高等学校"十三五"规划教材

数理学科导论

陈芳跃 主编

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

数理学科导论

陈芳跃 主编

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书主要介绍数学、物理两个学科的发展概况、研究范围和普通本科院校与这两个学科相关的几个专业的学习内容和基本要求，以及每个专业的理论课程和实验实践课程介绍等；同时，本书也介绍了与数学、物理两个学科相关的学科以及数学、物理类专业的学生毕业后可以继续深造的专业和方向。

本书目的在于为大学生本科阶段的学习生涯提供帮助和指导，可以作为数学、物理两个学科相关专业方向学生的学科导论课教材，也可以作为数学、物理类专业的入门指导书。

图书在版编目(CIP)数据

数理学科导论/陈芳跃主编. —西安：西安电子科技大学出版社，2015.11

ISBN 978-7-5606-3913-0

Ⅰ. ① 数…　Ⅱ. ① 陈…　Ⅲ. ① 数学—学科发展—研究—中国　② 物理学—学科发展—中国

Ⅳ. ① O1-12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 252150 号

策　　划　陈　婷
责任编辑　陈　婷
出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)
电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　　编　710071
网　　址　www.xduph.com　　电子邮箱　xdupfxb001@163.com
经　　销　新华书店
印刷单位　陕西天意印务有限责任公司
版　　次　2015 年 11 月第 1 版　2015 年 11 月第 1 次印刷
开　　本　787 毫米×1092 毫米　1/16　印　张　12.5
字　　数　291 千字
印　　数　1～2000 册
定　　价　24.00 元
ISBN 978-7-5606-3913-0/O

XDUP 4205001-1

前　言

学科导论是帮助大学生在进校初期能够迅速对自己所学习的专业有比较全面的了解的一门课程。作为数理学科导论课的教材，本书内容主要包括：数理学科的发展概况和发展历史，数理学科的基本情况，数理学科各个专业的介绍，各个专业的考研方向，各个专业的实践教学环节的内容和要求，数学建模课程和全国大学生数学建模竞赛的介绍，以及怎样规划好自己的大学生涯。

进入大学后，大部分学生对于自己所学的专业不是十分了解，因此，入校后系统地了解本专业的学习内容和发展前景显得非常重要。我校从 2013 级开始，在全校范围内按学科门类开设了“学科导论”课程，经过两年的教学实践，收到了很好的效果。为更好地建设这门课程，同时也为了让学生有该门课程的具体教材，我们把理学类的“学科导论”的教学讲稿整理成本书，名为《数理学科导论》，希望让学生能够更加系统地了解和学好这门课程，同时也为更好地学好自己的专业课程打下基础。

本书从自然科学的分类开始，系统地介绍了数学、物理两大学科的起源、发展和现状，在此基础上，向读者系统地介绍了数学、物理两大学科各个专业的学习内容。一般而言，在课堂教学中，各个专业的学生仅学习自己专业的内容，现在我们把数学、物理两个学科的各个专业的内容编写成教材后，就可以让学生也了解其他专业的学习内容以及自己所学专业与其他专业的区别等，这样可以为学生在本科毕业以后的学习深造提供帮助，以利于学生为自己以后的发展做出更好的规划。

本书由杭州电子科技大学理学院“学科导论”课程教学团队集体完成，其中第 1 章由陈芳跃编写，第 2.1 节由李炜编写，第 2.2 节、第 3.2 节由赵金涛编写，第 3.1 节由凌晨编写，第 4.1 节由潘建江编写，第 4.2 节由赵易编写，第 4.3 节由赵月旭编写，第 4.4 节、第 5.2 节、第 7.2 节由丁宁编写，第 4.5 节由陈林飞编写，第 5.1 节由邓重阳编写，第 5.3 节、第 7.3 节由黄清龙编写，第 6 章由裘哲勇编写，第 7.1 节、第 7.4 节由张智丰编写，第 8 章由卢峰编写；全书由张智丰统稿，陈芳跃审定。学科导论全部内容涉及面非常广泛，编写难度很大，其中必定有很多的不足甚至错误。此次出版，希望得到专家读者的批评指正，以利于我们今后修订中改进和提高。

本书的完成得到杭州电子科技大学教材项目的资助，得到学校领导、教务处、理学院的大力支持，西安电子科技大学出版社对本书的出版也给予大力的支持和帮助，在此一并表示感谢。

编　者

2015 年 6 月

目　　录

第 1 章　数理科学发展概述

1.1　自然科学概述

1.1.1　简介

自然科学含括了许多领域，研究自然科学通常试图解释世界是依照自然程序而运作的，而不是由神性的方式运作。自然科学是研究无机自然界和包括人的生物属性在内的有机自然界的各门科学的总称。认识的对象是整个自然界，即自然界物质的各种类型、状态、属性及运动形式。认识的任务在于揭示自然界发生的现象以及自然现象发生过程的实质，进而把握这些现象和过程的规律性，以便解读它们，并预见新的现象和过程，为在社会实践中合理而有目的地利用自然界的规律开辟了新的途径。

自然科学的根本目的在于发现自然现象背后的规律。但是目前自然科学的工作尚不包括研究这些规律为什么存在以及它们为什么是现在的样子。自然科学认为超自然的、随意的和自相矛盾的现象是不存在的。自然科学的最重要的两个支柱是观察和逻辑推理。由于对自然的观察和逻辑推理，自然科学可以引导出大自然中的规律。假如观察的现象与规律的预言不同，那么要么是因为观察中有错误，要么是因为至此为止原来被认为是正确的规律是错误的，超自然因素是不存在的。

自然科学是研究自然界的物质形态、结构、性质和运动规律的科学。它包括数学、物理学、化学、生物学等基础科学和天文学、气象学、农学、医学、材料学等实用科学，是人类改造自然的实践经验即生产斗争经验的总结。它的发展取决于生产的发展。原始社会中，人类因生产工具简单、粗笨，且受到原始宗教及其他意识的影响，自然科学的发展是非常缓慢的。不过，人类取得的每一个科技进步，都推动了生产的发展，同时又促进自然科学知识的不断积累，预示着科技的新突破。从古到今，人类以辛勤的劳动与聪明智慧，不断地推动着科学和技术的发展。

1.1.2　自然科学的分类、领域介绍

1. 数学

数学是研究数量、结构、变化以及空间模型等概念的一门学科。透过抽象化和逻辑推理的使用，由计数、计算、量度和对物体形状及运动的观察，产生了数学。数学家们拓展这些概念，将新的猜想公式化以及从合适选定的公理及定义中建立起严谨推导出的真理。很多人认为数学只属于逻辑学，这种认识是错误的。数学属于自然科学，自然科学从诞生

开始就和数学紧密联系。从牛顿的《自然哲学的数学原理》一书的名字就可以很好地说明这一点。

数学又分为基础数学和应用数学两部分，基础数学绝对是自然科学，具有自然科学的性质，“1+1=2”是客观事实，不是逻辑推导；应用数学则是把某些事物运用数学模型进行解释，并不一定符合客观事实，这也许是很多人认为数学不属于自然科学的原因。可是数学的本质是基础数学层面的，所以数学属于自然科学。

2. 物理学

物理学是研究物质结构、物质相互作用和运动规律的自然科学，是一门以实验为基础的自然科学，物理学的一个永恒主题是寻找各种序、对称性和对称破缺、守恒律或不变性。

3. 化学

化学是研究物质的组成、结构、性质以及变化规律的科学。世界是由物质组成的，化学则是人类用以认识和改造物质世界的主要方法和手段之一，它是一门历史悠久而又富有活力的学科，它的成就是社会文明的重要标志。

4. 生物学

生物学是研究生命现象，生命活动的本质、特征和发生、发展规律的科学，用于有效地控制生命活动，能动地改造生物界，造福人类。生物学与人类生存、人民健康、经济建设和社会发展有着密切关系，是当今在全球范围内最受关注的基础自然科学。

1.1.3 自然科学的研究方法

1. 科学实验法

科学实验、生产实践和社会实践并称为人类的三大实践活动。实践不仅是理论的源泉，而且也是检验理论正确与否的唯一标准。科学实验就是自然科学理论的源泉和检验标准，特别是现代自然科学研究中，任何新的发现、新的发明、新的理论的提出都必须以能够重现的实验结果为依据，否则就不能被他人所接受，甚至连发表学术论文的可能性都会被取缔。即便是一个纯粹的理论研究者，也必须面对他所关注的实验结果，甚至对实验过程有相当深入的了解才行。因此，可以说，科学实验是自然科学发展中极为重要的活动和研究方法。

2. 数学方法

数学方法有两个不同的概念，在方法论中的数学方法指研究和发展数学时的思想方法，而这里所要阐述的数学方法则是在自然科学研究中经常采用的一种思想方法，其内涵是：它是科学抽象的一种思维方法，其根本特点在于撇开研究对象的其他一切特性，只抽取出各种量、量的变化及各量之间的关系，也就是在符合客观的前提下，使科学概念或原理符号化、公式化，利用数学语言(即数学工具)对符号进行逻辑推导、运算、演算和量的分析，以形成对研究对象的数学解释和预测，从量的方面揭示研究对象的规律性。这种特殊的抽象方法，称为数学方法。

下节内容主要就自然科学的数学、物理两大学科的发展作一个简要的介绍。

1.2 数理科学发展概述

1.2.1 近代数理科学的开端

1543 年，哥白尼公开发表《天体运行论》，这是近代自然科学诞生的主要标志。近代自然科学(或数理科学)是以天文学领域的革命为开端的。天文学是一门最古老的科学。在西方，通过毕达哥拉斯、柏拉图、喜帕恰斯、托勒密等人的研究，已经提出了几种不同的理论体系，成为最具理论色彩，又是提出理论模型最多的一门学科。同时，天文学与人们的生产和生活密切相关，人们种田靠天、畜牧靠天、航海靠天、观测时间也靠天，这就必然会有力推动天文学的发展。然而，天文学在当时又是一门十分敏感的学科。在天文学领域，两种宇宙观、新旧思想的斗争十分激烈。特别是到了中世纪后期，天主教会还别有用心地为托勒密的地心说披上了一层神秘的面纱，硬说地球处于宇宙中心，证明了上帝的智慧，是上帝把人派到地上来统治万物，让人类的住所——地球处于宇宙中心。这种荒唐说法被当作权威加以崇信之后，托勒密的学说就成为不可怀疑的结果而严重阻碍着天文科学的进步。然而，地心说基础上产生的儒略历在 325 年被确定为基督教的历法后，它的微小误差经过长时间的积累已经到了不可忽视的地步，同观测资料大相径庭。葡萄牙一位亲王的船长曾说："尽管我们对有名的托勒密十分敬仰，但我们发现，事事都和他说的相反。"托勒密体系的错误日益暴露，人们急需建立新的理论体系。当时，文艺复兴正蓬勃开展，它不仅大大解放了人们的思想，同时也推动了近代自然科学的产生。波兰天文学家哥白尼适应时代要求，他从 1506 年开始，在弗洛恩堡一所教堂的阁楼上对天象仔细观察了 30 年，从而创立了一种天文学的新理论——日心说。日心说的提出恢复了地球普通行星的本来面貌，猛烈地震撼了科学界和思想界，动摇了封建神学的理论基础，是天文学发展史上一个重要的里程碑。

1.2.2 近、现代物理学的发展

从哥白尼公开发表《天体运行论》为标志到 20 世纪初，自然科学的发展成就辉煌，取得了一系列重大成果。例如在天体力学中，开普勒发现了行星运动的三大定律(椭圆定律、面积定律、周期定律)；1632 年，伽利略发现了自由落体定律；1687 年，牛顿发表《自然哲学的数学原理》，系统论述了牛顿力学三定律(惯性定律、作用力反作用力定律、加速度定律)和万有引力定律。这些定律构成一个统一的体系，把天上的和地上的物体运动概括在一个理论之中。这是人类认识史上对自然规律的第一次理论性的概括和综合。

科学的发展不是凭空进行，而是必须以已有的科学成果为发展的起点。当时已有的天文学、数学知识为力学的发展创造了前提，而力学发展较完善的状况又促成了哲学史上机械自然观的形成。因为，从人的认识规律来看，人类对客观事物的认识总是从认识简单事物进而深化认识复杂事物，认识机械运动是科学认识的第一任务。在科学认识第一阶段，暂时把事物看成彼此无关的固定不变的东西进行研究是可以理解的，一旦科学家们把一切高级复杂运动都简单类比为机械运动，并且把力学中的外力照搬过来，就变成了否认事物

内部矛盾的机械外因论。他们认为，自然界绝对不变，自然界只是在空间上扩张，展现其多样性，而在时间上没有变化，没有发展的历史。不变的行星一定始终不变地绕着不变的太阳运行，由于它不承认物质的发展，不能回答自然界的一切从何而来的问题，最后只能搬用神的创造力来解释，自然科学又回到了神学之中。

1755 年，德国著名哲学家康德出版了《宇宙发展史概论》，书中提出了著名的星云假说。康德的星云假说能较好解释太阳系的某些现象。他认为，太阳系以及一切恒星都是由原始星云在引力和斥力的作用下逐渐聚集而成的。宇宙中的万事万物有生有死，而发展是永无止境的。恩格斯 1875 年为《自然辩证法》写的一篇导言中，给予康德的星云假说极高的评价，说它“包含着一切继续前进的起点。”因为既然地球是随着太阳系的形成而逐渐形成和发展起来的，那么，地球上的万物山川、动物和植物，自然也有它逐渐形成和发展的历史。“如果立即沿着这个方向坚决地继续研究下去，那么，自然科学现在就会进步得多”。康德的星云假说有力冲击了形而上学的机械自然观，是继哥白尼天文学革命后的又一次科学革命。

18 世纪 60 年代，英国开始了工业革命，这也是近代以来的第一次技术革命。不过，在第一次工业革命期间，许多技术发明大都来源于工匠的实践经验，科学和技术尚未真正结合。总之，在 18 世纪中叶以前，自然科学研究主要运用观察、实验、分析、归纳等经验方法达到记录、分类，积累现象知识的目的。在 18 世纪中叶以后，由于启蒙运动的发展，自然科学便走进了理论的领域，引导人们进行理性思维。理性思维就是对感性材料进行抽象和概括，建立概念，并运用概念进行判断和推理，提出科学假说，进而建立理论或理论体系。19 世纪，道尔顿的原子论、阿佛加德罗的分子学说、门捷列夫的元素周期律以及康德的星云假说开始都是以假说形式出现的。

在 19 世纪之前，人们基本上认为电与磁是两种不同现象，但人们也发现两者之间可能会存在某种联系，因为水手们不止一次看到，打雷时罗盘上的磁针会发生偏转。1820 年 7 月，丹麦教授奥斯特通过实验证实了电与磁的相互作用，他指出磁针的指向同电流的方向有关。这说明自然界除了沿物体中心线起作用的力以外，还存在着旋转力，而这种旋转力是牛顿力学所无法解释的。这样，一门新学科电磁学诞生了。 奥斯特的发现震动了物理学界，科学家们纷纷做各种实验，力求搞清电与磁的关系。法国的安培提出了电动力学理论。英国化学家、物理学家法拉第于 1831 年总结出电磁感应定律，1845 年他还发现了“磁光效应”，播下了电、磁、光统一理论的种子。但法拉弟的学说都是用直观的形式表达的，缺少精确的数学语言。后来，英国物理学家麦克斯韦克服了这一缺点，他于 1865 年根据库仑定律、安培力公式、电磁感应定律等经验规律，运用矢量分析的数学手段，提出了真空中的电磁场方程。以后，麦克斯韦又推导出电磁场的波动方程，还从波动方程中推论出电磁波的传播速度刚好等于光速，并预言光也是一种电磁波。这就把电、磁、光统一起来了，这是继牛顿力学以后又一次对自然规律的理论性概括和综合。

1888 年，德国科学家赫兹证实了麦克斯韦电磁波的存在。利用赫兹的发现，意大利物理学家马可尼、俄国的波波夫先后分别实现了无线电的传播和接收，使有线电报逐渐发展成为无线电通信。所有这些电器设备都需要大量的电，这远远不是微弱的电池所能提供的。1866 年，第一台自激式发电机问世使电流强度大大提高。19 世纪 70 年代，欧洲开始进入电力时代，80 年代还建成了中心发电站，并解决了远距离输电问题。电力的广泛应用是继

蒸汽机之后近代史上的第二次科技革命。电磁学的发展为这次科技革命提供了重要的理论准备。由于自然科学的新发现被迅速应用于生产，第二次工业革命在欧美国家蓬勃兴起。

19世纪，自然科学在多个领域取得了辉煌的成就。物理学中一切基本问题在牛顿力学的基础上都已基本上得到解决，科学家们给牛顿力学本来解释不了的电磁现象虚构了一个物质承担者——以太，把电磁现象归结为以太的机械运动，他们认为整个物理世界都可以归结为绝对不可分的原子和绝对静止的以太这两种物质。

正当古典物理学达到顶峰，人们陶醉于“尽善尽美”的境界时，却出人意料发生了一系列震惊整个物理学界的重大事件。首先是迈克耳逊和莫雷为了寻找地球相对于绝对静止的以太运动进行了著名的以太漂移实验，但实验结果却同古典理论的预测相反；在对比热和热辐射的研究中又出现了“紫外灾难”等古典理论不可克服的矛盾。古典物理学再次受到严重的挑战，第三次面临重大的危机。

19世纪末，德国物理学家伦琴发现了一种能穿透金属板使底片感光的X射线。不久，贝克勒尔发现了放射性现象。居里夫妇受贝克勒尔启发，发现了钋、镭的放射性，并在艰苦的条件下提炼出辐射强度比铀强200万倍的镭元素。1897年，汤姆生发现了电子，打破了原子不可分的传统观念，电子和元素放射性的发现，打开了原子的大门，使人们的认识得以深入到原子的内部，这就为量子论的创立奠定了基础。量子论是反映微观粒子结构及其运动规律的科学。与此同时，在对电磁效应和时空关系的研究中相对论产生了。相对论将力学和电磁学理论以及时间、空间和物质的运动联系了起来。这是继牛顿力学、麦克斯韦电磁学以后的又一次物理学史上的大综合。量子论和相对论是现代物理学的两大支柱，它们是促成20世纪科学技术飞跃发展的理论基础。

20世纪四五十年代，第三次科技革命兴起。电子计算机的发明和应用是科技发展史上一项划时代的成就。蒸汽时代和电气时代的技术发明大都是延长人的四肢与感官功能，解放人的体力，而电子计算机却是延长了人大脑的功能。它开始替代人的部分脑力劳动，在一定程度上物化并放大了人类的智力，极大地增强了人类认识和改造世界的能力，现在更是广泛渗透和影响到人类社会的各个领域。

1.2.3 近、现代数学的发展和三大数学难题

1. 变量数学的诞生

文艺复兴以来资本主义生产力的兴起，对科学技术提出了全新的要求。机械的普遍使用引起了对机械运动的研究；航海事业的空前发达要求测定船舶位置，这就需要准确地研究天体运行的规律；武器的改进刺激了弹道问题的探讨。总之，到了16世纪，对运动与变化的研究已变成自然科学的中心问题，这就迫切地需要一种新的数学工具，从而导致了变量数学亦即近代数学的诞生。

变量数学的第一个里程碑是解析几何的诞生。解析几何的基本思想是在平面上引进所谓“坐标”的概念，并借助这种坐标在平面上的点和有序实数对(x, y)之间建立一一对应的关系。以这种方式可以将一个代数方程$f(x, y) = 0$与平面上一条曲线对应起来，于是几何问题便可归结为代数问题，并反过来通过代数问题的研究发现新的几何结果。笛卡儿(1596～1650年，法国人)发表了最有名的著作《谈谈正确运用自己的理性在各门学问里寻求真理的

方法》，通常简称为《方法论》。在《方法论》中附有三篇论文：《折光学》、《气象学》和《几何学》。在这三篇论文中，笛卡尔给出了用自己的方法做出发明的例子。笛卡儿的思想核心是，把几何学的问题归结成代数形式的问题，用代数学的方法进行计算、证明，从而达到最终解决几何问题的目的。依照这种思想他创立了我们现在所说的“解析几何学”。笛卡儿提出了一种大胆的计划，即：任何问题→数学问题→代数问题→方程求解。

费马(1601～1665 年，法国人)工作的出发点是试图恢复失传的阿波罗尼奥斯的著作《论平面轨迹》，从而在 1629 年写了一本名为《平面和立体的轨迹引论》的书，他试图用他所熟悉的代数形式描述阿波罗尼奥斯的结果。书中清晰地阐述了费马的解析几何原理，指出：“只要在最后的方程中出现两个未知量，就有一条轨迹，这两个量之一的末端描绘出一条直线或曲线。直线只有一种，曲线的种类则是无限的，有圆、抛物线、椭圆等等”。

变量被引入数学，成为数学中的转折点。变量被引进数学，使运动与变化的定量表述成为可能，从而为微积分的创立搭起了舞台。正如恩格斯所说：“数学中的转折点是笛卡儿的变数。有了变数，运动进入了数学，有了变数，辨证法进入了数学，有了变数，微分和积分也就立刻成为必要了。”从此数学进入一个新的以变数为主要研究对象的领域。

2. 近代三大数学难题之一——四色猜想

四色猜想的提出来自英国。1852 年，毕业于伦敦大学的弗南西斯·格思里来到一家科研单位搞地图着色工作时，发现了一种有趣的现象：看来，每幅地图都可以用四种颜色着色，使得有共同边界的国家着上不同的颜色。这个结论能不能从数学上加以严格证明呢？他和在大学读书的弟弟格里斯决心试一试。兄弟二人为证明这一问题而使用的稿纸已经堆了一大叠，可是研究工作没有进展。1852 年 10 月 23 日，他的弟弟就这个问题的证明请教他的老师、著名数学家德·摩尔根，摩尔根也没有能找到解决这个问题的途径，于是写信向自己的好友、著名数学家哈密尔顿爵士请教。哈密尔顿接到摩尔根的信后，对四色问题进行论证。但直到 1865 年哈密尔顿逝世为止，问题也没有能够解决。1872 年，英国当时最著名的数学家凯利正式向伦敦数学学会提出了这个问题，于是四色猜想成了被世界数学界关注的问题。世界上许多一流的数学家都纷纷参加了四色猜想的大会战。1878～1880 年两年间，著名的律师兼数学家肯普和泰勒两人分别提交了证明四色猜想的论文，宣布证明了四色定理，大家都认为四色猜想从此也就解决了。11 年后，即 1890 年，数学家赫伍德以自己的精确计算指出肯普的证明是错误的。不久，泰勒的证明也被人们否定了。后来，越来越多的数学家虽然对此绞尽脑汁，但一无所获。于是，人们开始认识到，这个貌似容易的题目，实是一个可与费马猜想相媲美的难题。但是先辈数学大师们的努力，为后世的数学家揭示四色猜想之谜铺平了道路。进入 20 世纪以来，科学家们对四色猜想的证明基本上是按照肯普的想法在进行。1913 年，伯克霍夫在肯普的基础上引进了一些新技巧，美国数学家富兰克林于 1939 年证明了 22 国以下的地图都可以用四色着色。1950 年，有人将四色着色的地图从 22 国推进到 35 国。1960 年，有人又证明了 39 国以下的地图可以只用四种颜色着色；随后又推进到了 50 国。看来这种推进仍然十分缓慢。电子计算机问世以后，由于演算速度迅速提高，加之人机对话的出现，大大加快了对四色猜想证明的进程。1976 年，美国数学家阿佩尔与哈肯在美国伊利诺斯大学的两台不同的电子计算机上，用了 1200 个小时，作了 100 亿判断，终于完成了四色定理的证明。四色猜想的计算机证明，轰动了

世界。它不仅解决了一个历时 100 多年的难题，而且有可能成为数学史上一系列新思维的起点。不过也有不少数学家并不满足于计算机取得的成就，他们还在寻找一种简洁明快的书面证明方法。

3．近代三大数学难题之二——费马最后定理

被公认执世界报纸牛耳地位的《纽约时报》于 1993 年 6 月 24 日在其一版头题刊登了一则有关数学难题得以解决的消息，那则消息的标题是“在陈年数学困局中，终于有人呼叫‘我找到了’”。时报一版的开始文章中还附了一张留着长发、穿着中古世纪欧洲学袍的男人照片。这个古意盎然的男人，就是法国的数学家费马。费马是 17 世纪最卓越的数学家之一，他在数学许多领域中都有极大的贡献，因为他的本行是专业的律师，为了表彰他的数学造诣，世人冠以“业余王子”之美称。在 360 多年前的某一天，费马正在阅读一本古希腊数学家戴奥芬多斯的数学书时，突然心血来潮在书页的空白处，写下一个看起来很简单的定理，这个定理的内容是有关一个方程式 $x^n + y^n = z^n$ 的正整数解的问题，当 $n = 2$ 时就是我们所熟知的毕氏定理(中国古代又称勾股弦定理)：$x^2+y^2=z^2$，此处 z 表示一直角形之斜边而 x、y 为其之两股，也就是一个直角三角形之斜边的平方等于它的两股的平方和，这个方程式当然有整数解(其实有很多)，例如：$x = 3$、$y = 4$、$z = 5$；$x = 6$、$y = 8$、$z = 10$；$x = 5$、$y = 12$、$z = 13$ 等等。费马声称当 $n>2$ 时，就找不到满足 $x^n+y^n=z^n$ 的整数解，例如：方程式 $x^3+y^3=z^3$ 就无法找到整数解。当时费马并没有说明原因，他只是留下这个叙述并且也说他已经发现这个定理的证明妙法，只是书页的空白处不够无法写下。始作俑者的费马也因此留下了千古的难题，300 多年来无数的数学家尝试要去解决这个难题却都徒劳无功。这个号称世纪难题的费马最后定理也就成了数学界的心头大患，极欲解之而后快。19 世纪时法国的法兰西斯数学院曾经在 1815 年和 1860 年两度悬赏金质奖章和 300 法郎给任何解决此难题的人，可惜都没有人能够领到奖赏。德国的数学家佛尔夫斯克尔，在 1908 年提供十万马克给能够证明费马最后定理是正确的人，有效期为 100 年。其间由于经济大萧条的原因，此笔奖额已贬值至 7500 马克，虽然如此仍然吸引不少的“数学痴”。

20 世纪计算机发展以后，许多数学家用计算机计算可以证明这个定理当 n 为很大时是成立的，1983 年计算机专家斯洛文斯基借助计算机证明当 n 为 286243–1 时费马定理是正确的。虽然如此，数学家还没有找到一个普遍性的证明。不过这个 300 多年的数学悬案终于解决了，这个数学难题是由英国的数学家威利斯所解决的。其实威利斯是利用 20 世纪过去三十年来抽象数学发展的结果加以证明。

20 世纪 50 年代，日本数学家谷山丰首先提出一个有关椭圆曲线的猜想，后来由另一位数学家志村五郎加以发扬光大，当时没有人认为这个猜想与费马定理有任何关联。直到 20 世纪 80 年代，德国数学家佛列将谷山丰的猜想与费马定理扯在一起，而威利斯所做的正是根据这个关联论证出一种形式的谷山丰猜想是正确的，进而推出费马最后定理也是正确的。这个结论由威利斯于 1993 年 6 月 21 日在剑桥大学牛顿数学研究所的研讨会上正式发表，这个报告马上震惊了整个数学界，就是数学门墙外的社会大众也寄以无限的关注。不过威利斯的证明马上被检验出有少许的瑕疵，于是威利斯与他的学生又花了十四个月的时间再加以修正。1994 年 9 月 19 日他们终于交出完整无瑕的解答，数学界的梦魇终于结束。1997 年 6 月，威利斯在德国哥庭根大学领取了佛尔夫斯克尔奖。当年的十万法克约为

两百万美金，不过威利斯领到时，只值五万美金左右，但威利斯已经名列青史，永垂不朽了。要证明费马最后定理是正确的(即 $x^n+y^n=z^n$ 对 n 大于 3 均无正整数解)只需证 $x^4+y^4=z^4$ 和 $x^p+y^p=z^p$ (p 为奇质数)都没有整数解。

4. 近代三大数学难题之三——哥德巴赫猜想

哥德巴赫是德国一位中学教师，也是一位著名的数学家，生于 1690 年，1725 年当选为俄国彼得堡科学院院士。1742 年，哥德巴赫在教学中发现，每个不小于 6 的偶数都是两个素数(只能被和它本身整除的数)之和。如 6 = 3 + 3，12 = 5 + 7 等等。1742 年 6 月 7 日，哥德巴赫写信将这个问题告诉给意大利大数学家欧拉，并请他帮助作出证明。欧拉在 6 月 30 日给哥德巴赫的回信中说，他相信这个猜想是正确的，但他不能证明。叙述如此简单的问题，连欧拉这样首屈一指的数学家都不能证明，这个猜想便引起了许多数学家的注意。他们对一个个偶数开始进行验算，一直算到 3.3 亿，都表明猜想是正确的。但是对于更大的数目，猜想也应是对的，然而不能作出证明。欧拉一直到死也没有对此作出证明。从此，这道著名的数学难题引起了世界上成千上万数学家的注意。200 年过去了，没有人证明它。哥德巴赫猜想由此成为数学皇冠上一颗可望不可及的“明珠”。到了 20 世纪 20 年代，才有人开始向它靠近。今日常见的猜想陈述为欧拉的版本，把命题“任何一个充分大的偶数都可以表示成为一个素因子个数不超过 a 个的数与另一个素因子不超过 b 个的数之和”，记作 a + b。1920 年，挪威数学家布爵用一种古老的筛选法证明，得出了一个结论：每一个比 6 大的偶数都可以表示为 9+9。这种缩小包围圈的办法很管用，科学家们于是从 9 +9 开始，逐步减少每个数里所含质数因子的个数，直到最后使每个数里都是一个质数为止，这样就证明了哥德巴赫猜想。1924 年，数学家拉德马哈尔证明了 7 + 7；1932 年，数学家爱斯尔曼证明了 6 + 6；1938 年，数学家布赫斯塔勃证明了 5 + 5，1940 年，他又证明了 4 + 4；1956 年，数学家维诺格拉多夫证明了 3 + 3；1958 年，我国数学家王元证明了 2 + 3。随后，我国年轻的数学家陈景润也投入到对哥德巴赫猜想的研究之中，经过 10 年的刻苦钻研，终于在前人研究的基础上取得重大的突破，率先证明了 1 + 2。至此，哥德巴赫猜想只剩下最后一步 1 + 1 了。陈景润的论文于 1973 年发表在中国科学院的《科学通报》第 17 期上，这一成果受到国际数学界的重视，从而使中国的数论研究跃居世界领先地位，陈景润的有关理论被称为“陈氏定理”。1996 年 3 月下旬，当陈景润即将摘下数学王冠上的这颗明珠，“在距离哥德巴赫猜想 1 + 1 的光辉顶峰只有咫尺之遥时，他却体力不支倒下去了……”在他身后，将会有更多的人去攀登这座高峰。

1.3 数理科学两个伟大的成就

1.3.1 微积分——人类智慧最伟大的成就

莱布尼茨曾说：“在从世界开始到牛顿生活的时代的全部数学中，牛顿的工作超过了一半”。的确，牛顿除了在天文及物理上取得伟大的成就，在数学方面，他从二项式定理到微积分，从代数和数论到古典几何和解析几何、有限差分、曲线分类、计算方法和逼近论，甚至在概率论等方面，都有创造性的成就和贡献。而牛顿发明的微积分被称为最伟大

的数学成就或人类最伟大的科学成就。可以毫不夸张地说，现代社会是靠微积分支撑的。

微积分学是微分学和积分学的总称。它是一种数学思想，“无限细分”就是微分，“无限求和”就是积分。微积分是高等数学中研究函数的微分、积分以及有关概念和应用的数学分支。它是数学的一个基础学科，内容主要包括极限、微分学、积分学及其应用。微分学包括求导数的运算，是一套关于变化率的理论。它使得函数、速度、加速度和曲线的斜率等均可用一套通用的符号进行讨论。积分学，包括求积分的运算，为定义和计算面积、体积等提供一套通用的方法。

1．我国的微积分思想萌芽

公元前 5 世纪，战国时期名家的代表作《庄子·天下篇》中记载了惠施的一段话：“一尺之棰，日取其半，万世不竭”，是我国较早出现的极限思想。

2．西方的微积分思想萌芽

安提芬在研究化圆为方问题时，提出用圆内接正多边形的面积穷竭圆面积，从而求出圆面积，即“穷竭法”。之后，阿基米德借助穷竭法解决了一系列几何图形的面积、体积计算问题。刺激微分学发展的主要科学问题是求曲线的切线、求瞬时变化率以及求函数的极大值、极小值等问题。

3．17 世纪微积分的酝酿

第一类问题是，已知物体的移动的距离表为时间函数的公式，求物体在任意时刻的速度和加速度使瞬时变化率成为当务之急；第二类问题是，望远镜的光程设计使得求曲线的切线问题不可回避；第三类问题是，确定炮弹的最大射程以及求行星离开太阳的最远和最近距离等涉及的函数极大值、极小值问题也急待解决；第四类问题是，求行星沿轨道运动的路程、行星矢径扫过的面积以及物体重心与引力等，使面积、体积、曲线长、重心和引力等微积分基本问题的计算被重新研究。意大利数学家卡瓦列里在其著作《用新方法促进的连续不可分量的几何学》(1635 年)中发展了系统的不可分量方法。卡瓦列里认为线是由无限多个点组成，面是由无限多条平行线段组成，立体则是由无限多个平行平面组成。他分别把这些元素叫做线、面和体的“不可分量”。卡瓦列里建立了一条关于这些不可分量的普遍原理，后以“卡瓦列里原理”著称。 笛卡尔的代数方法在推动微积分的早期发展方面有很大的影响，牛顿就是以笛卡尔圆法为起跑点而踏上研究微积分的道路的。德国天文学家、数学家开普勒的无限小元法，以及 17 世纪上半叶一系列先驱性的工作，沿着不同的方向向微积分的大门逼近，但所有这些努力还不足以标志微积分作为一门独立科学的诞生。

4．微积分的创立

牛顿对微积分问题的研究始于 1664 年秋，当时他反复阅读笛卡尔《几何学》，对笛卡尔求切线的“圆法”发生兴趣并试图寻找更好的方法。就在此时，牛顿首创了小○记号表示 x 的无限小且最终趋于零的增量。1665 年 11 月发明“正流数术”(微分法)，次年 5 月又建立了“反流数术”(积分法)。1666 年 10 月，牛顿将前两年的研究成果整理成一篇总结性论文，此文现以《流数简论》著称，是历史上第一篇系统的微积分文献。

5．莱布尼茨的微积分

不同于研究微积分着重于从运动学来考虑，莱布尼茨研究微积分侧重于从几何学来考