



陕西出版资金资助项目



思维技术

第二卷

袁绪兴 著



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS



陕西出版资金资助项目



思维技术

第二卷

袁绪兴 著



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

内容简介

本书由变通技术与转换技术两部分组成。

变通技术研究特殊与普遍、一般与极端、简单与复杂、正向与逆向、定性与定量、有限与无限、连续与不连续这样一些具有普遍意义的两极对立；着力总结与阐发思维活动在对立双方之间实现沟通、过渡与转化方面存在的那些具有一定普适性的方式和方法，从中概括出规律性的东西；对于思维是如何在关于对立双方认识的相互启发、补充与印证的过程中不断扩展、深化的问题进行深入探讨。

转换技术研究诸如替代、变换、归约、归范(化归为典范形式)、同构、同态、对偶、相似与模拟这样一些得到广泛应用的转换方式与方法；阐述其客观基础、适用条件和重要作用。探讨同各种转换方式、方法的运用密切相关的自由度、变异度、约束与对称问题，论述这些概念在思维课题分析、解决活动中的应用。

本书适合理工科大学学生、研究生、教师和科技工作者阅读。

图书在版编目(CIP)数据

思维技术·第二卷/袁绪兴著. —西安:西安交通大学出版社, 2015.6

ISBN 978-7-5605-7602-2

I. ①思… II. ①袁… III. ①思维-研究 IV. ①B80

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 154502 号

书 名	思维技术(第二卷)
著 者	袁绪兴
责任编辑	任振国 季苏平

出版发行	西安交通大学出版社 (西安市兴庆南路 10 号 邮政编码 710049)
------	-----------------------------------------

网 址	http://www.xjtupress.com
电 话	(029)82668357 82667874(发行中心) (029)82668315(总编办)

传 真	(029)82668280
印 刷	中煤地西安地图制印有限公司

开 本	787mm×1092mm 1/16	印张	28.25	字数	513 字
版次印次	2015 年 10 月第 1 版	2015 年 10 月第 1 次印刷			
书 号	ISBN 978-7-5605-7602-2/B·79				
定 价	140.00 元				

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题，请与本社发行中心联系、调换。

订购热线：(029)82665248 (029)82665249

投稿热线：(029)82664954

电子信箱：jdlgy@yahoo.cn

版权所有 侵权必究

目 录

第三编 变通技术

概述	(1)
第十四章 特殊与普遍	(4)
第一节 由特殊到普遍 I	(4)
第二节 由特殊到普遍 II	(6)
第三节 由特殊到普遍 III	(8)
第四节 归纳 I	(10)
第五节 归纳 II	(12)
第六节 突破口的作用 I	(14)
第七节 突破口的作用 II	(17)
第八节 突破口的选择 I	(21)
第九节 突破口的选择 II	(24)
第十节 突破口的选择 III	(27)
第十一节 拓展 I	(29)
第十二节 拓展 II	(32)
第十三节 拓展 III	(34)
第十四节 扩展眼界 I	(36)
第十五节 扩展眼界 II	(39)
第十六节 扩展眼界 III	(42)
第十七节 由普遍转向特殊 I	(45)
第十八节 由普遍转向特殊 II	(48)
第十九节 特殊—普遍—特殊 I	(50)
第二十节 特殊—普遍—特殊 II	(53)
第十五章 极端与一般	(56)
第一节 界限、关节点与非常状态 I	(56)
第二节 界限、关节点与非常状态 II	(58)

第三节	“极端”的辩证性 I	(60)
第四节	“极端”的辩证性 II	(62)
第五节	从一般到极端	(65)
第六节	关键 I	(68)
第七节	关键 II	(70)
第八节	关键 III	(73)
第九节	契机 I	(76)
第十节	契机 II	(79)
第十一节	补充与完善 I	(83)
第十二节	补充与完善 II	(85)
第十三节	揭示规律 I	(88)
第十四节	揭示规律 II	(91)
第十五节	沟通与转化 I	(93)
第十六节	沟通与转化 II	(96)
第十七节	沟通与转化 III	(99)
第十八节	焦点与枢纽	(101)
第十六章	简单与复杂	(105)
第一节	由简单到复杂的作用 I	(105)
第二节	由简单到复杂的作用 II	(106)
第三节	由简单到复杂的作用 III	(110)
第四节	从简单入手 I	(112)
第五节	从简单入手 II	(115)
第六节	因素的由少到多 I	(118)
第七节	因素的由少到多 II	(121)
第八节	因素的由少到多 III	(124)
第九节	由恒定到可变 I	(127)
第十节	由恒定到可变 II	(129)
第十一节	组合 I	(132)
第十二节	组合 II	(135)
第十三节	由复杂到简单	(137)
第十七章	正向与逆向	(141)
第一节	共生逆向联系 I	(141)

第二节	共生逆向联系 II	(144)
第三节	同名逆向联系 I	(146)
第四节	同名逆向联系 II	(149)
第五节	倒易	(151)
第六节	逆推法	(155)
第七节	既成形式法 I	(157)
第八节	既成形式法 II	(160)
第九节	综合法与解析法 I	(162)
第十节	综合法与解析法 II	(165)
第十一节	综合法与解析法 III	(168)
第十二节	试探性与判定性 I	(171)
第十三节	试探性与判定性 II	(173)
第十四节	倒推与对称性	(175)
第十五节	不可解性	(178)
第十六节	待定系数法	(181)
第十七节	反证法 I	(184)
第十八节	反证法 II	(186)
第十八章	定性与定量	(190)
第一节	定性的作用 I	(190)
第二节	定性的作用 II	(192)
第三节	定量的作用	(195)
第四节	定性与定量的联系	(197)
第十九章	有限与无限	(201)
第一节	现实中的有限与无限 I	(201)
第二节	现实中的有限与无限 II	(203)
第三节	由有限到无限 I	(205)
第四节	由有限到无限 II	(208)
第五节	“无限”的作用 I	(211)
第六节	“无限”的作用 II	(214)
第二十章	连接与不连续	(218)
第一节	现实中的连续与不连续 I	(218)

第二节	现实中的连续与不连续 II	(219)
第三节	抽象中的连续与不连续 I	(221)
第四节	抽象中的连续与不连续 II	(223)
第五节	由不连续到连续 I	(224)
第六节	由不连续到连续 II	(226)
第七节	由连续到不连续 I	(228)
第八节	由连续到不连续 II	(231)
参考文献		(234)

第四编 转换技术

概述		(235)
第二十一章 等值替代		(238)
第一节	等值替代的方式 I	(238)
第二节	等值替代的方式 II	(240)
第三节	符号表述的作用 I	(242)
第四节	符号表述的作用 II	(244)
第五节	符号表述的作用 III	(247)
第六节	符号表述的原则	(249)
第七节	符号表述与问题求解 I	(253)
第八节	符号表述与问题求解 II	(256)
第二十二章 等价替代		(261)
第一节	因素替代与对象替代	(261)
第二节	问题替代 I	(264)
第三节	问题替代 II	(267)
第四节	问题替代 III	(270)
第五节	等价替代的基础	(273)
第六节	等价替代的作用 I	(276)
第七节	等价替代的作用 II	(278)
第八节	等价替代的作用 III	(281)

第二十三章 近似替代	(284)
第一节 近似替代概述.....	(284)
第二节 逼近式替代 I.....	(286)
第三节 逼近式替代 II.....	(289)
第四节 对近似替代的要求.....	(291)
第五节 近似替代的作用 I.....	(294)
第六节 近似替代的作用 II.....	(296)
第二十四章 变换	(299)
第一节 变换的涵义.....	(299)
第二节 变与不变的统一.....	(302)
第三节 映射反演变换 I.....	(304)
第四节 映射反演变换 II.....	(308)
第五节 简约型变换 I.....	(311)
第六节 简约型变换 II.....	(313)
第七节 变换与问题求解 I.....	(316)
第八节 变换与问题求解 II.....	(319)
第九节 变换的作用 I.....	(322)
第十节 变换的作用 II.....	(325)
第十一节 变换的作用 III.....	(329)
第二十五章 归约与归范	(332)
第一节 组合型归约 I.....	(332)
第二节 组合型归约 II.....	(335)
第三节 约束型归约.....	(338)
第四节 依从型归约 I.....	(341)
第五节 依从型归约 II.....	(343)
第六节 简化型归约.....	(346)
第七节 转变型归约与限定型归约.....	(348)
第八节 归范.....	(351)
第二十六章 同构	(355)
第一节 什么是同构.....	(355)

第二节	同构的例子	(358)
第三节	同构的作用 I	(362)
第四节	同构的作用 II	(364)
第五节	对偶 I	(367)
第六节	对偶 II	(371)
第七节	广义同构	(375)
第八节	同态	(379)
第二十七章	相似与模拟	(383)
第一节	相似	(383)
第二节	模拟概述 I	(385)
第三节	模拟概述 II	(388)
第四节	精确模拟 I	(391)
第五节	精确模拟 II	(394)
第二十八章	变异	(397)
第一节	系统的表征	(397)
第二节	自由度、变异度与约束	(400)
第三节	变异与因果制约 I	(403)
第四节	变异与因果制约 II	(406)
第五节	变异与替代、变换	(409)
第六节	变异与问题求解	(413)
第七节	约束 I	(416)
第八节	约束 II	(418)
第九节	对称概述	(421)
第十节	对称与必然依从 I	(424)
第十一节	对称与必然依从 II	(426)
第十二节	对称与问题求解 I	(430)
第十三节	对称与问题求解 II	(433)
第十四节	对称的利用 I	(437)
第十五节	对称的利用 II	(440)
参考文献		(444)

第三编 变通技术

概 述

是否承认对立面之间的联系,是否如实地反映存在于两极对立之间的同一性与可转化性,是辩证法同形而上学的一项根本区别。列宁指出:“在旧逻辑中,没有转化,没有发展(概念的和思维的),没有各部分之间的‘内在的必然的联系’,也没有某些部分向另一些部分的‘转化’。”(《哲学笔记》,人民出版社,1974年版,95页)与此相反,“辩证法是一种学说,它研究对立面怎样才能够同一,是怎样(怎样成为)同一的——在什么条件下它们是相互转化而同一的,——为什么人的头脑不应该把这些对立面看做僵死的、凝固的东西,而应该看做活生生的、有条件的、活动的、相互转化的东西。”(同前书,111页)

人类认识所获得的丰硕成果业已证明,处于两极对立之中的事物,在表现出明显的差异与对立的同时,又总是蕴涵着内在的同一性。实际上,也正是由于有了这种内在的同一性,才得以形成稳定的两极对立关系。两极对立总是建立在一定的同一性的基础之上的。

我们知道,在特殊事物中总是存在着普遍的东西;普遍的东西也总是寄寓于特殊事物之中。包含在诸多特殊事物中的一些共同性质决定着相应的普遍类别。正是存在于特殊与普遍之间的这种紧密联系和内在同一性,为特殊与普遍这样一对两极对立提供了存在的基础和依据。在一般存在形态中总是蕴涵着相应极端形态的某种雏形和胚芽;在极端存在形态中又总是更鲜明、更强烈地表现出在一般形态中存在的某些潜隐的属性和联系。微观对象无论怎样明显地有别于通常的宏观物体,它们之间终究仍然存在着深刻的内在同一性。正是因为有了这样的同一性,人们才能通过对微观领域的分析研究,成功地实现了人工核反应过程,造成了惊天动地般的核爆炸,显示出雄伟壮丽的宏观效应。对微观现象领域的认识的深化,为解说众多的宏观现象,揭示大量的宇观奥秘,提供了重要的科学根据。

辩证法不承认有什么绝对的、僵死的、一成不变的对立。“长短相形，高下相倾。”任何现实存在着的矛盾和对立都具有相对的、互为依存的性质。没有特殊就无所谓普遍；没有一般也就不可能有极端形态的存在；没有简单作为对照，复杂也就失去了意义；没有沙粒的微小，也就显不出山岳的高大。两极对立中的任何一方的存在总是与另一方相互比照，以另一方的存在为条件。

“有无相生，难易相成”，简繁相贯，大小相通。两极对立的東西总是紧密联系、相互渗透的。它们是建立在同一性基础之上的对立，是可以实现沟通与转化的对立。我们知道，任何特殊事物都作为相应的普遍事物类别的组成元素，作为它的特定事例和代表而存在着；普遍事物也只能通过大量特殊事物而显示它的存在。一类事物相对于包含在其中的那些不同的事物类型来说，是一种普遍的存在形态；与此同时，它又同其他相近的事物类别一起形成了更具普遍性的事物类别，作为后者的一种特殊形态而存在着。任何一个被认为是极其简单的事物，也总是包含着复杂得难以穷尽的丰富内容；反转过来，无论多么复杂的事物也依然包含着比较简单的方面、成分和要素。简单事物又总是作为相应复杂事物的雏形、环节和单元而发挥作用，同复杂事物处于千丝万缕般的联系与关系之中。沙粒再微小，也总是包含着多得难以数计的基本粒子，展现出丰富多彩、不可穷尽的内容，在基本粒子领域内转化为复杂得无法定量表述的巨大系统。从更为广阔的角度着眼，任何一颗沙粒终究要属于某个更大的体系之中，作为它的一定的组成成分显示出相应的作用。山岳再高大，也具有自身的微细结构，由极其大量的微小单元组合而成。因小可以致大；由大可以化小。凭特殊可以扩展到普遍；据普遍可以回归到特殊。自简单可以组合为复杂；从复杂也可以化解为简单。一切对立着的两极都是彼此渗透、互相贯通，在一定条件下可以相互过渡、生成和转化的。

既然现实世界中的对立的两极都是既对立又统一，彼此联结、互为依存的；那么，很显然，在作为对现实世界反映过程的思维活动中，对于对立着的双方的认识也就必然是相互启发、相互补充、紧密地联系在一起。既然现实存在着的两极对立总是彼此渗透、互相贯通，一极总是以某种原初的、潜隐的形式存在于另一极之中，在适当条件下就会出现向着另一极的转化过程；那么，很显然，认识对立中的一极就应当能够成为认识另一极的合理的起点、牢靠的基石，为对另一极进行分析研究创造极为有利的条件，提供简捷有效的推演途径；关于对立两极的认识就应当是既有所区别，又可以相通的；对于某一极的认识成果就应该能够通过一定的中间环节，有条件地改造、变换、转化为对另一极的认识。人的思维活动作为对现实世界的反映，必然要体现出存在于现实事物中的那些具有普遍意义两极对立的双方之间的联系、渗透与转化关系，思维活动必然是在对两极对立中的双方的认识的相互

比照、启发与印证的作用中,在它们的彼此联结、沟通与转化的过程中得以不断地扩展、完善和深化的。

思维中的变通技术所研究的正是诸如特殊与普遍、一般与极端、简单与复杂、正向与逆向、定性与定量、有限与无限、连续与不连续,这样一些带有普遍性的两极对立双方之间的辩证联系和内在的统一性。考察其中的一方怎样通过各种渠道,经历一系列中间环节与另一方相沟通、相转化;思维如何通过对一方的认识过渡到对另一方的把握,如何借助于对一方的分析推演求得与另一方相关联的思维课题的有效解决,如何在对对立双方的认识的相互启发、相互补充的过程中得以不断扩展,逐步完善和深化的。思维中的变通技术要着力总结与阐发在这些方面存在的一些具有一定普适性的方式、方法和原则,从中概括出某些规律性的东西。总的看来,思维中的变通技术就是辩证法的对立统一规律在思维领域中的体现与具体运用。

眼界狭窄、思路呆板、囿守一隅、不知变通,这是限制思维的灵活性,束缚创造性思维能力,使之难以充分发挥作用的一个主要因素,也是在认识事物、求解问题的过程中出现难以逾越的障碍,陷入走投无路的困境之中的重要原因。从前面提到的那些具有普遍意义的两极对立的一方的考察分析中,过渡到对另一方的认识,则是思维得以灵活地进行转化、变通,以求跨越障碍、攻克难关的一条有效途径。了解存在于这些两极对立的双方之间的深刻的内在联系,掌握在它们之间实现沟通、过渡与转化的各种有效方法,很自然地成为思维技术所要探索的一项主要内容。这也就决定了变通技术在整个思维技术研究中所占有的重要地位。

对于变通技术的深入研究与灵活运用,非常有助于消除那种“刻舟求剑,固而不通;胶柱鼓瑟,拘而不化”的弊病;从而帮助我们在认识事物、求解问题的思维活动中更好地审时度势、通权达变,主动地寻求各种可行的转化变通方式,更快地摆脱困境,找到有效的推演路径。这对于增进智慧,提高思维的灵活性,扩展眼界、广开思路,发展创造性思维能力,也一定能够起到非常显著的作用。

第十四章 特殊与普遍

第一节 由特殊到普遍 I

“池上碧苔三四点，叶底黄鹂一两声。”在繁杂众多、无穷无尽的现实事物中，总是有少量的特殊事物首先为我们所接触、所认知，引起我们的兴趣和关注。无论是人类整体的认识历史，还是特定个体的认识过程，总的看来，都是由对特殊事物的认识逐步扩展到对普遍事物的把握的。如何由对某些特殊事物的考察了解过渡到对另一些特殊事物的认识，进而达到对更为广泛、更具普遍性的事物总体和类别的把握，有关这方面的内容构成了思维技术研究的一个重要课题。特殊与普遍之间的沟通与转化，乃是在各个领域的思维活动中都有着广泛应用的变通方式。

属于同一普遍总体的各特殊个体(元素、成员)大多以这样或那样的方式相互关联着。在它们之间总是表现出一定程度的共同性和相关性，有某种确定的规律性在起作用。我们往往能够通过某些特殊个体的把握，达到对普遍总体的概括认识。

一条曲线作为相应的点的普遍总体，包含着无限多个特殊的点。然而，对于通常的光滑曲线来说，只要确定了一段曲线上的若干个点，就可以利用存在于点与点之间的联系与约束(不存在间断、突变与尖角)把整段曲线大体上描绘出来。这也正是利用数量有限的观测实验结果，通过“内插”来确定因素间相依为变的函数关系的常用方法。同样，一个连续的变化过程包含着无限多个紧密相联、序次相关的即时性的具体存在形态。存在于同一过程中的各个特殊的具体存在形态之间的内在联系，使我们能够通过数量相当有限的个别即时性存在形态的了解，达到对整个过程的普遍认识。

属于某些同一普遍总体的为数众多的特殊个体往往有着相近的属性，在它们之间存在着统计学意义上的相关性。一个城市的居民的文化程度、生活水平、居住条件、健康状况，某一类型的产品的质量，某种动物的平均寿命，在一个地区内的某种农作物的单位面积产量等，都是这方面的具体事例。对于这样一类事物，可以通

过对其中为数较少的特殊事物的考察研究,运用统计学的方法和有关成果,达到对普遍总体的概括认识。

在由一些特殊类别(子类)组成的更为普遍的事物类别中,各个并列子类总是具有某些共同的重要属性。研究了某个特殊的子类,也就为认识其他特殊类别,进而达到对整个普遍类别的把握奠定了基础。在动物学中,如果对鱼类进行了比较详细而深入的研究,也就为进一步认识两栖类、爬行类、鸟类和哺乳类动物,从而达到对整个脊椎类动物的普遍认识创造了有利条件。在解析几何中,对椭圆进行了认真的分析,也就为对抛物线、双曲线的考察,进而达到对整个二次曲线的普遍认识奠定了坚实的基础。诸如此类的首先从对某一子类的分析、考察入手,逐步推演到对其他并列子类的认识,进而达到对整个普遍类别的把握,同样是由特殊到普遍的重要变通形式。通过这种形式,可以使思维和认识循序渐进,由点到面逐步展开来。

通过特殊来认识普遍的方法,在实践活动领域中也有着广泛的应用。众所周知,我们往往没有必要,同时也不大可能对“普遍”进行全面的把握与控制,而大多只能通过对某些“特殊”的了解与监控来达到相应的目的。举例来说,在一个大型电力系统中,我们不可能,同时也没有必要对各个点的电压进行测量和调整。实际的作法只能是在适当选定的几个中枢点上对电压进行监控,使之维持在容许的变化范围之内,从而使各供电点的电压变化不致超出一定的限度。这就是对由特殊来认知和把握普遍的方法的具体运用。

当运用由特殊来认知和把握普遍的方法时,为了取得良好的成效,就有必要遵循某些一般性的原则。对于那些各特殊个体之间显示出内在的规律性联系的普遍总体,被选取出来着重进行考察,首先加以把握的“特殊”,应当是那些同相应的普遍形态有着紧密联系的对象。它们应当包含着尽可能多的有关于普遍的信息,对确定普遍具有重要的价值。因为只有通过这样的特殊,才能达到更准确、更有效地认识和把握普遍的目的。

大家知道,要使电力系统的电压水平普遍地保持在正常的容许范围之内,就应当选取那些最有影响、最具代表性的重要中枢点上的电压进行监测,加以调整;而不能随意地选出对决定整个系统的电压水平显得无关紧要的个别点的电压作为监控的特殊对象。同样,当我们通过若干个单独的点来描绘函数的图像时,如果能够把这个函数的各个极值点、拐点、间断点、不可导的点这样一些对确定函数图像的普遍形态具有重要意义的特殊点首先确定下来,就能够把整个图形更准确地描绘出来。

在有关的众多特殊个体之间具有统计相关性的情况下,作为考察样品而被选

取出来的特殊,应当尽可能地具有代表性,使其能更好地反映普遍的真实性态,体现出更强的客观性,而不受人为因素的影响。例如,当需要通过对少量商品的鉴定来确定市场上出售的某种商品的质量时,进行鉴定的商品(样品)应当从不同生产厂家、不同出厂时间、经过不同运输方式和保管方式的商品中选取出来。如果该商品包含着数种不同的规格和型号,还应当从所有的不同规格和型号中选取样品。倘若不注意样品所具有的代表性,只是在某几种特殊形态中选取样品,所得出的鉴定结果就难以正确反映商品质量的普遍状况和总体水平。

在由对特殊子类的考察逐步过渡到对其他并列子类和相应的普遍类别的认识时,总的来说,应当首先从比较简单、比较熟悉,同时又尽可能多地体现出普遍类别的总体属性,同其他子类有着更密切的联系的特殊子类着手。这样比较容易取得成效,也便于从已有的特殊成果扩展开来,实现由特殊到普遍的过渡。

第二节 由特殊到普遍 II

在特殊事物中总是包含着某些为更普遍的事物类别所共同具有的东西。对特殊事物的分析、考察是探求与之相关的普遍结果的一条非常有用的途径。在某些情况下,容易证明所要探求的东西普遍适用于范围广泛的一类事物,而不受所涉及到的各种特殊事物的具体形态的影响。这样一来,我们就可以选取某种适当的、比较简单的特殊事物作为考察的对象,从中将所要探寻的普遍结果求取出来,起到化繁为简、以简代繁的显著作用。

举例来说,微分学证明,对于任意两个可导函数 u, v , 它们的乘积仍然可导,且其导函数

$$y' = u'v + uv'$$

由此又不难进一步求出

$$\begin{aligned}y'' &= u''v + 2u'v' + uv'' \\y''' &= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''\end{aligned}$$

这很自然地使我们推测,对于任意自然数 n , 也应当有 y 的 n 阶导数

$$y^{(n)} = a_0 u^{(n)} v + a_1 u^{(n-1)} v' + a_2 u^{(n-2)} v'' + \cdots + a_n uv^{(n)} \quad (14-1)$$

成立。其中 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ 是一些与函数 u, v 的具体性态无关的常数。借助于数学归纳法很容易对这一推测作出严谨的证明。

既然常数 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ 的数值与函数 u, v 的具体性态无关,在求取这些常数时也就可以适当选取比较简单的特殊函数来进行推演运算。

实际上,如选 $u = e^x, v = e^{bx}$ (其中 b 为任意常数), 立即可得

$$u^{(m)} = e^x, \quad v^{(m)} = b^m e^{bx},$$

$$y^{(m)} = [e^x e^{bx}]^{(m)} = [e^{(b+1)x}]^{(m)} = (b+1)^m e^{(b+1)x}$$

其中 $m=0, 1, 2, \dots, n$ 。将这一结果运用于式(1), 可得

$$\begin{aligned} (b+1)^n e^{(b+1)x} &= a_0 e^x e^{bx} + a_1 e^x b e^{bx} + a_2 e^x b^2 e^{bx} + \dots + a_n e^x b^n e^{bx} \\ &= e^{(b+1)x} (a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + \dots + a_n b^n) \end{aligned}$$

等号两边消去 $e^{(b+1)x}$, 即有

$$(b+1)^n = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + \dots + a_n b^n$$

将该式与牛顿二项式公式相比较, 立即可知

$$a_k = C_n^k \quad (k=0, 1, 2, \dots, n)$$

于是式(14-1)即可写作

$$(uv)^{(n)} = C_n^0 u^{(n)} v + C_n^1 u^{(n-1)} v' + \dots + C_n^n u v^{(n)}$$

这就是微分学中的莱布尼茨公式。通过对特殊函数 e^x 、 e^{bx} 的推演运算, 相当方便地求出了能够适用于任意可导函数的这一普遍结果。

对于特殊事例的考察是对某些普遍命题进行检验、论证的一条重要途径。举出一个特殊反例, 就可以彻底驳倒有关的普遍命题。这是对某些普遍命题作出否定性论证的常用方法。

在这方面, 不妨让我们举一个数学分析中的例子。大家知道, 对于可导函数 $y=f(x)$, 如果在区间 $[a, b]$, 恒有 $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 必然在 $[a, b]$ 单调增。倒转过来, 这一普遍命题的逆命题, 即“若可导函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 单调增, 则在 $[a, b]$ 内恒有 $f'(x) > 0$ ”, 是否成立呢? 为了回答这一问题, 并不必对可导函数的普遍形态进行推演论证, 而只需要举出一个特定的函数 y , 它在某一区间内单调增, 同时又可以在该区间内找到一点 c , 使其导数 $y'_c = 0$ 。做到这一点, 也就很自然地对这个具有普遍性的逆命题给出了否定性的确凿证明。实际上, 这样的函数是大量存在、很容易列举或构造出来的。例如, 常见的函数 $y=x^3$ 就在 $[-1, 1]$ 单调增, 而当 $x=0$ 时, $y'=3x^2=0$ 。它就是上述普遍命题的一个特殊反例。

用特殊反例对普遍命题和结果进行验证的方法, 也适用于许多思维课题, 特别是数理问题的求解过程。在导出一个三角恒等式后, 可以选用一些特殊的角度进行验算; 得到一个关于三角形的带有普遍性的几何命题之后, 可以首先看一看它对直角三角形、等边三角形、等腰三角形这样一些特殊类型的三角形是否成立; 对于一个涉及到弦的几何定理, 不妨先检查一下它对直径是否真确; 推演出一个代数恒等式后, 可以用 0、1、-1 等特殊数值替代其中的字母进行检验; 在得出一个关于质点运动的普遍结论时, 最好先检查一下它是否能够适用于匀速运动、匀变速运动、直线运动、圆周运动、抛射体运动这样一些比较简单的特殊运动形式。掌握了这种

用特殊来检验普遍的方法,可以帮助我们较为简便地查验出推演和引用中出现的差错,及时地予以排除、作出纠正,不至于在错误的基础上继续进行推演,白白地花费时间和精力。

在用特殊事例对真确性尚有待确立的普遍命题进行验证的活动中,所得出的肯定性结论也同样能够发挥重要作用。虽然由此并不能肯定普遍命题的真确,但却有助于消除与普遍性命题相关的某些疑惑,从而增强我们的信心,激励我们进一步探寻作出严谨证明的途径。同时,通过对特殊事例所作的验证,可以帮助我们进一步把握命题的内容,了解它的性质,达到更深刻、更全面的理解。尤为重要的是,从这样的验证中,还有可能得到某些有益的启示,使我们能够把所考察的特殊事例加以适当的修改、变更,沿某一方向予以展拓、扩充,得出更具普遍性的事例,进而找到作出严谨证明的有效途径。

第三节 由特殊到普遍 III

特殊事例还可以在把握和记忆有关普遍结果方面发挥显著作用。大家知道,关于函数展成幂级数的泰勒公式是比较复杂,难以记忆的。在这方面,作为特殊事例的 n 次多项式

$$P(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \cdots + b_n(x-a)^n \quad (14-2)$$

能够对我们提供明显的帮助。有关这个特殊函数的各阶导数与多项式系数的具体分析,对于把握和记忆泰勒公式可以起到很好的作用。

实际上,将 $P(x)$ 对 x 逐阶求导,可得

$$\left. \begin{aligned} P'(x) &= b_1 + 2b_2(x-a) + 3b_3(x-a)^2 + \cdots + nb_n(x-a)^{n-1} \\ P''(x) &= 2b_2 + 3 \times 2b_3(x-a) + \cdots + n(n-1)b_n(x-a)^{n-2} \\ \cdots \cdots \\ P^{(n)}(x) &= n!b_n \end{aligned} \right\} (14-3)$$

令 $x=a$,代入式(14-2)、式(14-3),立得

$$b_0 = P(a), b_1 = \frac{P'(a)}{1!}, b_2 = \frac{P''(a)}{2!}, \cdots, b_n = \frac{P^{(n)}(a)}{n!}$$

倒转过来,再将这些系数代入式(14-2),即有

$$P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (14-4)$$

这正是泰勒公式的一种特殊形式。