矩阵偏序与矩阵分解

刘晓冀　王宏兴　著

科学出版社

矩阵偏序与矩阵分解

刘晓冀　王宏兴　著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

矩阵分解在偏序理论中有着极其重要的作用. 本书应用奇异值分解、核心-幂零分解、Hartwig-Spindelböck 分解等矩阵分解讨论矩阵偏序研究中的若干问题. 主要研究内容包括特殊矩阵的偏序、矩阵及其平方矩阵的星序、Sharp 序、Core 序、矩阵偏序与秩以及矩阵偏序与广义逆的反序律等.

本书可以作为研究生和从事矩阵偏序研究的科技工作者的参考资料.

图书在版编目(CIP)数据

矩阵偏序与矩阵分解/刘晓冀, 王宏兴著. —北京: 科学出版社, 2016.3

ISBN 978-7-03-047820-7

Ⅰ. ①矩…　Ⅱ. ①刘…　②王…　Ⅲ. ①矩阵论　Ⅳ. ①O151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 056494 号

责任编辑: 赵彦超　胡庆家 / 责任校对: 钟　洋
责任印制: 张　伟 / 封面设计: 迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京东华虎彩印刷有限公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2016 年 3 月第　一　版　开本: 720 × 1000　B5
2016 年 3 月第一次印刷　印张: 9
字数: 178 000

定价: 58.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　言

在矩阵论中研究最早的是 Löwner 序, 它是由德国数学家 Löwner 在 1934 年提出的, 之后有许多数学家研究了这种偏序的性质和刻画, 并在统计中得到了广泛的应用. 1976~1978 年, Drazin 研究了半群中幂等元素的自然偏序, 在半群、结合环中引进了 $*$ 序的定义; 1980 年, Hartwig 将此推广为利用元素的 $\{1,2\}$–逆来确定正则半群的偏序; 2010 年, Baksalary 与 Trenkler 研究了复矩阵的 Core 序. 由于矩阵偏序在数理统计、矩阵不等式中的作用, 矩阵偏序的理论成为近年来广义逆研究的一个热点.

作者长期从事矩阵偏序问题的研究, 发现矩阵分解是处理矩阵偏序问题的一个强有力的工具. 本书介绍了多种矩阵分解, 并给出了其在矩阵偏序问题研究领域的一些应用. 内容编排如下: 第 1 章线性代数的若干基本知识; 第 2 章特殊矩阵的偏序; 第 3 章矩阵及其平方矩阵的偏序; 第 4 章 Sharp 序; 第 5 章 Core 序; 第 6 章矩阵偏序与秩; 第 7 章矩阵偏序与广义逆的反序律.

由于关于广义逆和偏序问题研究的文献非常丰富, 本书不可能包括所有的文献, 而主要包括最新的和最精练的内容, 而且列出的参考文献也不太全面. 因此对于做了很多这方面的工作但未列入参考文献的作者, 在这里表示歉意.

作者在编写本书时, 得到上海师范大学魏木生教授、复旦大学魏益民教授、东南大学陈建龙教授的鼓励和支持, 并提出了很多建设性的意见和建议, 作者在此深表谢意.

本书的编写和出版得到国家自然科学基金 (11361009,11401243)、广西自然科学基金 (2013GXNSFAA019008)、中国博士后基金 (2015M581690) 以及广西民族大学在物力和资金上的大力支持.

由于本人水平的限制, 书中难免有错误和不妥之处, 希望读者能及时指出, 便于以后纠正.

刘晓冀
广西民族大学
2016 年 1 月

符　号　表

- $\mathbf{R}$: 所有实数的全体
- $\mathbf{C}$: 所有复数的全体
- $\mathbf{R}^{m\times n}$: 所有 $m\times n$ 实元素矩阵的全体
- $\mathbf{C}^{m\times n}$: 所有 $m\times n$ 复元素矩阵的全体
- $\bar{A}$: 矩阵 A 的共轭
- A^{T}: 矩阵 A 的转置
- A^*: 矩阵 A 的共轭转置 (即 $\bar{A}^{\mathrm{T}}$)
- A^{-1}: 矩阵 A 的逆
- $A^\dagger$: 矩阵 A 的 Moore-Penrose 逆
- $A^\sharp$: 矩阵 A 的群逆
- A^D: 矩阵 A 的 Drazin 逆
- $\mathbf{C}_{n,\sharp}$: 所有 n 阶群可逆矩阵的全体
- $\mathbf{C}_n^{\mathrm{EP}}$: 所有 n 阶 EP 矩阵的全体
- $A\leqslant B$: 减序
- $A*\leqslant B$: 左 $*$ 序
- $A\leqslant *B$: 右 $*$ 序
- $A\overset{*}{\leqslant} B$: $*$ 序
- $A\overset{\sharp}{\leqslant} B$: Sharp 序
- $A\overset{\textcircled{\#}}{\leqslant} B$: Core 序
- $A\leqslant^{\sharp,-} B$: C-N 序
- $A\leqslant^{\mathrm{GD}} B$: G-Drazin 序
- $A\prec B$: 预偏序
- I_n: $n\times n$ 单位矩阵. 当不会引起混淆时, 也记为 I
- $0_{m\times n}$: $m\times n$ 零矩阵. 当不会引起混淆时, 也记为 0. 0_m 为 m 阶零向量
- $R(A)$: 由矩阵 A 的所有列向量所张成的子空间
- $\mathrm{span}(u_1,\cdots,u_i)$: 表示由 $u_1,\cdots,u_i$ 张成的子空间
- $N(A)$: 矩阵 A 的零空间
- P_A: 到 $R(A)$ 上的正交投影算子

- $\det(A)$: 矩阵 A 的行列式
- $r(A)$: 矩阵 A 的秩
- $\mathrm{tr}(A)$: 矩阵 A 的迹
- $\rho(A)$: 矩阵 A 的谱半径
- $\lambda(A)$: 矩阵 A 的所有特征值全体
- $\sigma(A)$: 矩阵 A 的所有奇异值的全体
- $\sigma_+(A)$: 矩阵 A 的所有正奇异值的全体
- $\sigma_{\max}(A)$: 矩阵 A 的最大奇异值
- $\sigma_{\min}(A)$: 矩阵 A 的最小奇异值
- $\sigma_{\min+}(A)$: 矩阵 A 的最小正奇异值
- $\|x\|_2$: 向量 x 的 Euclid 长度
- $\|A\|_2$: 矩阵 A 的谱范数
- $\|A\|_F$: 矩阵 A 的 Frobenius 范数
- $\in$: 元素属于
- $\subseteq$: 集合含于
- $\Leftrightarrow$: 等价
- $\Rightarrow$: 蕴涵

目　录

第1章 绪　　言

在矩阵论中研究最早的是 Löwner 序, 它是由德国数学家 Löwner 在 1934 年提出的, 之后有许多数学家研究了这种偏序的性质和刻画, 并在统计中得到广泛的应用. 1976~1978 年, Drazin 研究半群中幂等元素的自然偏序, 在半群、结合环中引进了 $*$ 序的定义, 利用元素的 Moore-Penrose 逆考察正则半群、结合环的偏序. 1980 年, Hartwig 将此推广为利用元素的 $\{1,2\}$–逆来确定正则半群的偏序. 1986 年, 他与 Styan 在讨论复矩阵的偏序时发现, 这样的刻画还可利用 $\{1\}$–逆来给出, 称之为减序, 并利用矩阵的奇异值分解给出了矩阵 $*$ 序和减序的刻画, 讨论这两种偏序之间的关系. 1987 年, Mitra 定义了矩阵的 Sharp 序, 利用矩阵 $\{1\}$–逆的包含关系, 平行和刻画了复矩阵的 $*$ 序、减序、Sharp 序. 1989 年 Bakslary, Pukelshiem 和 Styan 研究了矩阵的 $*$ 序、减序和 Löwner 序, 得到一些更好的结果. 1991 年, Bakslary 与 Mitra 研究复矩阵的左 (右) $*$ 序, 同时 Bakslary 还研究一些其他的偏序. 1991 年, Mitra 利用矩阵的 $\{2\}$–逆给出矩阵偏序的统一刻画. 最近 Größ 利用矩阵的预偏序讨论非负定矩阵的偏序, 得到进一步的结果. 2010 年, Baksalary 与 Trenkler 研究复矩阵的 Core 序. 由于矩阵的偏序在数理统计、矩阵不等式中的作用, 矩阵偏序的理论成为近年来广义逆研究的一个热点.

1.1 偏　　序

集合的偏序是指在集合上定义的一种关系, 记为"$\preceq$", 它满足如下的三条性质:

(1) 自反性: 对一切 $x \in S$, 总有 $x \preceq x$;

(2) 传递性: 若 $x, y, z \in S$, 且 $x \preceq y$, $y \preceq z$, 则有 $x \preceq z$;

(3) 反对称性: 若 $x, y \in S$, 且 $x \preceq y$, $y \preceq x$, 则 $x = y$.

下面介绍有关矩阵偏序的概念和以后要引用的部分结果.

定义 1.1.1 设 $\mathbf{C}^{m\times n}$ 表示 $m \times n$ 复数矩阵的集合, $K^*, R(K), r(K)$ 分别表示矩阵 $K \in \mathbf{C}^{m\times n}$ 的共轭转置、值域和秩, I_n 是阶为 n 的单位矩阵, 在不引起混淆时, 简记为 I.

$$* \text{ 序}: A \overset{*}{\leqslant} B \Leftrightarrow A^*A = A^*B, AA^* = BA^*; \tag{1.1.1}$$

$$\text{左 } * \text{ 序}: A \mathbin{*\!\leqslant} B \Leftrightarrow A^*A = A^*B, R(A) \subseteq R(B); \tag{1.1.2}$$

$$\text{右 } * \text{ 序}: A \mathbin{\leqslant\!*} B \Leftrightarrow AA^* = BA^*, R(A^*) \subseteq R(B^*); \tag{1.1.3}$$

$$\text{减序}: A \leqslant B \Leftrightarrow A^- A = A^- B, AA^= = BA^=, A^-, A^= \in A\{1\}; \tag{1.1.4}$$

$$\text{预偏序}: A \prec B \Leftrightarrow R(A) \subseteq R(B), R(A^*) \subseteq R(B^*); \tag{1.1.5}$$

$$\text{Sharp 序}: A \overset{\sharp}{\leqslant} B \Leftrightarrow AA^\sharp = BA^\sharp, A^\sharp A = A^\sharp B; \tag{1.1.6}$$

$$\text{Core 序}: A \overset{\oplus}{\leqslant} B \Leftrightarrow A^{\oplus} A = A^{\oplus} B, AA^{\oplus} = BA^{\oplus}; \tag{1.1.7}$$

C-N 序: $A \leqslant^{\sharp,-} B \Leftrightarrow A_1 \overset{\sharp}{\leqslant} B_1, A_2 \leqslant B_2$, 其中 $A = A_1 + A_2, B = B_1 + B_2$, 分别为 A, B 的核心–幂零分解. (1.1.8)

矩阵的 $*$ 序是由 Drazin 首先提出来的, 但首次研究 (1.1.1) 式的是 Hestens. Drazin 给出了矩阵 $*$ 序的一些等价刻画:

$$A \overset{*}{\leqslant} B \Leftrightarrow A^\dagger A = A^\dagger B, \quad AA^\dagger = BA^\dagger, \tag{1.1.9}$$

$$A \overset{*}{\leqslant} B \Leftrightarrow A^* A = A^* B, \quad AA^* = BA^*. \tag{1.1.10}$$

Hartwig 利用 (1.1.9) 式和 (1.1.10) 式证明了下面的等价刻画:

$$A \overset{*}{\leqslant} B \Leftrightarrow A^\dagger AB = A = BA^\dagger A \Leftrightarrow B^\dagger AA^\dagger = A^\dagger = A^\dagger AB^\dagger. \tag{1.1.11}$$

Hartwig 证明了 (1.1.4) 式中的两个正则逆可以用同一个正则逆取代, 并称之为 "plus" 序. 矩阵的减序是由 Hartwigh 和 Styan 首次命名的, Hartwig 更进一步证明了如下的等价刻画:

$$A \leqslant B \Leftrightarrow r(B - A) = r(B) - r(A). \tag{1.1.12}$$

利用 Marsaglia, Styan, Cline 和 Funderlic 的结果, (1.1.12) 式可写成如下的形式:

$$A \leqslant B \Leftrightarrow BB^- A = AB^= B = AB^\equiv A = A, \tag{1.1.13}$$

其中 $B^-, B^=, B^\equiv \in B\{1\}$. 同时对于矩阵的预偏序, (1.1.5) 式可以写成

$$A \prec B \Leftrightarrow BB^- A = A = AB^= B, \tag{1.1.14}$$

其中 $B^-, B^= \in B\{1\}$. 从而有

$$A \leqslant B \Leftrightarrow A \prec B, \quad A\{1\} \cap B\{1\} \neq \varnothing. \tag{1.1.15}$$

对于矩阵的减序、左 $*$ 序、右 $*$ 序、$*$ 序以及 Sharp 序, Mitra 证明了如下的结论:

$$A \leqslant B \Leftrightarrow B\{1\} \subseteq A\{1\}; \tag{1.1.16}$$

$$A* \leqslant B \Leftrightarrow B\{1,3\} \subseteq A\{1,3\}; \tag{1.1.17}$$

$$A \leqslant *B \Leftrightarrow B\{1,4\} \subseteq A\{1,4\}; \tag{1.1.18}$$

$$A \overset{*}{\leqslant} B \Leftrightarrow B\{1,3\} \subseteq A\{1,3\}, \quad B\{1,4\} \subseteq A\{1,4\}; \tag{1.1.19}$$

$$A \overset{\sharp}{\leqslant} B \Leftrightarrow \{B_{\mathrm{com}}^{-}\} \subseteq \{A_{\mathrm{com}}^{-}\}; \tag{1.1.20}$$

其中 $\{A_{\mathrm{com}}^{-}\}$ 表示能与 A 交换的正则逆的集合.

结合 Sambamurty 的结果, (1.1.16)~(1.1.19) 式可以写为

$$A \leqslant B \Leftrightarrow B\{1,2\} \subseteq A\{1\}; \tag{1.1.21}$$

$$A* \leqslant B \Leftrightarrow B\{1,2,3\} \subseteq A\{1,3\}; \tag{1.1.22}$$

$$A \leqslant *B \Leftrightarrow B\{1,2,4\} \subseteq A\{1,4\}; \tag{1.1.23}$$

$$A \overset{*}{\leqslant} B \Leftrightarrow B^{\dagger} \in A\{1,3,4\}. \tag{1.1.24}$$

当 A, B 分别是 Hermite 矩阵时, Baksalary, Pukelsheim 和 Styan 证明了如下的等价刻画:

$$A \leqslant B \Leftrightarrow R(A) \subseteq R(B), \quad AB^{\dagger}A = A. \tag{1.1.25}$$

对于定义 (1.1.1) 中的偏序我们有如下的关系:

$$\begin{aligned} &A \overset{*}{\leqslant} B \Rightarrow A* \leqslant B \Rightarrow A \leqslant B \Rightarrow A \prec B; \\ &A \overset{*}{\leqslant} B \Rightarrow A \leqslant *B \Rightarrow A \leqslant B \Rightarrow A \prec B. \end{aligned} \tag{1.1.26}$$

但 (1.1.26) 式中的任何蕴含在一般情形不能倒过来.

对于矩阵的 $*$ 序和减序之间的关系, Hartwig 和 Styan 证明如下结果:

$$A \overset{*}{\leqslant} B \Leftrightarrow A \leqslant B, \quad B^{\dagger} - A^{\dagger} = (B-A)^{\dagger}; \tag{1.1.27}$$

$$A \overset{*}{\leqslant} B \Leftrightarrow A \leqslant B, \quad AB^{*}, B^{*}A\text{均为 Hermmite 矩阵}; \tag{1.1.28}$$

$$A \overset{*}{\leqslant} B \Leftrightarrow A \leqslant B, \quad AB^{\dagger}, B^{\dagger}A\text{均为 Hermmite 矩阵}; \tag{1.1.29}$$

$$A \overset{*}{\leqslant} B \Leftrightarrow A \leqslant B, \quad A^{\dagger}B, BA^{\dagger}\text{均为 Hermmite 矩阵}. \tag{1.1.30}$$

更进一步地, 对于矩阵的 $*$ 序与减序之间的关系, Mitra 得到如下的结论:

$$A \overset{*}{\leqslant} B \Leftrightarrow A \leqslant B, \quad G_a \in A\{1,3\}, \quad G_a + (B-A)^{\dagger} \in B\{1\}; \tag{1.1.31}$$

$$A \overset{*}{\leqslant} B \Leftrightarrow A \leqslant B, \quad G_a \in A\{1,4\}, \quad G_a + (B-A)^{\dagger} \in B\{1\}. \tag{1.1.32}$$

对于矩阵的减序与 Sharp 序之间的关系, Mitra 证明了如下结论:

$$A \overset{\sharp}{\leqslant} B \Leftrightarrow A \leqslant B, \quad AB = BA; \tag{1.1.33}$$

$$A \overset{\sharp}{\leqslant} B \Leftrightarrow A \leqslant B, \quad A^{\sharp}B = BA^{\sharp}; \tag{1.1.34}$$

$$A \overset{\sharp}{\leqslant} B \Leftrightarrow A \leqslant B, \quad AB^{\sharp} = B^{\sharp}A. \tag{1.1.35}$$

对于矩阵的左 (右) $*$ 序与减序之间的关系, Größ, Hauke 和 Markiewicz 得到了如下的等价性:

$$A * \leqslant B \Leftrightarrow A \leqslant B, \quad A^*A \overset{L}{\leqslant} B^*B; \tag{1.1.36}$$

$$A * \leqslant B \Leftrightarrow A \leqslant B, \quad A^*A \leqslant B^*B; \tag{1.1.37}$$

$$A \leqslant * B \Leftrightarrow A \leqslant B, \quad AA^* \overset{L}{\leqslant} BB^*; \tag{1.1.38}$$

$$A \leqslant * B \Leftrightarrow A \leqslant B, \quad AA^* \leqslant BB^*. \tag{1.1.39}$$

进而对于矩阵的 $*$ 序和减序有下述结果:

$$A \overset{*}{\leqslant} B \Leftrightarrow A \leqslant B, \quad A^*A \overset{*}{\leqslant} B^*B; \tag{1.1.40}$$

$$A \overset{*}{\leqslant} B \Leftrightarrow A \leqslant B, \quad AA^* \overset{*}{\leqslant} BB^*. \tag{1.1.41}$$

定义 1.1.2 设 $A, B \in \mathbf{C}^{m\times m}$, 矩阵的 Löwner 序定义为

$$A \overset{L}{\leqslant} B \Leftrightarrow A - B = KK^*. \tag{1.1.42}$$

若 A, B 分别为 Hermite 矩阵, 且它们的负特征值的个数相等, 则有

$$A \overset{L}{\leqslant} B \Leftrightarrow R(A) \subseteq R(B), \quad AB^{\dagger}A \overset{L}{\leqslant} A. \tag{1.1.43}$$

若 A, B 分别为半正定矩阵, 由 (1.1.42) 式可得

$$A \overset{L}{\leqslant} B \Leftrightarrow R(A) \subseteq R(B), \quad \lambda_{\max}(B^{\dagger}A) \leqslant 1, \tag{1.1.44}$$

其中 $\lambda_{\max}(A)$ 表示矩阵 A 的最大的特征值.

Größ证明如下的结果:

$$A^2 \overset{L}{\leqslant} B^2 \Leftrightarrow R(A) \subseteq R(B), \quad \delta_{\max}(B^{\dagger}A) \leqslant 1, \tag{1.1.45}$$

其中 $\delta_{\max}(A)$ 表示矩阵 A 的最大的奇异值.

对于矩阵的 Löwner 序跟 $*$ 序、减序、预偏序的相互关系, 目前已知的结果较少, Hartwig 和 Styan 证明如下的结果:

$$A = A^*,\quad 0 \overset{L}{\leqslant} B,\quad A \leqslant B \Rightarrow A \overset{L}{\leqslant} B; \tag{1.1.46}$$

$$A = A^2,\quad B = B^2,\quad A \overset{L}{\leqslant} B \Rightarrow A \overset{*}{\leqslant} B. \tag{1.1.47}$$

Baksalary 和 Hauke 证明如下的关系:

$$0 \overset{L}{\leqslant} A \overset{L}{\leqslant} B \Rightarrow A \prec B. \tag{1.1.48}$$

由 (1.1.46) 式和 (1.1.48) 式, 则有

$$0 \overset{L}{\leqslant} A \overset{L}{\leqslant} B \Leftrightarrow A = A^*,\quad 0 \overset{L}{\leqslant} B,\quad A \prec B,\quad AB^- A \overset{L}{\leqslant} A. \tag{1.1.49}$$

定义 1.1.3　设 $A, B \in \mathbf{C}^{m\times m}$ 是对称矩阵, 若 $R(A) \subseteq R(B)$, $AB^\dagger A \overset{L}{\leqslant} A$, 则称 $A \leqslant^\circ B$.

Größ证明 $A \leqslant^\circ B$ 是一偏序关系, 并给出了一些等价刻画.

定义 1.1.4　设 $A, B \in \mathbf{C}^{m\times m}$, 若 $A \leqslant B, \delta_1(A) \subseteq \delta_1(B)$, 则称 $A \overset{\delta_1}{\leqslant} B$.

显然 $A \overset{\delta_1}{\leqslant} B$ 是一偏序关系, Größ 研究这种偏序与左 (右) $*$ 序的关系:

$$A* \leqslant B \Leftrightarrow A \overset{\delta_1}{\leqslant} B,\quad AB^\dagger \overset{\delta_1}{\leqslant} BB^\dagger; \tag{1.1.50}$$

$$A \leqslant *B \Leftrightarrow A \overset{\delta_1}{\leqslant} B,\quad B^\dagger A \overset{\delta_1}{\leqslant} B^\dagger B; \tag{1.1.51}$$

$$A \overset{*}{\leqslant} B \Leftrightarrow A \overset{\delta_1}{\leqslant} B,\quad AB^\dagger \overset{\delta_1}{\leqslant} BB^\dagger,\quad B^\dagger A \overset{\delta_1}{\leqslant} B^\dagger B. \tag{1.1.52}$$

对于 (半) 正定矩阵, Baksarary 和 Pukelshiem 讨论正定矩阵及其平方矩阵的 $*$ 序、减序和 Löwner 序之间的关系, 得到如下的结论:

$$A \overset{*}{\leqslant} B \Leftrightarrow A^2 \overset{*}{\leqslant} B^2 \Rightarrow AB = BA; \tag{1.1.53}$$

$$A \leqslant B,\quad AB = BA \Rightarrow A^2 \leqslant B^2; \tag{1.1.54}$$

$$A^2 \leqslant B^2,\quad AB = BA \Rightarrow A \leqslant B; \tag{1.1.55}$$

$$A \leqslant B,\quad A^2 \leqslant B^2 \Rightarrow AB = BA; \tag{1.1.56}$$

$$A \overset{L}{\leqslant} B,\quad AB = BA \Rightarrow A^2 \overset{L}{\leqslant} B^2; \tag{1.1.57}$$

$$A^2 \overset{L}{\leqslant} B^2,\quad AB = BA \Rightarrow A \overset{L}{\leqslant} B. \tag{1.1.58}$$

Hauke 和 Markiewicz 给出一种新型矩阵偏序的概念:

$$A \leqslant_{\mathrm{GL}} B \Leftrightarrow (AA^*)^{1/2} \overset{L}{\leqslant} (BB^*)^{1/2}, \quad R(A^*) \subseteq R(B^*), \quad AB^* = (AA^*)^{1/2}(BB^*)^{1/2}. \tag{1.1.59}$$

并给出一个等价刻画:

$$\begin{aligned} A \leqslant_{\mathrm{GL}} B \Leftrightarrow R(A) \subseteq R(B), \quad R(A^*) \subseteq R(B^*), \\ AB^* = (AA^*)^{1/2}(BB^*)^{1/2}, \quad \delta(B^\dagger A) \leqslant 1. \end{aligned} \tag{1.1.60}$$

设 $A = GE$, $B = G_1 E_1$ 分别矩阵 A, B 的极分解, 定义 $A < B$ 为 $E \overset{*}{\leqslant} E_1$, Größ 证明这是一个预偏序, 得到这种偏序的等价刻画和与其他偏序之间的关系:

$$A < B \Leftrightarrow R(A) \subseteq R(B), \quad AB^* = |A|\,|B|; \tag{1.1.61}$$

$$A \leqslant_{\mathrm{GL}} B \Leftrightarrow A < B, \quad \delta(AB^\dagger) \leqslant 1; \tag{1.1.62}$$

$$A \overset{*}{\leqslant} B \Leftrightarrow |A| \overset{*}{\leqslant} |B|, \quad A < B. \tag{1.1.63}$$

利用矩阵的行列组合关系, Mitra 给出矩阵预偏序、减序、左 $*$ 序、右 $*$ 序和 $*$ 序的等价刻画:

$$A \prec B \Leftrightarrow A = KB = BL; \tag{1.1.64}$$

$$A \leqslant B \Leftrightarrow A = KB = BL, \quad K^2 = K, L^2 = L; \tag{1.1.65}$$

$$A* \leqslant B \Leftrightarrow A = KB = BL, \quad K^2 = K = K^*; \tag{1.1.66}$$

$$A \leqslant *B \Leftrightarrow A = KB = BL, \quad L^* = L^2 = L; \tag{1.1.67}$$

$$A \overset{*}{\leqslant} B \Leftrightarrow A = KB = BL, \quad K^2 = K = K^*, \quad L^2 = L = L^*. \tag{1.1.68}$$

对于半正定矩阵的 Löwner 序和平方矩阵的减序, Größ 给出如下的结论:

$$A \overset{L}{\leqslant} B \Leftrightarrow A = BK, \quad \lambda(K) \subseteq [0,1]; \tag{1.1.69}$$

$$A^2 \overset{L}{\leqslant} B^2 \Leftrightarrow A = BK, \quad \lambda(KK^*) \subseteq [0,1]; \tag{1.1.70}$$

$$A^2 \leqslant B^2 \Leftrightarrow A = BK, \quad KK^*K = K, \quad KK^*BB^\dagger = BB^\dagger KK^*. \tag{1.1.71}$$

1.2 矩 阵 分 解

本节列举本书需要的主要矩阵分解: 奇异值分解、Hartwig-Spindelböck 分解和核心–幂零分解.

定理 1.2.1 (奇异值分解) 设 $A \in \mathbf{C}^{m\times n}$, $r(A)=r$, 则存在酉矩阵 U 和 V, 使得

$$\begin{array}{cl} U * V = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} r \\ m-r, \end{array} \\ \quad\quad\quad r,\ n-r & \end{array} \tag{1.2.1}$$

其中 $\Sigma_1=\operatorname{diag}(\sigma_1,\cdots,\sigma_r), \sigma_1 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r>0$.

定理 1.2.2 (Hartwig-Spindelböck 分解) 设 $A \in \mathbf{C}^{m\times m}, r(A)=r$, 则存在酉矩阵 U 使得

$$A=U\begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*, \tag{1.2.2}$$

其中 $\Sigma=\operatorname{diag}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)$, $K\in\mathbf{C}^{r\times r}$, $L\in\mathbf{C}^{r\times(n-r)}$ 且 $KK^*+LL^*=I_r$.

记满足 $r\left(A^k\right)=r\left(A^{k+1}\right)$ 的最小整数 k 为 A 的指标, $\operatorname{Ind}(A)=k$.

定理 1.2.3 (核心–幂零分解) 设 A 为复数域上的 $m\times n$ 矩阵. 则 A 可以分解为两个矩阵和的形式:

$$A=A_1+A_2,$$

其中, $\operatorname{Ind}(A_1)\leqslant 1$, A_2 是幂零矩阵, $A_1A_2=A_2A_1=0$ 且表示法唯一.

值得注意的是, 在文献 [64, 注 2.2.24] 中, A 的核心–幂零分解也可以表示为

$$A=P\begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}P^{-1}, \tag{1.2.3}$$

其中, P 和 Σ 是可逆矩阵, N 是幂零矩阵.

1.3 广 义 逆

广义逆矩阵是 20 世纪矩阵理论的一项极为重要的新发展, 广义逆的概念最早由 Fredholm 于 1908 年提出的, 他给出 Fredholm 积分算子的广义逆, Hurwitz 于 1912 年利用有限维 Fredholm 积分算子的零空间给出此类广义逆的一个简单的代数表征, Hilbert 于 1904 年讨论广义 Green 函数时曾提出微分算子的广义逆, 之后许多学者研究了微分算子的广义逆, 特别是 Myller, Westfall, Reid 等. 1920 年, Moore 首次提出矩阵的广义逆, 并利用投影矩阵定义唯一的广义逆. Bjerhammer 在不知道 Moore 结果的情形下, 重新提出广义逆矩阵的定义, 利用广义逆给出线性方程组的解. Bott 和 Duffin 在研究电网络理论时, 引进了后来被称为 Bott-Duffin 逆的概念. 但这时期的研究工作是零散的. Penrose 在 1955 年证明 Moore 所定义的广义逆是满足四个矩阵方程的唯一的矩阵之后, 广义逆矩阵得到迅速发展并在应用学科

的诸多领域获得广泛的应用. 近 40 年来, 广义逆矩阵理论在最优化、数理统计、算子理论、经济学和计算数学等众多数学分支和工程科技领域发挥了重大作用. 尤其在研究最小二乘问题、病态线性与非线性问题、不适定问题、回归、分布估计、马尔可夫链等统计问题、规划问题、控制论、网络问题的过程中, 广义逆是不可或缺的研究工具.

定义 1.3.1 (Moore-Penrose 逆)　设 $A\in\mathbf{C}^{m\times n}$. 则存在唯一的 $X\in\mathbf{C}^{n\times m}$, 满足

(1) $AXA=A$;　　(2) $XAX=X$;

(3) $(AX)^*=AX$;　(4) $(XA)^*=XA$;

我们称 X 为 A 的 Moore-Penrose 逆, 记为 $A^\dagger$.

若 X 满足上述等式中的 i,j,k 式, 则称 X 为 A 的 $\{i,j,k\}$–逆, 记为 $A^{(i,j,k)}$. 记 $A\{i,j,k\}$ 为所有 $A^{(i,j,k)}$ 构成的全体.

设 $A\in\mathbf{C}^{m\times n}$ 的奇异值分解为 $A=U\begin{pmatrix}\Sigma_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}V^*$, 其中 U 和 V 为酉矩阵, $\Sigma_1=\mathrm{diag}(\sigma_1,\cdots,\sigma_r)>0$. 容易验证

$$A^{(1)}=V\begin{pmatrix}\Sigma_1^{-1} & K\\ L & M\end{pmatrix}U^*,$$

$$A^{(1,2)}=V\begin{pmatrix}\Sigma_1^{-1} & K\\ L & L\Sigma_1K\end{pmatrix}U^*,$$

$$A^{(1,2,3)}=V\begin{pmatrix}\Sigma_1^{-1} & 0\\ L & 0\end{pmatrix}U^*,$$

$$A^{(1,2,4)}=V\begin{pmatrix}\Sigma_1^{-1} & K\\ 0 & 0\end{pmatrix}U^*,$$

$$A^\dagger=V\begin{pmatrix}\Sigma_1^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}U^*=A^{(1,2,4)}AA^{(1,2,3)}.$$

其中 K, L, M 是有相应维数的任意矩阵, 以及

(1) $(A^\dagger)^\dagger=A$;

(2) $(A^*)^\dagger=(A^\dagger)^*$;

(3) $r(A)=r(A^\dagger)=r(A^\dagger A)$;

(4) $A^\dagger=(A^*A)^\dagger A^*$, 特别地, 若 A 是列满秩矩阵, 则 $A^\dagger=(A^*A)^{-1}A^*$;
$A^\dagger=A^*(AA^*)^\dagger$, 特别地, 若 A 是行满秩矩阵, 则 $A^\dagger=A^*(AA^*)^{-1}$.

定义 1.3.2 (Drazin 逆) 设 $A \in \mathbf{C}^{m\times m}$ 以及 $k = \operatorname{Ind}(A)$. 则存在唯一的 $X \in \mathbf{C}^{m\times m}$, 满足

$$(1)\ A^kXA = A^k;\ (2)\ XAX = X;\ (3)\ AX = XA;$$

我们称 X 为 A 的 Drazin 逆, 记为 A^D.

当 $\operatorname{Ind}(A) = 1$ 时, X 称为 A 的群逆, 记为 $A^\#$.

若 A 的群逆存在, 则 $A^\#$ 的群逆也存在, 且 $\left(A^\#\right)^\# = A$.

定义 1.3.3 (G-Drazin 逆) 设 $A \in \mathbf{C}^{m\times m}$ 以及 $k = \operatorname{Ind}(A)$. 则称满足

$$(1)\ AXA = A;\ (2)\ (1^l)\ XA^{k+1} = A^k;\ (3)\ (1^r)\ A^{k+1}X = A^k \tag{1.3.1}$$

的 X 为 A 的 G-Drazin 逆.

由定义可以看出, 在一般意义下, G-Drazin 逆不唯一. 记 $A\{GD\}$ 为 A 的所有 G-Drazin 逆构成的集合.

如果 X 满足 $(1, 1^l)$, 则称 X 为 A 的左弱 Drazin 逆; 如果 X 满足 $(1, 1^r)$ 则称其为 A 的右弱 Drazin 逆.

定义 1.3.4 (Core 逆) 设 $A \in \mathbf{C}^{m\times m}$, $r\left(A^2\right) = r(A)$. 则存在唯一的 $X \in \mathbf{C}^{m\times m}$, 满足

$$(1)\ AXA = A;\ (2)\ AX^2 = X;\ (3)\ (AX)^* = AX;$$

我们称 X 为 A 的 Core 逆, 记为 $A^{\oplus}$.

第 2 章　特殊矩阵的偏序

对于 (半) 正定矩阵, Baksarary 和 Pukelshiem 讨论了正定矩阵及其平方矩阵的 $*$ 序、减序和 Löwner 序之间的关系, 指出对于后两种偏序, 矩阵的交换性起着关键的作用. 我们给出矩阵的 $*$ 序、左 $*$ 序、右 $*$ 序和减序的更为精细的等价刻画, 从而得到 EP 矩阵、指标为 1 的矩阵、Hermmite 矩阵和正规矩阵的新的等价刻画; 利用得到的结果研究一些特殊矩阵类的 $*$ 序、左 $*$ 序、右 $*$ 序和减序之间的一致性, 同时讨论在偏序意义下矩阵的遗传性; 研究矩阵的广义投影和超广义投影, 并进一步讨论广义投影和超广义投影的性质和等价刻画.

2.1 预备知识

引理 2.1.1　设 $A, B \in \mathbf{C}^{m\times n}$, $a = r(A) < r(B) = b$, 则 $A \overset{*}{\leqslant} B$ 当且仅当

$$A = U\begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V^*, \quad B = U\begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}V^*, \tag{2.1.1}$$

其中, $U \in \mathbf{C}^{m\times b}$, $V \in \mathbf{C}^{n\times b}$ 满足 $U^*U = I_b = V^*V$, D_1, D_2 分别是阶为 $a, b-a$ 的对角正定矩阵.

引理 2.1.2　设 $A, B \in \mathbf{C}^{m\times n}$, $a = r(A) < r(B) = b$, 则 $A \leqslant B$ 当且仅当

$$A = U\begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V^*, \quad B = U\begin{pmatrix} D_1 + RD_2S & RD_2 \\ D_2S & D_2 \end{pmatrix}V^*, \tag{2.1.2}$$

其中, $U \in \mathbf{C}^{m\times b}$, $V \in \mathbf{C}^{n\times b}$ 满足 $U^*U = I_b = V^*V$, D_1, D_2 分别是阶为 $a, b-a$ 的对角正定矩阵.

引理 2.1.3　设 $A, B \in \mathbf{C}^{m\times n}$, $a = r(A) < r(B) = b$, 则 $A* \leqslant B$ 当且仅当

$$A = U\begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V^*, \quad B = U\begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ D_2S & D_2 \end{pmatrix}V^*, \tag{2.1.3}$$

其中, $U \in \mathbf{C}^{m\times b}$, $V \in \mathbf{C}^{n\times b}$ 满足 $U^*U = I_b = V^*V$, D_1, D_2 分别是阶为 $a, b-a$ 的对角正定矩阵.