G GAI NIAN GAO KAO CHONG CI CONG SHU

数学

3+2新概念高考冲刺丛书

开明出版社

3＋2 新概念高考冲刺丛书

数 学

任爱东 主编

开 明 出 版 社

（京）新登字 104 号

3＋2 新概念高考冲刺丛书
数　学
任爱东　主编
*
开明出版社出版发行
（北京海淀区车道沟 8 号）
北京怀柔东茶坞印刷厂印刷
新华书店北京发行所经销
开本：787×1092　1/32　印张：12.125　字数：275 千字
1997 年 1 月北京第 1 版　1997 年 1 月北京第 1 次印刷
印数：00，001－10，000
ISBN 7-80133-080-3/G・813　　定价：12.20 元

编　者

任爱冬　潘凤易
汪惟葆　裘小强
关淑珍　徐　延
段蕙若　李公月
阎达伟　王建民

前　言

本书包括两部分：一部分是做为数学学科高考系统复习的参考书，另一部分是单元检测试题和模拟试题.

本书以现行高中数学教学大纲和全国统编教材为基础，以高考考试说明为指导，融汇编者多年来指导高考复习的经验.其特点是：注重基础，突出重点，层次合理，适应面广，并且强调思维能力，以思维能力为核心，用思维能力的提高带动其他能力的全面提高，以适应高考的需要.本书对于重要的基础知识、基本的数学方法、高考中年年反复考卷的重要知识点和数学方法，采用循环往复多次在不同场合重现的复习和考查方法，以使考生对这些知识记得牢、理解深、运用好，确保复习的效果，提高应试的能力.

本书重视数学思想在学习数学中的指导作用，把常用的重要数学思想渗透到各单元内容及单元检测试题和模拟试题中，注重对数学思想方法的考查.

参加本书编写的老师们在各自的岗位上都取得过出色的成绩，积累了丰富的经验.他们组成一个团结、和睦的集体把自己的经验、资料汇集成书，献给广大读者.希望本书在你攀登的征途中成为铺路石，成为你的助手和朋友.

编　者

1996 年

目　录

第一章 函 数

【考点指要】

函数是高中数学中的重点内容,函数的思想方法广泛渗透在数学的各个分支,成为研究这些分支的指导思想和重要方法,也是历年高考中必考的重点内容.在近十年的高考试题中,涉及到函数的约占 15%,1995 年试题中,直接涉及函数的试题共 33 分,占 22%.再考虑到函数思想方法在复习其他章节中的指导作用,可以说,函数知识复习的好坏会直接影响整个数学的复习效果.因此,函数的复习应给予足够的重视.

考试内容和考试要求是:

1. 理解集合、子集、交集、并集、补集的概念.了解空集和全集的意义,了解属于、包含、相等关系的意义,能掌握有关的术语和符号,能正确地表示一些较简单的集合.

这里有五个概念要求到“理解”的层次,这就包含了:正确地表示集合;求已知集合的交、并、补集;判断两个集合的包含或相等的关系等基本方法.也包含了对抽象数学符号理解和使用的能力,用图形表示和研究集合的能力.

例 1 (1991 年)设全集为 R,$f(x)=\sin x$,$g(x)=\cos x$,$M=\{x|f(x)\neq 0\}$,$N=\{x|g(x)\neq 0\}$,那么集合 $\{x|f(x)\cdot g(x)=0\}$ 等于 ( )

(A)$\overline{M}\cap\overline{N}$ (B)$\overline{M}\cup N$

(C)$M\cup\overline{N}$　　　　　(D)$\overline{M}\cup\overline{N}$

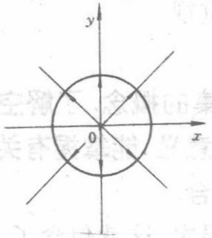
分析:若 $x_0\in\{x|f(x)\cdot g(x)=0\}$,则 $f(x_0)=0$ 或 $g(x_0)=0$,于是 $x_0\notin M$ 且 $x_0\notin N$,就是说,$x_0\in\overline{M}$ 或 $x_0\in\overline{N}$,因此(D)正确.

本题在抽象的意义上考查对元素与集合、集合与集合的关系的理解,要求考生概念理解得准确,并有一定的抽象推理能力.

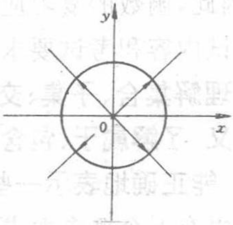
例 2　(1993 年)集合 $M=\{x|x=\frac{1}{2}k\pi+\frac{\pi}{4},k\in Z\}$,$N=\{x|x=\frac{1}{4}k\pi+\frac{\pi}{2},k\in z\}$　则　　　　　　(　　)

(A)$M=N$　　　　　(B)$M\supset N$

(C)$M\subset N$　　　　　(D)$M\cap N=\varnothing$



集合 M



集合 N

图 1—1

分析:由图易知 $M\subset N$,(C)正确

本题考查了集合之间的关系,考查了符号$\supset$、$\subset$、$\varnothing$、$=$,考查了数形结合的能力.

2. 了解映射的概念,在此基础上理解函数及其有关概念,掌握互为反函数的函数图象间的关系.

这里映射概念只要求“了解”,历届高考中很少考查,而对函

数概念要求“理解”，这就意味着要掌握求定义域、求解析式、求值域、求反函数等基本方法. 掌握函数图象，掌握图象的平移、对称变换，掌握构造函数，研究方程和不等式的方法.

例 3 （1994 年）设函数 $f(x)=1-\sqrt{1-x^2}\ (-1\leqslant x\leqslant 0)$，则函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象是 （　　）

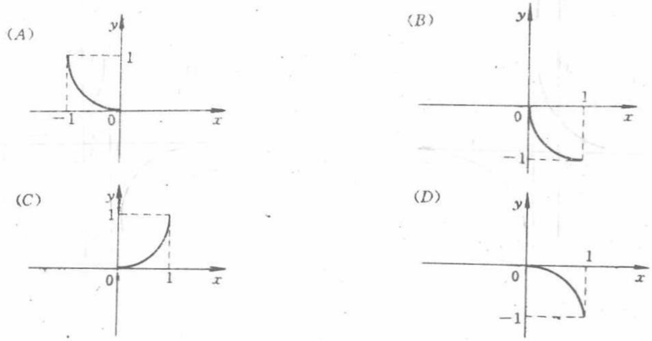


图 1—2

分析：$f(x)$ 中 $x\in(-1,0)$，因此 $f^{-1}(x)$ 的值域为〔$-1,0$〕，因此淘汰(A)、(C).

在 $f(x)$ 中，令 $x=-\dfrac{1}{2}$，则 $y=1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\dfrac{1}{2}$.

因此，$f^{-1}(x)$ 中，当 $y=-\dfrac{1}{2}$ 时，相应之 $x=1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\dfrac{1}{2}$，故(B)正确.

本题考查考生能否在深刻理解概念的基础上，采用简明的解法处理之. 不然画出 $f(x)$ 的图象，再对称而得 $f^{-1}(x)$，或求出 $f^{-1}(x)$ 的表达式再画图，都会加重工作量，且易错.

例 4 （1995 年）函数 $y=-\dfrac{1}{x+1}$ 的图象是 （　　）

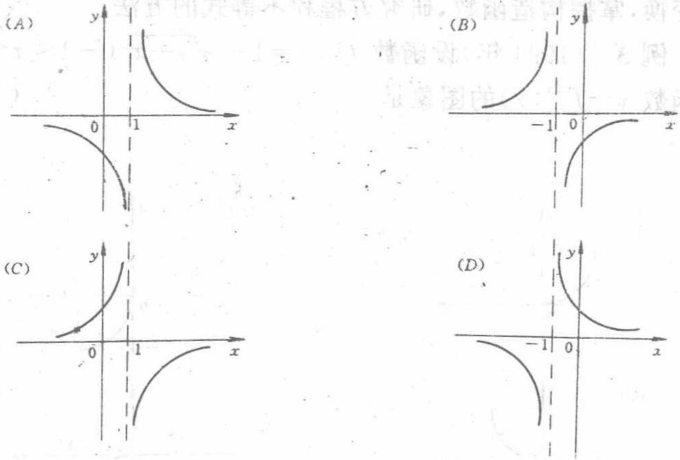


图 1—3

分析：$y=-\frac{1}{x}$的图象向左移 1 个单位，得 $y=-\frac{1}{x+1}$的图象，(B)正确.

本题考查考生能否从基础出发，根据函数图象的变换掌握复杂函数的图象.

3. 理解函数的单调性和奇偶性的概念，并能判断一些简单函数的单调性和奇偶性，能利用函数的奇偶性与图象的对称性的关系，描绘函数图象.

这里对函数的两个主要性质——单调性和奇偶性要求“理解”，这就包含了：判断函数在已知区间上的单调性，求已知函数(含简单的复合函数)的单调区间，利用单调性比较大小，利用定义

证明单调性，求已知函数在给定区间上的最大或最小值，判断函数的奇偶性，会利用图象的对称性解题，会利用定义证明奇偶性.

例 5 (1994 年)如果函数 $y=\sin 2x+a\cos 2x$ 的图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{8}$ 对称，那么 $a=$ ( )

(A) $\sqrt{2}$ (B) $-\sqrt{2}$

(C) 1 (D) -1

分析：从一般函数意义的角度看，图象向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位，则图象关于 y 轴对称，即平移后的函数为偶函数，即

$y=\sin(2x-\frac{\pi}{4})+a\cos(2x-\frac{\pi}{4})$ 是偶函数，

而 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}[(1+a)\sin 2x-(1-a)\cos 2x]$

可见 $a=-1$ 时，为偶函数. (D)正确.

或者从对称的“本意”出发：

点 (x,y) 与 $(-x-\frac{\pi}{4},y)$ 同时在曲线上，$(x\in R)$.

于是 $y=\sin(-2x-\frac{\pi}{2})+a\cos(-2x-\frac{\pi}{2})=\sin 2x+a\cos 2x$

即 $(1+a)(\sin 2x+\cos 2x)=0$ 对任何 $x\in R$ 成立，

故 $a=-1$

当然也可以从三角函数的特殊性出发解之，可见本题在考查“对称”概念与函数的性质之间的内在联系上，很深刻，很灵活.

例 6 (1989 年)已知 $f(x)=8+2x-x^2$，
如果 $g(x)=f(2-x^2)$，那么 $g(x)$ ( )

(A)在区间 $(-2,0)$ 上是增函数

(B)在区间 $(0,2)$ 上是增函数

(C)在区间$(-1,0)$上是减函数

(D)在区间$(0,1)$上是减函数

分析：令$u=2-x^2$　①

$y=-u^2+2u+8$　②

它们的图象如下：

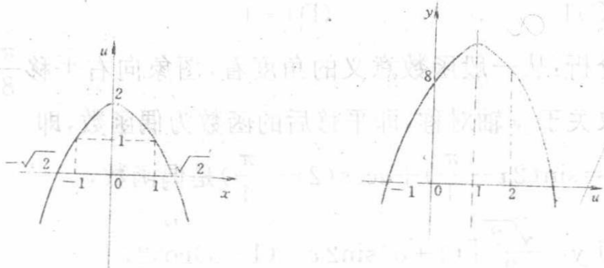


图 1—4

从图中可见，当$x\in(-1,0)$时，函数①递增，且$u\in(1,2)$，而当$u\in(1,2)$时，函数②递减，因此$(-1,0)$是$g(x)$的单调减区间.

本题考查用数形结合方法研究函数的性质，并要求对每一个函数的定义域，增减性有清晰认识，特别是对①，②两个函数性质的联系与综合更要清晰、准确.

4. 掌握幂函数，指数函数、对数函数的概念及其图象和性质，并会解简单的指数和对数方程.

这里明确提出对幂、指、对三类基本的初等函数要求“掌握”. 这就包含，掌握它们的定义域、值域、单调性和奇偶性，会画它们的图象，会根据它们的性质比较大小及解决与之相关的问题.

例 7　(1994 年)已知函数$f(x)=\log_a x\ (a>0, a\neq1, x\in$

R^+)，若 $x_1,x_2\in R^+$，判断$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$与 $f(\frac{x_1+x_2}{2})$的大小，并加以证明.

解：$f(x_1)+f(x_2)=\log_a x_1+\log_a x_2=\log_a(x_1\cdot x_2)$

$\therefore\quad \frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]=\log_a\sqrt{x_1x_2}$

$\because\quad x_1,x_2\in R^+$

$\therefore\quad \sqrt{x_1\cdot x_2}\leqslant\frac{x_1+x_2}{2}$ ($x_1=x_2\Leftrightarrow$等号成立)，

于是 $a>1$ 时：$\log_a\sqrt{x_1\cdot x_2}\leqslant\log_a(\frac{x_1+x_2}{2})$，

即$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)\leqslant f\frac{x_1+x_2}{2}]$

$0<a<1$ 时：$\log_a\sqrt{x_1\cdot x_2}\geqslant\log_a(\frac{x_1+x_2}{2})$

即$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]\geqslant f(\frac{x_1+x_2}{2})$

当且仅当 $x_1=x_2$ 时，两式取等号.

本题考查了对数函数的单调性，对运算，均值定理，不等式证明，考查了分类讨论的思想，考查了逻辑思维能力.

例 8 (1995 年)已知 $y=\log_a(2-ax)$在$[0,1]$上是减函数，则 a 的取值范围是 ( )

(A)$(0,1)$ (B)$(1,2)$

(C)$(0,2)$ (D)$(2,+\infty)$

分析：设$u=2-ax$ ①

$y=\log_a u$ ②

当 $0<a<1$ 时，①、②均为减函数，则 $y=\log_a(2-ax)$为增函数，与题意不符.

故 $a>1$，此时①为减函数，当 $x\in[0,1]$时，$u_{\max}=2$，$u_{\min}=2-a$，

而②要求 $u>0$，故 $2-a>0, a<2$.

因此，$1<a<2$，(B)正确.

本题考查了对数函数的性质，考查了复合函数单调性的处理方法.

【专题选讲】

1. 函数的解析式和定义域

定义域、对应法则、值域是函数的三大要素，对应法则一般反映在解析式或函数图象中. 确立解析式、明确定义域是函数的两个基本问题.

例 1 设函数 $y=\lg(x^2-x-2)$ 的定义域为 A，函数 $y=\sqrt{\dfrac{x+2}{1-x}}$ 的定义域为 B，并设全集为 R. 那么 $\overline{A}\cup\overline{B}=$ ________________.

解： 令 $x^2-x-2>0$

解之得 $x<-1$ 或 $x>2$，

$\therefore\ A=(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$，

$\therefore\ \overline{A}=[-1,2]$

令 $\dfrac{x+2}{1-x}\geqslant 0$

得 $\dfrac{x+2}{x-1}\leqslant 0$

解之，$-2\leqslant x<1$

$\therefore\ B=[-2,1)$

于是 $\overline{B}=(-\infty,-2)\cup[1,+\infty)$

$\therefore\ \overline{A}\cup\overline{B}=(-\infty,-2)\cup[-1,+\infty)$

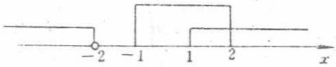


图 1—5

说明:涉及到实数的集合的交、并、补集时,要充分利用图形.

例 2 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,2]$,求函数 $g(x)=f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域,其中 $-1<a<-\frac{1}{2}$

解: 由已知有 $\begin{cases}0<x+a\leqslant 2\\0<x-a\leqslant 2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-a<x\leqslant 2-a\\a<x\leqslant 2+a\end{cases}$

$\because\quad -1<a<-\frac{1}{2}$

$\therefore\quad a<-a<2+a<2-a$

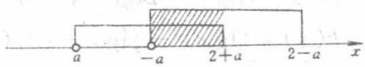


图 1—6

$\therefore\quad g(k)$ 的定义域为 $(-a,2+a]$

例 3 求函数 $y=\sqrt{49-x^2}+\lg\cos x$ 的定义域.

解: $\begin{cases}49-x^2\geqslant 0\\\cos x>0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-7\leqslant x\leqslant 7\\\cos x>0\end{cases}$

由图 1—7 可知,函数的定义域是

$[-7,-\frac{3\pi}{2})\cup(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\cup(\frac{3}{2}\pi,7]$

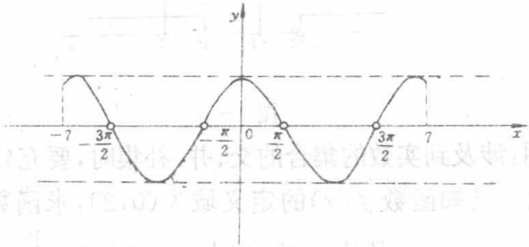


图 1—7

说明:三角不等式与代数不等式组成的混合组,求解时,要充分利用图象,这样易于把握解集.

例 4 设 $f(10^x)=x^2-2x-1 (x\geqslant 0)$

求:(Ⅰ)$f(x)$ (Ⅱ)$f^{-1}(2)$的值

解:(Ⅰ) 设 $t=10^x$, $x\geqslant 0\Rightarrow t\geqslant 1$

则 $x=\lg t \quad (t\geqslant 1)$

$\therefore \quad f(t)=(\lg t)^2-2\lg t-1 \quad (t\geqslant 1)$

即 $f(x)=(\lg x)^2-2\lg x-1 \quad (x\geqslant 1)$

说明:要注意换元后,新变元 t 的数值范围,这实际上就是 $f(x)$的定义域.

解(Ⅱ):

方法 1: $y=(\lg x)^2-2\lg x-1$

$=(\lg x-1)^2-2 \quad (y\leqslant -2)$

$\therefore \quad \lg x-1=\sqrt{2+y}$

$\therefore \quad \lg x=1+\sqrt{2+y}$

$x=10^{1+\sqrt{2+y}}$

即 $f^{-1}(x)=10^{1+\sqrt{2+y}} \quad (x\geqslant -2)$

于是 $f^{-1}(2)=10^3=1000$,

方法 2: 令$(\lg x)^2-2\lg x-1=2$

$\therefore \quad (\lg x-3)(\lg x+1)=0$

$\because \quad \lg x \geqslant 0$ 故 $\lg x=3$, $x=1000$,

即 $f^{-1}(2)=1000$

说明:方法 2 从反函数与已知函数间的关系出发,解法比方法 1 更简捷,在解题中,用好基本概念往往会有很好的效果.

例 5 设 $f(x)=\log_2(2^x-1)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$,解方程 $f(2x)=f^{-1}(x)$

解: 设 $y=\log_2(2^x-1) \quad (x \geqslant 0, y \in R)$

则 $2^x-1=2^y$

$2^x=2^y+1$

$x=\log_2(2^y+1)$

$\therefore \quad f^{-1}(x)=\log_2(2^x+1)(x \in R)$

于是 $f(2x)=f^{-1}(x)$

$\Leftrightarrow \quad \log_2(2^{2x}-1)=\log_2(2^x+1)$

$\Leftrightarrow \quad 2^{2x}-1=2^x+1 \quad (x \geqslant 0)$

设 $2^x=t$

则 $t^2-t-2=0$

$\therefore \quad (t-2)(t+1)=0$

$t=2 \qquad (t=-1$ 舍)

$\therefore \quad 2^x=2 \qquad x=1$

说明:本题的关键是确定反函数的解析式.

例 6 (1989 年)设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上以 2 为周期的函数,对 $k \in Z$,用 I_k 表示区间 $(2k-1,2k+1]$. 已知当 $x \in I_0$ 时,$f(x)=x^2$,(Ⅰ)求 $f(x)$ 在 I_k 上的解析式;(Ⅱ)对自然数 k,求集合 $M_k=\{a \mid$ 使方程 $f(x)=ax$ 在 I_k 上有两个不相等的实根$\}$.

解:(Ⅰ) 当 $x \in I_k$ 时,

$$(x-2k) \in I_0$$