国家教委考试中心审定

GUOJIA JIAOWEI
KAOSHI ZHONGXIN
SHENDING

数学高考能力要求与试题分析

蔡上鹤主编

GUOJIA JIAOWEI KAOSHI ZHONGXIN SHENDING

国家教委考试中心　审定

数　学

高考能力要求与试题分析

蔡上鹤　主编

湖南教育出版社
浙江教育出版社
1997 年 8 月

出 版 说 明

本编委会按照国家教委关于改革考试评估制度的精神和国家教委考试中心制订的各科《考试说明》的要求，于 1993 年编写了这套丛书，当时曾经国家教委考试中心审定，1993 年至 1995 年在广东高等教育出版社出版。

现本丛书编委会将原书稿转到浙江教育出版社出版，同时应读者要求增补了 1996 年度和 1997 年度高考试题的分析。

《高考能力要求与试题分析》
编　委　会

内 容 简 介

《高考能力要求与试题分析》丛书包括语文、数学、英语、物理、化学、历史、地理共七种。这是一套力求体现国家教委考试中心制定的考试说明的书；这是一套供高考考生以试题为线索进行总复习的书；这是一套基本覆盖各科知识内容的书；这是一套注重阐述各科能力要求的书；这是一套让考生在有限时间内获得最佳复习效果的书。

这套书由中学各科教材专家主编，由国家教委考试中心审定，对考生的总复习能起有效的指导作用，对中学的教学能起正确的引导作用。

《数学》包括三个部分：第一部分为数学高考要求与试题解析，通过对 80 年代以来高考中典型的选择题、填空题和解答题进行具体分析，提供解题思路和评注，指出该题目的难度层次和学生思维容易受阻之处，使学生真正体会到考试内容和要求。第二部分精选了四份数学自测试卷（理工农医类、文史类各两份），并进行解答分析，提供评分标准，第三部分列出了 1997 年及 1996 年数学高考试卷，介绍数学高考应试诀窍，以及分析 1997 年数学高考试题对数学思想方法的考查，使学生作好应试准备和把握考试发展趋向。

高考应注重考能力

（代　序）

国家教委考试中心主任　杨学为

国家教委决定，高中毕业会考后，高考要注重考能力。

我以为，知识是前人认识世界的结果，能力是运用已知的知识，去分析、解决（对考生来说）未知的问题，并获取新知识。我们并不排斥考查知识，相反，我们认为知识是能力的基础。但是，获取知识并不是我们的目的，能够运用获取来的知识去分析、解决问题才是我们的目的。正如毛泽东同志所说的，“马克思主义的哲学认为十分重要的问题，不在于懂得了客观世界的规律性，因而能够解释世界，而在于拿了这种对于客观规律性的认识去能动地改造世界”。所以，我们反对死记硬背，反对题海战术——因为死记硬背、题海战术不是提高能力，而是能力的“异化”。

在科举考试千余年中，反复争论的一个重要问题，就是注重考能力，还是单纯考知识。能否注重考能力，是考试兴衰的标志，它决定着考试自身的命运。毛泽东批评高考，其中一个重要方面就是死记硬背。

在考试史的长河中，越来越多的人认识到考能力的重要。但真正困难的还不是要不要注重考能力，而是如何才能切实做到注重考能力。这涉及到：什么是知识，什么是能力；高考（各学科）应考哪些能力；能力要求如何分层次；用什么题型体现这些要求；评卷（尤其是论述题）如何符合命题的要求，如何控制评分的误差；在大规模考试中，如何考实践能力，等等。我们希望一切关心高考的同志，特别是科研工作者，帮助我们研究解决。

高考注重考能力，必须有考生的复习以及中学的教学相配合。我们希望高考考生以及在校中学生，认真打好基础，注重提高分析问题和解决问题的能力。为此，我们支持有丰富经验的教研人员编写《高考能力要求与试题分析》丛书。我们希望这套书以及类似的书，有助于改进考生的复习和中学的教学，有助于克服在高考复习中长期存在的死记硬背与题海战术。

目　录

第一部分
数学高考要求与试题解析

第二部分
数学自测试卷和解析

第三部分
1997 年及 1996 年数学高考试卷和解析

第一部分　数学高考要求与试题分析

（甲）代　　数

一、幂函数、指数函数和对数函数

（一）考试内容和考试要求

1. 考试内容

集合．子集、交集、并集、补集．

映射．函数（函数的记号、定义域、值域）．

幂函数．函数的单调性．函数的奇偶性．

反函数．互为反函数的函数图象间的关系．

指数函数．对数函数．换底公式．简单的指数方程和对数方程．

2. 考试要求

（1）理解集合、子集、交集、并集、补集的概念．了解空集和全集的意义，了解属于、包含、相等关系的意义，能掌握有关的术语和符号，能正确地表示一些较简单的集合．

（2）了解映射的概念，在此基础上理解函数及其有关的概念，掌握互为反函数的函数图象间的关系．

（3）理解函数的单调性和奇偶性的概念，并能判断一些简单函数的单调性和奇偶性，能利用函数的奇偶性与图象的对称性的关系描绘函数图象．

（4）掌握幂函数、指数函数、对数函数的概念及其图象和性质，并会解简单的指数方程和对数方程．

（二）能力考查评析

1. 集合

（1）地位作用

第一，“集合”是数学研究的基本对象之一．学习集合的概念，有助于理解事物间的逻辑关系和对应关系，加深对数学的抽象特征的理解，也能提高使用数学语言的能力．

集合涉及到的对象很广．一些数，一些代数式，一些点，一些图形，……凡能看作一个整体的各个对象的总和都形成集合．因此，集合的知识与数学各分支例如代数、解

析几何、立体几何，平面几何以及高等数学、近代数学都有密切联系．

第二，高考试题中，对集合从两个方面进行考查，一方面是考查对集合概念的认识和理解水平，如对集合中涉及的特定字母和符号，元素与集合间的关系，集合与集合间的比较，主要表现在对集合的识别和表达上．另一方面，则是考查学生对集合知识应用的水平，如求方程组、不等式组及联立条件组的解集，以及设计、使用集合解决问题等.

（2）能力要点

第一，准确使用数学语言的能力．

数学语言主要包括字（以及字母）、词、语句（包括算式或其他符号语句）、逻辑关联成分，以及表达特定数学含义的图形等．

例如，对于给定的集合 A，B，关系 $A\subseteq B$ 的含义是“对任意 $x\in A$，都有 $x\in B$”，而关系 $A\subset B$ 则表示“对任意 $x\in A$，都有 $x\in B$，且存在 $y\in B$，$y\notin A$”．因此 $A\subseteq B$ 与 $A\subset B$ 是有差别的．又如集合 $\{x|x=2k-1, k\in N\}$ 与 $\{x|x=2k+1, k\in N\}$ 是有区别的，前者表示自然数中全体奇数的集合，后者则表示 $\{3, 5, 7, \cdots\}$．此外，像集合 $\{(x, y)|x^2+y^2=r^2, x, y, r\in R\}$ 与集合 $\{r|x^2+y^2=r^2, x, y, r\in R\}$ 之间，集合 $\left\{\alpha\middle|\alpha=2k\pi+\frac{\pi}{6}, k\in \mathrm{Z}\right\}$ 与集合 $\left\{\alpha\middle|\alpha=2k\pi-\frac{\pi}{6}, k\in \mathrm{Z}\right\}$ 之间，集合 $\left\{(x, y)\middle|\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1\right\}$ 与集合 $\left\{z\middle||z-\sqrt{5i}|+|z+\sqrt{5i}|=6, z\in C\right\}$ 之间，都有一定差异．这些差异只有在我们能正确使用数学语言后才能加以区分．

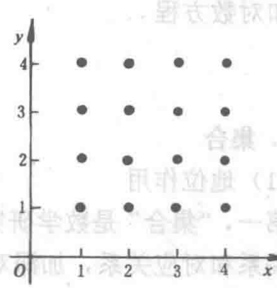
第二，数形结合的能力．

有些集合可以用图形表示出来．恰当地利用图形，有助于解决关于集合的问题．

例如，设集合 $M=\{0, 1, 2, 3, 4\}$，$P=\left\{x\middle|x=\frac{b-d}{a-c}, a, b, c, d\in M, 且 a\neq c\right\}$，求证 $M\cap P=M$.

分析：首先要弄清集合 P 的元素．但是，由于 P 中描述部分的内容与集合 M 有关，又含有四个独立取值的参数 a，b，c，d，所以 P 中的元素究竟是些什么并不明显．如果套用排列、组合公式或加法原理、乘法原理，也很可能形成重复或遗漏．

考虑到在 xOy 平面内，当 $a\neq c$ 时，$\frac{b-d}{a-c}$ 表示点 (c, d) 与点 (a, b) 所在直线的斜率，利用斜率的几何意义，不难看出集合 P 中的元素是图一甲-1 中的 25 个整点的集合 $\{(0,0),(0,1),(0,2),\cdots,(3,4),(4,4)\}$ 中任意两个点所在直线的斜率．这样的两点不在与 y 轴平行的直线上．



图一甲-1

根据 P 中元素的几何意义，不难由图一甲-1 中看出，$P=\left\{0, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{3}{4}, \pm1, \pm\frac{4}{3}, \pm\frac{3}{2}, \pm2, \pm3, \pm4\right\}$.

由此知　$P\cap M=\{0, 1, 2, 3, 4\}=M$.

（3）考查方式

第一，用列举法给出集合的元素，要求根据交集、并集、补集的定义找出所求的集合．

例 1（1994 年理工农医类试题）

选择题：设全集 $I=\{0, 1, 2, 3, 4\}$，集合 $A=\{0, 1, 2, 3\}$，集合 $B=\{2, 3, 4\}$，则 $\overline{A}\cup\overline{B}=$

(A) $\{0\}$　　(B) $\{0, 1\}$

(C) $\{0, 1, 4\}$　　(D) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

分析：要求 $\overline{A}\cup\overline{B}$，必须先分别求出 $\overline{A}$，$\overline{B}$. 再根据并集的定义得到 $\overline{A}\cup\overline{B}$.

由已知可得 $\overline{A}=\{4\}$，$\overline{B}=\{0, 1\}$．

由此，$\overline{A}\cup\overline{B}=\{0, 1, 4\}$．

故本题应选（C）．

例 2（1995 年文史类试题）

选择题：已知全集 $I=\{0, -1, -2, -3, -4\}$，集合 $M=\{0, -1, -2\}$，$N=\{0, -3, -4\}$，则 $\overline{M}\cap N=$

(A) $\{0\}$　　(B) $\{-3, -4\}$

(C) $\{-1, -2\}$　　(D) $\varnothing$

分析：本题仍是考查交集、并集、补集等集合的基本概念，由题意可知 $\overline{M}=\{-3, -4\}$，于是 $\overline{M}\cap N=\{-3, -4\}$．

故本题应选（B）．

第二，用描述法给出集合中的元素，要求通过集合的有关知识以及其他数学知识解题．解题时要考虑数形结合、等价转化等数学思想．

例 3（1996 年理工农医类试题）

选择题：已知全集 $I=N$，集合 $A=\{x|x=2n, n\in N\}$，$B=\{x|x=4n, n\in N\}$，则

(A) $I=A\cup B$　　(B) $I=\overline{A}\cup B$

(C) $I=A\cup\overline{B}$　　(D) $I=\overline{A}\cup\overline{B}$

分析：要解本题，需弄清集合 N，A，$\overline{A}$，B，$\overline{B}$ 各是怎样的集合，它们的元素各是什么．

由此，

$$N=\{1,2,3,4,\cdots,n\}\quad(n\in N),$$

$$A=\{2,4,6,8,\cdots,2n\}\quad(n\in N),$$

$$\overline{A}=\{1,3,5,7,\cdots,2n-1\}\quad(n\in N),$$

$$B=\{4,8,12,\cdots,4n\}\quad(n\in N),$$

$$\overline{B}=\{1,2,3,5,6,7,\cdots,2n-1,2n,2n+1\}\quad(n\in N).$$

显然，$A\cup\overline{B}=\{1, 2, 3, 4, 5, \cdots, n\}$，即 $I=A\cup\overline{B}$.

故本题应选（C）．

例 4（1993 年理工农医类试题）

选择题：集合 $M=\left\{x \middle| x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in Z\right\}$，$N=\left\{x \middle| x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2},k\in Z\right\}$，则

(A) $M=N$　　(B) $M\supset N$

(C) $M\subset N$　　(D) $M\cap N=\varnothing$

分析：从本题的已知条件 $k\in Z$ 入手进行考虑，因为 $k\in Z$，则有 k 是奇数即 $k=2n+1$（或 $k=2n-1$）和 k 是偶数即 $k=2n$ 这两种情况．

对于集合 M 中的元素 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$，$k\in Z$，即

$$x_M=\frac{(2k+1)\pi}{4},\ k\in Z,$$

这就是说，对于任意整数 k，$\frac{(2k+1)\pi}{4}$的分子永远是 π 的奇数倍．

而集合 N 中的元素

$$x_N=\frac{(k+2)\pi}{4},\ k\in Z,$$

即分子 $(k+2)\pi$ 可能是 π 的奇数倍，也可能是 π 的偶数倍．

经过以上的分析，可以看出：当 $k+2$ 是奇数时，集合 N 中的元素和集合 M 中的元素相同；当 $k+2$ 是偶数时，集合 N 中的相应元素不在集合 M 中．

这就是说，集合 M 中的元素都是集合 N 中的元素，而集合 N 中有些元素（不只一个）不是 M 中的元素．

根据子集的定义可知，此题应选（C）．

说明：对于两个集合间的关系（相等、不相等、包含、被包含）的判断，只能从集合中的元素个数（或性质）入手．解题时要抓住这一关键进行分析．另外，对于 $k\in Z$ 这一已知条件，一定要注意从奇数和偶数两方面分别考虑．

例 5（1995 年理工农医类试题）

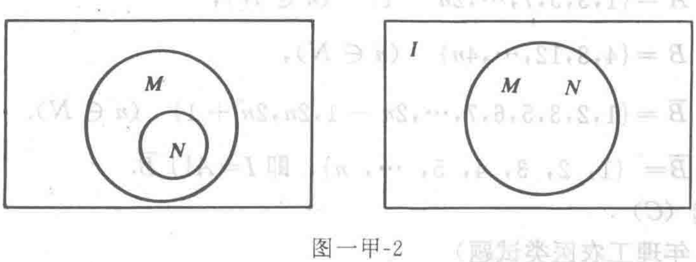
选择题：已知 I 为全集，集合 M，$N\subset I$，若 $M\cap N=N$，则

(A) $\overline{M}\supseteq\overline{N}$　　(B) $M\subseteq\overline{N}$

(C) $\overline{M}\subseteq\overline{N}$　　(D) $M\supseteq\overline{N}$

分析：这道题考查考生对集合的子、交、并、补和全集的概念及其之间关系的掌握情况．

已知条件有两个：其一是 M，$N\subset I$，它告诉我们 M，N 都是全集 I 的真子集；其二是 $M\cap N=N$．对于这一条件，要注意 M，N 之间有两种可能，即 $M\supset N$ 或 $M=N$．这两个已知条件可以用下面的文氏图表示：



图一甲-2

从图一甲-2（1）中可以看出$\overline{M}\subset\overline{N}$（$M\supset N$）；

从图一甲-2（2）中可以看出$\overline{M}=\overline{N}$（$M=N$）．

而从题目的已知条件可知，以上两种情况都有可能产生，即$\overline{M}\subseteq\overline{N}$．

因此，此题应选（C）．

说明：用文氏图表示集合及其子集、交集、并集、补集和它们之间的关系，这是常用的分析问题的方法．它把抽象的思维方式转化为直观的形象思维方式，这对我们思考问题、解决问题是一种有效简捷的方法．

例 6（1990 年理工农医类试题）

选择题：设全集$I=\{(x,y)\mid x,y\in R\}$，集合$M=\left\{(x,y)\left|\dfrac{y-3}{x-2}=1\right.\right\}$，$N=\{(x,y)\mid y\neq x+1\}$，那么$\overline{M\cup N}$等于

（A）$\varnothing$　　　　（B）$\{(2,3)\}$

（C）$(2,3)$　　　　（D）$\{(x,y)\mid y=x+1\}$

分析：本题既考查了有关集合相互关系的基础知识，也考查了集合的表示方法．选择项（C）仅表示平面直角坐标系内的一个点，它不是集合，为此（C）被排除．

由解析式$\dfrac{y-3}{x-2}=1$可知$x\neq2$，且$y\neq3$，即$(2,3)\notin M$，故$(2,3)\in\overline{M}$．同样，由$y\neq x+1$，可知所有$(x,x+1)$都是集合N中的元素，即平面内除去直线$y=x+1$上的点外，其余的点都是集合N中的元素．

于是，平面内除去点$(2,3)$外都是$M\cup N$的元素．因此$\overline{M\cup N}=\{(2,3)\}$．另外，由$\overline{M}\cap\overline{N}=\overline{M\cup N}$，也可以得到同样的结论．

故本题应选（B）．

例 7（1991 年理工农医类试题）

选择题：设全集为R，$f(x)=\sin x$，$g(x)=\cos x$，$M=\{x\mid f(x)\neq0\}$，$N=\{x\mid g(x)\neq0\}$，那么集合$\{x\mid f(x)\cdot g(x)=0\}$等于

（A）$\overline{M}\cap\overline{N}$　　　　（B）$\overline{M}\cup N$

（C）$M\cup\overline{N}$　　　　（D）$\overline{M}\cup\overline{N}$

分析：必须明白，要使$f(x)\cdot g(x)=0$，只需$f(x)=0$或$g(x)=0$即可．而当$f(x)=0$时，有$\overline{M}=\{x\mid f(x)=0\}$；当$g(x)=0$时，有$\overline{N}=\{x\mid g(x)=0\}$．显然，如果$f(x)\cdot g(x)=0$成立，必有$\{x\mid f(x)\cdot g(x)=0\}=\overline{M}\cup\overline{N}$．于是本题应选（D）．

说明：从以上几个例题不难看出，高考中考查集合的有关知识，重在基础知识和基本概念的灵活运用．为此平时学习要加强这方面的训练．

2. 函数的定义、图象与性质

（1）地位作用

第一，在数学中，函数是一个重要而基本的概念．以集合、对应为基本观点建立起来的映射与函数的概念，较好地表达了函数的本质属性．抽象出来的函数记号，函数的单调性、奇偶性以及周期性等性质，已成为研究具体函数的工具．另一方面，各种基本初等函数，用基本初等函数通过运算或复合而形成的其他初等函数，以及大家比较熟悉

的某些特殊函数，又是研究各种复杂函数的基础．因此，函数的基础知识在数学中所占的地位十分重要．

从高中代数教科书看，包括反三角函数在内的函数的内容占了代数总课时的一半以上．因而在历届高考试题中，函数题目占了较大的比重．

第二，高考试题中，对函数的考查主要表现在函数记号，函数值，函数的单调性、奇偶性、周期性等基本性质，以及函数图象的基础知识上．

(2) 能力要点

一是对于抽象记号的理解、运用能力，二是运算能力，三是数与形结合的能力，四是动态分析能力．

例如，1991 年全国理工农医类试题中有一道选择题：如果奇函数 $f(x)$ 在区间 $[3,7]$ 上是增函数，且最小值是 5，那么 $f(x)$ 在区间 $[-7,-3]$ 上是

(A) 增函数且最小值是 -5

(B) 增函数且最大值是 -5

(C) 减函数且最小值是 -5

(D) 减函数且最大值是 -5

这道题就较好地体现了上述能力要求．首先，函数 $f(x)$ 是以抽象形式给出来的，解题者找不到 $f(x)$ 的具体表达式．另一方面，题目条件中包含了“最小（大）值”、“增函数”、“奇函数”这样一些重要概念．这就要求解题者既要搞清这些概念，又要善于分析函数的性质．解题中，应当抓住以下几个要点：

第一，区间 $[3,7]$ 与区间 $[-7,-3]$ 在数轴上关于原点对称．根据奇函数的图象关于原点的对称性知，$f(x)$ 在 $[3,7]$ 及 $[-7,-3]$ 上的单调状况相同，即 $f(x)$ 在 $[-7,-3]$ 上也是增函数．

第二，因为函数 $f(x)$ 在 $[3,7]$ 上是增函数，且最小值是 5，所以 $f(3)=5$．

第三，根据 $f(x)$ 是奇函数的条件，可知 $f(-3)=-5$，且 -5 是该函数在 $[-7,-3]$ 上的最大值．

由以上三点，可知应选 (B)．

这样的选择题，计算量不大，概念性较强，又考查了函数的整体性质（奇函数）和局部性质（在某点处的函数值），是一道好题．

(3) 考查方式

第一，函数的基本性质即函数的奇偶性、单调性、周期性和函数的图象变化（平移或对称），以及相关联的知识．

例 8（1992 年高考试题）

选择题：如果函数 $f(x)=x^2+bx+c$ 对于任意实数 t 都有 $f(2+t)=f(2-t)$，那么

(A) $f(2)<f(1)<f(4)$ (B) $f(1)<f(2)<f(4)$

(C) $f(2)<f(4)<f(1)$ (D) $f(4)<f(2)<f(1)$

分析：这道题表面上是考查函数值的大小比较，实际是考查二次函数图象及二次函数的单调性．解这道题的关键是对已知条件“对于任意实数 t 都有 $f(2+t)=f(2-t)$”的认识和理解．这个条件告诉我们：二次函数 $f(x)=x^2+bx+c$ 的图象关于直线 $x=2$

对称．由这一点出发，可以得出 $f(2)$ 是 $f(x)$ 的最小值（因为 $f(x)=x^2+bx+c$，$a=1>0$，抛物线开口向上，抛物线对称轴与抛物线的交点是抛物线的最低点，这一点的函数值是函数的最小值）．有了上述认识，我们就排除了（B），（D）两个选择项，剩下的问题就是 $f(1)$ 与 $f(4)$ 的大小比较了．从二次函数的图象可知：

∵ $|2-1|<|4-2|$（即 1 与 2 的距离小于 4 与 2 的距离），

∴ $f(1)<f(4)$．

于是有 $f(2)<f(1)<f(4)$．因此应选（A）．

如果此题用下面的方法解，也是可以的，但显得烦琐耗时．

先根据 $f(2+t)=f(2-t)$ 得到 $b=-4$，则 $f(x)=x^2-4x+c$．

再分别求得

$$f(1)=-3+c,$$
$$f(2)=-4+c,$$
$$f(4)=0+c.$$

于是对于任意的常数 c，有 $f(2)<f(1)<f(4)$．因此应选（A）．

说明：二次函数是中学阶段学习的函数知识中的重要基础内容，它几乎囊括了除周期性以外所有的函数基本性质．学好二次函数的有关知识，掌握好二次函数图象的形状及其变化规律，是学好其他初等函数的基础．

例 9（1994 年高考试题）

选择题：定义在$(-\infty,+\infty)$上的任意函数 $f(x)$都可以表示成一个奇函数 $g(x)$和一个偶函数 $h(x)$之和．如果 $f(x)=\lg(10^x+1)$，$x\in(-\infty,+\infty)$，那么

（A）$g(x)=x$，$h(x)=\lg(10^x+10^{-x}-2)$

（B）$g(x)=\frac{1}{2}[\lg(10^x+1)+x]$，$h(x)=\frac{1}{2}[\lg(10^x+1)-x]$

（C）$g(x)=\frac{x}{2}$，$h(x)=\lg(10^x+1)-\frac{x}{2}$

（D）$g(x)=-\frac{x}{2}$，$h(x)=\lg(10^x+1)+\frac{x}{2}$

分析：对这道题，我们容易一开始就选（C）或（D）．其中（C），（D）中的 $g(x)$ 分别是 $\frac{x}{2}$ 和 $-\frac{x}{2}$，它们都是奇函数，这一点没有问题了．然而 $\lg(10^x+1)-\frac{x}{2}$ 与 $\lg(10^x+1)+\frac{x}{2}$ 哪一个是偶函数，这还需要进一步判断．

先看 $h(x)=\lg(10^x+1)+\frac{x}{2}$，则

$$\begin{aligned}h(-x)&=\lg(10^{-x}+1)+\left(\frac{-x}{2}\right)\\&=\lg\left(\frac{1+10^x}{10^x}\right)-\frac{x}{2}\\&=\lg(1+10^x)-\lg(10^x)-\frac{x}{2}\\&=\lg(1+10^x)-x-\frac{x}{2}\\&=\lg(10^x+1)-\frac{3x}{2}\neq h(x),\end{aligned}$$

所以（D）中 $h(x)=\lg(10^x+1)+\frac{x}{2}$ 不是偶函数．因而选择项（D）是错误的．

再看 $h(x)=\lg(10^x+1)-\frac{x}{2}$，则

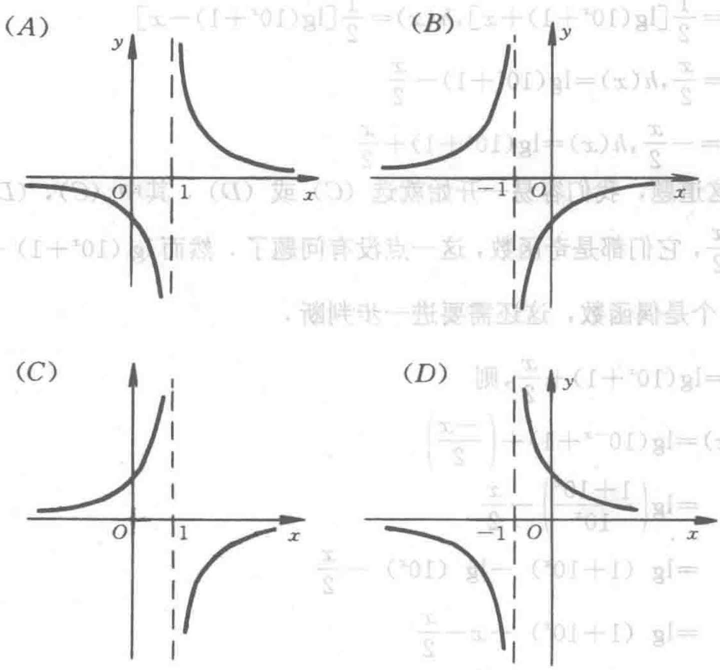
$$
\begin{aligned}
h(-x)&=\lg(10^{-x}+1)+\frac{x}{2}\\
&=\lg(10^x+1)-x+\frac{x}{2}\\
&=\lg(10^x+1)-\frac{x}{2}=h(x),
\end{aligned}
$$

即 $h(x)=\lg(10^x+1)-\frac{x}{2}$ 是偶函数．于是，我们选（C），即这道题的正确答案应该是（C）．

说明：对这类选择题，在求解时要仔细审一审题，如果一个选择项、一个选择项地试，那就费时费事了．实际上，在选择项（A）中，尽管 $g(x)$ 是奇函数，$h(x)$ 是偶函数，但是 $g(x)+h(x)=x+\lg(10^x+10^{-x}-2)=\lg 10^x+\lg(10^x+10^{-x}-2)=\lg(10^{2x}+1-2\cdot 10^x)\neq\lg(10^x+1)=f(x)$．而选择项（$B$）中，$g(x)=\frac{1}{2}[\lg(10^x+1)+x]$，则 $g(-x)=\frac{1}{2}[\lg(10^{-x}+1)-x]=\frac{1}{2}[\lg(10^x+1)-2x]\neq-g(x)$．所以，选择项（$A$），（$B$）都是错的．解这道题时，要根据题意，应用函数的奇偶性直接推断（C），（D）哪个正确（即避开（A），（B））．

例 10（1995 年理工农医类试题）

选择题：函数 $y=-\frac{1}{x+1}$ 的图象是



图一甲-3

分析：本题主要考查函数图象平移的有关知识．函数 $f(x+m)$ 的图象可由函数 $f(x)$的图象沿 x 轴左右平移得到：函数 $f(x+m)$ 的图象当 $m>0$ 时可由 $f(x)$ 的图象沿 x 轴向左平移 m 个单位长度得到，当 $m<0$ 时可由 $f(x)$的图象沿 x 轴向右平移$|m|$个单位长度得到．本题中 $y=-\frac{1}{x+1}$可以看作当 $f(x)=-\frac{1}{x}$时，函数 $f(x)$ 变为 $f(x+1)$的情况，即 $y=-\frac{1}{x+1}$的图象可由 $y=-\frac{1}{x}$沿 x 轴向左平移 1 个单位长度得到．函数 $y=-\frac{1}{x}$是在第二、四象限内的两支等轴双曲线，把它向左平移 1 个单位长度．为此，本题应选 (B)．

说明：中学阶段函数图象的变换，主要是平移和对称．对于这部分知识，首先要牢记几种初等函数的图象，其次就是要会熟练地把函数的解析式进行变形．想一想：本题如果要求找到函数 $y=-\frac{ax+b}{x+1}$的图象（a，b 是常数），应该把函数 $y=-\frac{1}{x}$的图象怎样平移？

例 11（1996 年高考试题）

选择题：设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数，$f(x+2)=-f(x)$，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x$，则 $f(7.5)$ 等于

(A) 0.5　　　　(B) -0.5

(C) 1.5　　　　(D) -1.5

分析：如何使用好本题的三个已知条件，是解决此题的关键，这就要求我们把 7.5 转化为区间 $[0,1]$ 上的一个数．在转化时要注意 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是一奇函数，$f(x+2)=-f(x)$，当 $x\in[0,1]$ 时 $f(x)=x$.

解法一：由已知可得

$$f(7.5)=f(5.5+2)=-f(5.5),$$

$$f(5.5)=f(3.5+2)=-f(3.5),$$

$$f(3.5)=f(1.5+2)=-f(1.5),$$

$$f(1.5)=f(-0.5+2)=-f(-0.5).$$

于是　$f(7.5)=f(-0.5)$

而 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是奇函数，故有

$$f(-0.5)=-f(0.5).$$

而当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x$，即

$$f(0.5)=0.5.$$

$$\therefore\quad f(-0.5)=-0.5.$$

$$\therefore\quad f(7.5)=f(-0.5)=-0.5.$$

因此，本题应选 (B).

解法二：由已知 $f(x+2)=-f(x)$，可以把 2 看作 $f(x)$ 的周期．于是

$$f(7.5)=f[(-0.5)+4\times 2]=f(-0.5)=-f(0.5),$$

即 $$f(7.5)=-0.5.$$

本题应选（B）.

说明：准确地理解和运用已知条件，把它有机地转化为需知与所求，这里必须要有正确的逻辑思维方法，这也是考查对所学数学知识的掌握情况的重要方面.

第二，反函数，一个函数有反函数的条件，互为反函数的两个函数图象间的关系.试题中主要涉及求已知函数的反函数，或者求反函数在某些点处的函数值，描绘互为反函数的函数图象.

例 12（1991 年文史类试题）

选择题：已知函数 $y=\frac{6x+5}{x-1}$（$x\in R$，且 $x\neq 1$），那么它的反函数为

（A）$y=\frac{6x+5}{x-1}(x\in R,\text{且 } x\neq 1)$

（B）$y=\frac{x+5}{x-6}(x\in R,\text{且 } x\neq 6)$

（C）$y=\frac{x-1}{6x+5}\left(x\in R,\text{且 } x\neq -\frac{5}{6}\right)$

（D）$y=\frac{x-6}{x+5}(x\in R,\text{且 } x\neq -5)$

分析：求一个已知函数的反函数，其一般步骤是：

（1）由已知函数的定义域和解析式，确定这个已知函数的值域.

（2）把已知函数的解析式变形，用函数 y 的代数式表示自变量 x，得到反函数的解析式.

（3）用 y 表示反函数，用 x 表示反函数的自变量，从而得到所求的反函数.

（4）确定反函数的定义域.

解：∵ $y=\frac{6x+5}{x-1}$（$x\in R$，且 $x\neq 1$），

∴
$$xy-y=6x+5,$$
$$xy-6x=y+5,$$
$$(y-6)x=y+5,$$
$$x=\frac{y+5}{y-6}(y\in R,\text{且 } y\neq 6).$$

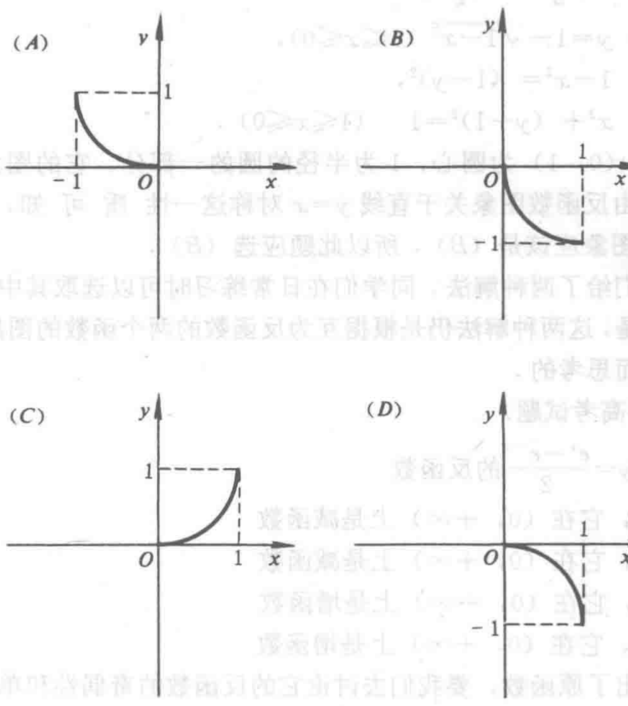
故所求的反函数为

$$y=\frac{x+5}{x-6}(x\in R,\text{且 } x\neq 6).$$

即本题应选（B）.

例 13（1994 年高考试题）

选择题：设函数 $f(x)=1-\sqrt{1-x^2}$ $(-1\leqslant x\leqslant 0)$，则函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象是



图一甲-4

分析：这道题是求已知函数 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 的图象．求一个函数的反函数，务必要考虑原函数的定义域．就是在解题时，必须首先弄清要求原函数在什么区间上的反函数．这是解这类问题的基本思路．

解法一：由已知条件 $f(x)=1-\sqrt{1-x^2}$ $(-1\leqslant x\leqslant 0)$，知原函数的定义域是 $[-1,0]$，这就是说，反函数的值域应该是 $[-1,0]$．为此四个选择项中应排除 (A)，(C)．但是究竟选 (B) 还是选 (D)，我们还要进一步推断．

$\because$ $y=f(x)=1-\sqrt{1-x^2}$ $\quad (-1\leqslant x\leqslant 0)$，

$\therefore$ $\sqrt{1-x^2}=1-y$，$\quad 1-x^2=(1-y)^2$，

$x^2=1-(1-y)^2$，

$x=-\sqrt{1-(1-y)^2}$，（注意负号的选择）

即 $f^{-1}(x)=-\sqrt{1-(1-x)^2}$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$．为了确定究竟选 (B) 还是选 (D)，我们采用求反函数在某一点的函数值的办法．

令 $y=f^{-1}(x)=-\sqrt{1-(1-x)^2}$ 中的 $x=\dfrac{1}{2}$，即

$$y_0=f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=-\sqrt{1-\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

由此可知 $P_0\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 是 $f^{-1}(x)$ 上的点，从四个选择项的图象上可以看出 y_0