学教学要点及范例解析精选》，按新教材内容编排为序，以周为单元，随教学进度同步展开。每单元包括以下部分：一、知识提要，二、范例，三、练习题。其中习题以基本题为主，围绕新教材的要求，不盲目拔高和拓展，其数量大致依据课时划分配置，可供师生课内或课外使用。每章末尾还编写一套综合测试题，有助于学生自测掌握本章基本内容的程度。习题力求题型典型，覆盖知识点多，且具有一定的示范性，有助于学生数学概念形成，知识能力巩固和提高。

本册适合高三学年使用。与已经和读者见面的前两册相比，本册还选编了综合复习的九个专题，供师生复习参考使用。

参加本册编写的有：金翠妹（第十四、十六章），钱民广（第十五、十七、十八章，续篇的一、二、三、四及综合复习专题（一）～（九）），王家隆（续篇五）。

本书中疏漏不当之处，望老师和同学们指正。

编　者

1998年2月

目　　录

第十四章　排列、组合与概率

第　一　周

§14.1　计数原理Ⅰ——乘法原理

§14.2　排列

§14.3　排列数公式

［知识提要］

1. 乘法原理

完成一件事，需要几个步骤，做第一步有 m_1 种方法，做第二步有 m_2 种方法，……，做第 n 步有 m_n 种方法，那么完成这件事共有 $N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$ 种方法。

若完成一件事必须经过几个步骤，缺一不可，则用乘法原理。

2. 排列

一般地，从 n 个不同元素中，任意取 $m(m\leqslant n)$ 个元素，按一定顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列。当 $m=n$ 时，称为 n 个元素的全排列。

只有元素相同且元素顺序也相同的两个排列才是相同的排列。

3. 排列数公式

$P_n^m=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-m+1)$

$P_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$

$P_n=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1$

$P_n=n!$

注：记号 $n!$ 读作 n 阶乘，即 1、2、3、…、$(n-1)$、n 这 n 个连续自然数的乘积。

4. 规定

$0!=1$

5. 处理排列问题的一些基本思想

(1) 正面考虑(直接法)较繁或很难下手，不妨从反面入手(间接法)。

(2) 对某些位置或元素有限制条件时，可先考虑有条件的位置或元素的排列，并按其性质分类、分步。

(3) 掌握几种常规方法，如视一法(相邻元素排列问题)、插空法(不相邻元素排列问题)。

［范例］

例 1　一个学生要从两门不同的技能类选修课、三门不同的知识类选修课、两门不同的

艺体类选修课中各选一门，问共有多少种不同的选法？

解：确定选法需分三个步骤完成：第一步，从技能类中选一门，有 2 种选法；第二步，从知识类中选一门，有 3 种选法；第三步，从艺体类中选一门，有 2 种选法。根据乘法原理，不同的选法有

$$2\times3\times2=12(\text{种})$$

例 2 用 1、2、3、4、5 五个数字可以组成多少个没有重复数字的三位数？

解：为了计算三位数的数目，可分三步考虑。

首先确定百位数，可以从五个数字中任意选一个，有 5 种方法。

其次确定十位数，由没有重复数字的三位数这个条件，十位数可以从剩下的四个数字中任选一个，有 4 种方法。

最后确定个位数，它可以从剩下的三个数字中任选一个，有 3 种方法。根据乘法原理

没有重复数字的三位数的个数 $=5\times4\times3=60$

例 3 有按序排列的三个数 a、b、c，在 a、b 和 b、c 之间分别放置 $+$、$-$、$\times$、$\div$ 四种运算符号中的任意两种，试写出所有不同的运算式。

解：$a+b-c$，$a-b+c$，$a\times b+c$，$a\div b+c$

$a+b\times c$，$a-b\times c$，$a\times b-c$，$a\div b-c$

$a+b\div c$，$a-b\div c$，$a\times b\div c$，$a\div b\times c$

例 4 $\dfrac{P_x^5+P_x^3}{P_x^3}=43$，求 x。

解：由 $\dfrac{P_x^5+P_x^3}{P_x^3}=43$，得 $\dfrac{P_x^5}{P_x^3}+1=43$

则

$$(x-3)\cdot(x-4)+1=43$$

得

$$x^2-7x-30=0$$

因为 x 是正整数，故 $x=10$。

例 5 有一名教师和 4 位学生一起拍照，按下列各种条件，各有几种排法？

(1) 排成一行，教师居中；

(2) 排成一行，教师不能在两端；

(3) 排成一行，其中甲、乙两位学生须在一起；

(4) 排成一行，其中甲、乙两位学生不能在一起。

解：(1) 教师位置确定，4 位学生排成一行，有 P_4 种排法，所以排法只有 $P_4=24$ 种。

(2) 教师不能在两端，则有 P_3^1 种排法，4 位学生排法有 P_4 种，所以共有排法 $P_3^1P_4=72$ 种。

(3) 有甲、乙两人必须在一起，可以视作一个元素加上一名教师和另两位学生，则有排法 P_4 种，再交换甲、乙两人的位置，则有 P_2 种，所以共有排法 $P_2P_4=48$ 种。

(4) 先不考虑甲、乙两位学生，其他三位的排法有 P_3 种，再考虑甲、乙两位学生有 4 个位置可供排列，有 P_4^2 种排法，所以排法共有 $P_3P_4^2=72$ 种。

另解：不考虑限制条件，5 个人有 P_5 种排法，再结合(3)，共有排法 $P_5-P_2P_4=72$ 种。

［练习题］

1. $n\in N$，$n<25$，则 $(25-n)(26-n)\cdots(39-n)$ 可表示为 ( )

(A) P_{25-n}^{15}　(B) P_{25-n}^{14}　(C) P_{39-n}^{15}　(D) P_{39-n}^{14}

2. 从 6 份不同套餐中送 4 份给 4 个小朋友,共有几种不同的分法?（ ）

(A) P_6　(B) 6^4　(C) 4^6　(D) P_6^4

3. 用 1、2、3、4、5 这五个数字，组成没有重复数字的三位数,其中偶数共有（ ）

(A) 24 个　(B) 30 个　(C) 40 个　(D) 60 个

4. 某工厂加工一产品需经 5 个工种,但某一工种不能排在最后,则加工该产品的加工顺序的排法种数共有（ ）

(A) 24 种　(B) 96 种　(C) 120 种　(D) 125 种

5. 方程 $P_n^7-P_n^5=P_n^5$ 的解集是（ ）

(A) $\{5,6\}$　(B) $\{4,7\}$　(C) $\{7\}$　(D) $\varnothing$

6. 三名战士坐在一排 8 个座位上,若每人的左右两边都有空座位,则坐法的种数是（ ）

(A) 6　(B) 12　(C) 18　(D) 24

7. 把两个大小不同的黑球,两个大小不同的白球排成一列,且使两个黑球不相邻,则排法的种数是（ ）

(A) 4　(B) 6　(C) 12　(D) 24

8. 要排一张有 6 个歌唱节目和 4 个舞蹈节目的节目演出单,要求任意两舞蹈节目不相邻,则不同的排法种数是（ ）

(A) P_6P_4　(B) $P_6P_7^4$　(C) P_6^4　(D) P_{10}^4

9. 将 3 封信寄出,有 4 个邮筒可供投寄,最多的投法种数为（ ）

(A) 24　(B) 4　(C) 64　(D) 81

10. 将标有 1、2、3、4 的四个球放到标号为 1、2、3、4 的四个盒子里,每只盒子放一个球,则盒子的标号与球号均不相同的放法种数为（ ）

(A) 6　(B) 9　(C) 11　(D) 23

11. 代数式$(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5)(c_1+c_2+c_3+c_4)$展开后共有______项。

12. 从 2、3、5、7、11 这五个数字中,每次取出两个分别作分子和分母,共可组成______个不同的分数,______个不同的真分数。

13. 四枝不同的花卉插在两只不同的花瓶中,每只花瓶只插一枝花卉,共有______种不同的插法。

14. 假设加工某种不同的车刀,需经过车、铣、磨三道工序,如果车削可选用 4 种不同的车刀,铣削可选用 2 种不同的铣刀,磨削可选用 3 种不同的砂轮,则加工这种零件一共可选用______种不同的方法。

15. 从上海开往南京的普通快车沿途停靠苏州、无锡、常州、镇江、南京站,则火车上 3 名乘客最多有______种不同的下车方法。

16. 将 5 位外籍球员分配到 A、B、C、D 四个甲级队中,每个队至少被分配到一位球员,且全部分配完,则甲、乙两位球员分在同一个队的分配方案有______种。

17. 计算:

(1) $\dfrac{2P_9^5+3P_9^6}{P_9-P_{10}^6}=$__________　(2) $\dfrac{(m-1)!}{P_{m-1}^{n-1}(m-n)!}=$__________

(3) $\frac{P_{10}^{3}P_{7}}{10!}=$______　　　　(4) $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n-1}{n!}=$______

18. 以数字1、2、3、4组成无重复数字的数中：

(1) 可组成______个三位数；

(2) 可组成______个三位偶数；

(3) 能组成______个比2134大的数。

19. 某老师要在一天上午上三个班级的课，每班一节，如果上午只能排四节课，并且该老师不能连上三节课，则这位老师这一天上午的课表有______种排法。

20. 停车场有12个车位，现有8辆车需停放，且使4个空位连在一起，则共有______种停法。

21. 某种产品加工时，需经5个工种，则

(1) 如果其中某工种不能最后加工，那么加工工序有几种排法？

(2) 如果其中有2个工种需连续，且只能一个前一个后，那么加工工序有几种排法？

22. 求证：

(1) $P_{n}^{m}=\frac{n}{n-m}P_{n-1}^{m}$

(2) $P_{n+1}-P_{n}=n^{2}P_{n-1}$

23. 解方程：

(1) $3P_{8}^{n}=4P_{9}^{n-1}$

(2) $2P_{m}^{3}=3P_{m+1}^{3}+6P_{m}^{1}$

24. 有标号分别为A、B、C、D、E、F、G 7条不同的金鱼，放入7只相同的鱼缸中，每只鱼缸放1条鱼，按下列条件各有多少种不同的排法？

(1) 分两排，前排3只，后排4只。

(2) 排成一行，其中A必须居中。

(3) 排成一行，其中A不能放在两端。

(4) 排成一行，其中A与B必须放在一起。

(5) 排成一行，其中A与B必须放在两端。

(6) 排成一行，其中A与B不能放在一起。

(7) 排成一行，其中A与B之间必须放三只鱼缸。

25. 9 个学生排成前后两排，前排 4 人，后排 5 人，若其中两人必须相邻排在一起，求排法种数。

26. 用 1、2、3、4、5、6、7 排成无重复数字的七位数，按下述要求各有多少个？

(1) 偶数不相邻。

(2) 偶数一定在奇数位上。

(3) 奇数位上一定是奇数，偶数位上一定是偶数。

第 二 周

§14.4　组合

§14.5　组合数公式

§14.6　计数原理 II——加法原理

[知识提要]

1. 组合

一般地，从 n 个不同元素中，任意取 $m(m\leqslant n)$ 个元素并成一组，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合。

如果两个组合的元素完全相同，不管元素顺序如何，这两个组合是相同的组合。

2. 组合与排列的区别与联系

先分析排列与组合的区别在于“顺序”两字，排列问题的特征是取出元素有顺序；组合问题的特征是取出元素无顺序。例如：四人中，两两握手，这属于组合问题；四人中，两两通信，这属于排列问题。一般地，可以如此来理解：在一次选择的元素中，若任意交换两个元素的位置，都代表着相同的事件，这就是组合问题；反之，则是排列问题。

再来分析排列与组合的联系。

例如：全班 50 人中选出 6 人组成班委会，分别担任 6 种不同职务，有多少种不同的组成法？这是排列问题。可以这样理解：在 50 人中每次选出 6 人组成一组共有 C_{50}^{6} 种组成法，而后对其中的每一个组进行不同分工共有 P_6 种，故共有 $C_{50}^{6}\cdot P_6$ 种组成法，结果与 P_{50}^{6} 一致。因此，我们可以把“排列”分为两个步骤：(1) 组合；(2) 全排列。也就是说，可以把组合看作为排列的第一步骤，这就是排列与组合的联系。

3. 组合数公式

$$C_n^m=\frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}$$

$$C_n^m=\frac{n!}{(n-m)!\ m!}$$

4. 规定

$C_n^0=1$

5. 组合数的两个性质

(1) $C_n^m=C_n^{n-m}$

(2) $C_n^m+C_n^{m-1}=C_{n+1}^m(m\geqslant1)$

6. 加法原理

如果某件事情可以由 k 类不同办法完成，在第一类办法中有 m_1 种不同方法完成，在第二类办法中有 m_2 种不同方法完成；……；在第 k 类办法中有 m_k 种不同方法完成，那么完成这件事情共有 $m_1+m_2+\cdots+m_k$ 种方法，这个计数原理称为加法原理。

注意：加法原理与乘法原理是解决排列、组合问题的主要理论基础和计算原理，加法原理是指完成一件事可以采用 n 类办法，每一类办法中的每一种方法，都能达到完成这件事的目的；而乘法原理是指完成一件事需分成 n 个步骤，要这 n 个步骤依次连续完成，这件事才能完成，其中任何一步或多步（只要不是全部 n 步）完成时都没有完成这件事，因此在处理排列、组合问题时应做到科学分类，合理分步。

［**范例**］

例 1　试确定下列问题是排列问题还是组合问题。

(1) 5 个人中选 3 人分别担任三种不同职务，有多少种选法？

(2) 5 个人中选 3 人参加一次会议，有多少种选法？

(3) 5 本不同的书选 2 本分送给 2 人，有多少种选法？

(4) 5 本不同的书选 2 本寄给某人，有多少种选法？

解：(1) 选出 3 个人分别担任三种不同职务，与顺序有关，因此是排列问题。

(2) 选出 3 人后即可参加会议，与顺序无关，因此是组合问题。

(3) 选出 2 本书后分送给 2 人，与顺序有关，因此是排列问题。

(4) 选出 2 本书后即可寄出，与顺序无关，因此是组合问题。

例 2　某班有 50 名学生，其中正、副班长各 1 人，现选派 8 人参加社会调查活动，根据下列条件，各有多少种不同的选法？

(1) 正、副班长都参加调查。

(2) 正、副班长都不参加调查。

(3) 正班长参加，副班长不参加调查。

(4) 正、副班长有且只有 1 人参加调查。

解：(1) 只需 48 人中选 6 人，即有 C_{48}^6 种选法。

(2) 只需 48 人中选 8 人，即有 C_{48}^8 种选法。

(3) 只需 48 人中选 7 人，即有 C_{48}^7 种选法。

(4) 先从正、副班长中选 1 人，再从 48 人中选 7 人，共有 $C_2^1C_{48}^7$ 种选法。

注意：按元素性质分类，按事件发生过程分步。

例 3 求 $C_{3n}^{38-n}+C_{21+n}^{3n}$的值。

解：由 $\begin{cases}0\leqslant 38-n\leqslant 3n\\0\leqslant 3n\leqslant 21+n\end{cases}$

解得： $\dfrac{19}{2}\leqslant n\leqslant\dfrac{21}{2}$

$\because\ n\in N\quad\therefore\ n=10$

则 原式 $=C_{30}^{28}+C_{31}^{30}=C_{30}^{2}+C_{31}^{1}=466$

例 4 4 件不同礼品，按以下各种情况，各有几种分法？

(1) 平分成两堆。

(2) 平分给两人。

(3) 分成两堆，一堆 3 件，一堆 1 件。

(4) 分给两人，一人 3 件，一个 1 件。

解：(1) 从 4 件礼品中选两件成一堆，则剩下两件礼品成另一堆，有 C_4^2 种方法；但考虑到从 4 件礼品中选出 A、B 则成"AB、CD"两堆与从 4 件礼品中选出 C、D 则成"CD、AB"两堆是同一种分法，因此共有分法 $\dfrac{C_4^2}{2!}=3$ 种。

(2) 先平分成两堆，再分给两人，共有 $\dfrac{C_4^2}{2!}\cdot P_2=C_4^2=6$ 种。

(3) 从 4 件礼品中选出 1 件成一堆，剩下 3 件自然成另一堆，因此共有分法 $C_4^1=4$ 种。

(4) 先完成(3)，再将两堆分给两人，则有分法 $C_4^1\cdot P_2=8$ 种。

注意这个题目的推广价值，分清四种问题，掌握它的一般解法。

例 5 (1) 用 1、2、5 三个数字可组成多少个无重复数字的自然数？(2) 用 1 元、2 元、5 元三张人民币，可组成多少种不同的币值？

解：(1) 分成三类。第一类，由单个数字组成的自然数有 P_3^1 个；第二类由 2 个数字组成的自然数由 P_3^2 个；第三类由 3 个数字组成的自然数有 P_3^3 个。根据加法原理，共可组成 $P_3^1+P_3^2+P_3^3=15$ 个自然数。

(2) 分三类。第一类，由 1 张货币组成的币值有 C_3^1 个；第二类，由 2 张货币组成的币值有 C_3^2 个；第三类，由 3 张货币组成的币值有 C_3^3 个。共有币值 $C_3^1+C_3^2+C_3^3=7$ 种。

例 6 由 0、1、2、3、4、5、6 七个数字组成无重复数字的五位数，但必须有三个数字是偶数，两个数字是奇数，问这样的五位数共有多少个？

解：分两类。第一类不选 0，先从 3 个奇数中选 2 个数字，再从 3 个偶数中选 3 个，最后将 5 个数字全排列，则有 $C_3^2C_3^3P_5$ 个五位数；第二类选 0，先选数，再考虑 0 的位置，最后将剩下 4 个数字排列，则有 $C_3^2C_3^2P_4^1P_4$ 个五位数。

根据加法原理，符合要求的五位数共有 $C_3^2C_3^3P_5+C_3^2C_3^2P_4^1P_4=1224$ 个

此题也可间接考虑，不考虑 0 的位置，则由 3 个偶数 2 个奇数组成的五位数有 $C_4^3C_3^2P_5$ 个，再减去 0 放在首位的情况，有 $C_3^2C_3^2P_4$ 个，所以符合要求的五位数共有

$$C_4^3C_3^2P_5-C_3^2C_3^2P_4=1224\text{ 个}$$

注意：优先考虑特殊元素，先找好特殊元素的特殊位置，再考虑其他关系。

［练习题］

1. 若空间有 10 个点且不在一直线上，则可以确定的平面总数最多有 （ ）

(A) 90 个　　(B) 100 个　　(C) 120 个　　(D) 150 个

2. 3 本不同的数学书，2 本不同的语文书，3 本不同的英语书排成一排，要求 3 本数学书必须排在一起，则排法种数是 （ ）

(A) 720　　(B) 1440　　(C) 2880　　(D) 4320

3. 以一个正方体的顶点为顶点的四面体的个数是 （ ）

(A) C_8^4　　(B) C_8^4-6　　(C) C_8^4-8　　(D) C_8^4-12

4. 用数字 0、1、2、3、4、5 组成没有重复数字的六位数，其中偶数有 （ ）

(A) 240 个　　(B) 288 个　　(C) 300 个　　(D) 312 个

5. 某校一年级有 6 个班，二年级有 6 个班，三年级有 7 个班，各年级举行班与班之间的篮球单循环赛，总共需要进行比赛的场数是 （ ）

(A) $C_6^2+C_6^2+C_7^2$　　(B) $C_6^2\cdot C_6^2\cdot C_7^2$　　(C) $P_6^2+P_6^2+P_7^2$　　(D) C_{19}^2

6. 假设在 200 件产品中有 3 件是次品，现在从中任意抽取 5 件，其中至少有 2 件次品的抽法有 （ ）

(A) $C_3^2C_{197}^3$种　　(B) $C_3^2C_{197}^3+C_3^3C_{197}^2$种　　(C) $C_{200}^5-C_{197}^5$种　　(D) $C_{200}^5-C_3^1C_{197}^4$种

7. 已知集合 $A=\{0,2,5,7,9\}$，从集合 A 中取两个元素相乘组成集合 B，集合 B 的子集个数是 （ ）

(A) 7　　(B) 16　　(C) 127　　(D) 128

8. 从 7 名男同学和 5 名女同学中选出 3 名男同学和 2 名女同学，分别担任语文、数学、物理、化学和外语的课代表，选派的方法种数为 （ ）

(A) $C_7^3C_5^2$　　(B) $C_7^3C_5^2P_5$　　(C) $P_7^3P_5^2$　　(D) $(C_7^3+C_5^2)\cdot P_5$

9. 从不同的 5 副手套中任取 4 只，其中恰好有一副的取法种数为 （ ）

(A) 120　　(B) 240　　(C) 280　　(D) 60

10. 从 1～9 这九个自然数中，任取三个数作数组(a,b,c)，且 $a>b>c$，则不同的数组共有 （ ）

(A) 21 组　　(B) 28 组　　(C) 84 组　　(D) 343 组

11. 平面内有 12 个不同的点，其中任何三点不在同一条直线上，如果任取 3 点为顶点作一个三角形，可作______个三角形；用红、黄、绿三种颜色涂 12 个三角形中的任意 3 个，每个三角形只涂 1 种，共有______种不同的涂色方法。

12. 如果 x、y 可取值 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9，则存在______个不同的复数 $x+yi$，其中不同的虚数有______个。

13. 从乒乓运动员男 7 人、女 5 人中选出 4 人，进行男女混合双打比赛，不同的分组方法有______种。

14. 6 张不同颜色的卡片，按每人两张分给 3 位小朋友，不同分法共______种。

15. 一个平行四边形被平行于一组对边的 8 条平行线和平行于另一组对边的 5 条平行线所截，由此可得新的平行四边形共______个。

16. $M=\{0,2,-5,-7\}$，从 M 中任取两个数，分别表示 $y=\frac{a}{b}x$ 中的 a、b，所得不同的直线有______条。

17. 在保龄球活动中，目标为标有 1，2，…，10 的 10 个瓶。现用一个球去击它们，则击倒瓶的情况共有______种。

18. 四个不同的小球放入编号为 1、2、3、4 的四个盒中，则恰有一个空盒的放法共有______种。

19. 8 项工程，甲承包 3 项，乙承包 1 项，丙、丁各承包 2 项，承包方案共有______种。

20. 计算：

(1) $C_6^3+C_6^4+P_5^5+C_5^5+C_5^0$

(2) $C_4^3+C_5^3+C_6^3+\cdots+C_{10}^3$

(3) $(C_{100}^{98}+C_{100}^{97})\div P_{101}^3$

(4) $1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\cdots+n\cdot n!$

21. 解方程

(1) $7P_{n-1}^3=24C_n^{n-3}$

(2) $n\cdot C_n^{n-3}+P_n^4=4C_{n+1}^3$

(3) $\frac{1}{C_4^x}-\frac{1}{C_5^x}=\frac{1}{C_6^x}$

22. 如果一元二次方程 $bx^2-2ax+a=0$ 有两个不同的实数根，a、b 均是不大于 10 的正整数，那么这样的方程共有多少个？

23. 有壹佰元纸币 4 张，伍拾元纸币 3 张，拾元纸币 2 张，伍元纸币 1 张。问用这些纸币中的 1 张或数张可以组成多少种不同的币值？

24. 盒中有 50 粒奶糖，30 粒果糖，从中任取 8 粒，问：

(1) 抽取的 8 粒中恰好有 4 粒奶糖的抽法有多少种？

(2) 抽取的 8 粒中至少有 2 粒奶糖的抽法有多少种？

(3) 抽取的 8 粒中至多有 5 粒奶糖的抽法有多少种？

25. M、N 是两个平行平面，在 M 内取 4 个点，在 N 内取 5 个点，这 9 个点中，无其他四点共面，且其中任意三点不共线。问：

(1) 这些点最多能决定几条直线？几个平面？

(2) 以这些点为顶点，能作多少个三棱锥？四棱锥？

26. 用 0、1、2、…、9 共十个数字组成无重复数字的四位数，

(1) 其中能被 5 整除的数有多少个？

(2) 个位不是 3 的数有多少个？

(3) 偶数有多少个？

(4) 比 7800 小的有多少个？

第　三　周

§14.7　二项式定理

§14.8　二项式定理的应用

[**知识提要**]

1. 二项式定理

$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+C_n^nb^n$

右式叫做 $(a+b)^n$ 的二项展开式，共有 $n+1$ 项。

$C_n^k(k=0,1,2,\cdots,n)$ 叫做二项式系数。

$T_{k+1}=C_n^ka^{n-k}b^k$ 表示二项展开式中的第 $k+1$ 项，叫做二项展开式的通项。

要注意二项式系数与二项展开式各项的系数的区别。

2. 二项式系数的性质

(1) $C_n^k=C_n^{n-k}(k=0,1,2,\cdots,n)$

(2) $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n=2^n$

(3) $C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots=2^{n-1}$

(4) 中间项的二项式系数最大：