“2110 工程” 建设系列教材

实变函数与泛函分析

SHI BIAN HAN SHU YU FAN HAN FEN XI

刘占生 倪大平 编著

中国人民解放军信息工程大学

实变函数与泛函分析

刘战生　倪大平　编著

中国人民解放军信息工程学院

序　　言

为适应教学改革的需要。我们在多年教学的基础上编写了本教材。

本书前四章为实变函数论。这是数学分析中微积分理论的进一步深入。内容包括点集、测度与可测函数，L 积分理论等。以勒贝格积分理论为重点，采用内、外测度的方法构造点集的测度，用简单函数的积分引进 L 积分，以期符合由浅入深、由特殊到一般的认识规律。突出了集的转化与表示等集论的观点与方法，我们认为，这是学好实变函数的关键所在。后三章是泛函分析。它综合地运用分析、代数和几何的观点、方法研究分析数学的一般问题。内容包括度量空间，赋范线性空间及线性算子理论，Hilbert 空间等。为了使学生了解本学科中抽象的必要性及应用的广泛性，我们曾作了一定的努力。鉴于概率论、微分方程等后续课的需求，我们还安排了 RS 积分、LS 积分及压缩映象原理等内容。

在编写的过程中，我们注意做到选取精简的材料，保持这两门学科的核心部分，而不在叙述上压缩辞句。尽可能地让读者看出新概念、新理论的引进是很自然的，甚至是不可避免的，这样才能使读者对所学知识产生真正的兴趣，才能非形式化地理解所学的东西。课文里推理都详尽地写了出来，以减少读者的困难。书中还给出了不少典型例题以说明基本概念、基本理论及基本方法。文中带“*”号的内容可供学有余力的学员阅读。各章节未均附有习题，以供教学时选用。

在编写的过程中，系首长、教研室领导及教保处的同志给予了我们大力支持与鼓励。分析函数论教研室的刘宗仁副教授仔细地审阅了初稿，黄晓英、杨录山、马德室等同志对本教材的编写也提出了不少宝贵意见。编者在此谨对他们致以衷心的感谢。由于我们水平有限，加之时间仓促，书中错误在所难免。殷切地期望同志们、读者们随时给予批评和指教。

编者

1993 年 8 月于郑州

目　　录

第七章 HiLbert空间

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　集合与点集

本书的前四章是实变函数论，它是在集合论的观点与方法渗入数学分析的基础上产生的。这部分的中心内容是测度论和积分论，我们主要介绍勒贝格（H·Lebesgue）测度论与积分论。这是数学分析课程中微积分理论的进一步深入。同时，这一部分内容也为进一步学习分析数学中的一些专门理论，如函数论、概率论、泛函分析、微分方程等提供必要的测度和积分论基础。

本章介绍一些有关集合论和点集论的基本知识。

§1 集合及其运算

1.集合的概念

集合是数学中的原始概念之一，即不能用别的概念加以定义。正象几何学中的“点”、“直线”那样，只能用一组公理去刻划。这是集论研究的范围，这里不予涉及。

目前我们只要求掌握以下朴素的说法：

“由具有某种特定性质的具体的或抽象的事物的全体组成一集（或称集合），其中的成员称为这个集合的元素。”

例如，在代数中，群、环、域等都是某种集合，这种集合的各个元素之间具有一定的代数关系；在几何学中，直线、曲线、曲面等都可看作是由点所组成的集；数学分析中的实数集、连续函数集、某函数的定义域都是常用的集。

以后我们用大写字母 A、B、X、Y…表示集，而用小写字母 a,b,x,y,…表示元素。

对于一个集合 A 来说，某一事物 x 或者是集的元素--这时，我们说 x 属于 A，记为 $x \in A$；或者 x 不是集合 A 的元素--即 x 不属于 A，记为 $x \bar{\in} A$，二者必居其一。

设 P(x)是某一与 x 有关的条件，所有符合这个条件的事物 x 作成一个集合，我们用 $E[x|p(x)]$表示。例如,如果 f(x)是某一集合 E 上定义的实函数,则$E[x|f(x)>a]$就表示 E 中所有使 f(x)的值大于 a 的 x 所组成的集。

下面我们研究集的关系。

定义 1.1　设 A，B 是两个集合，若 A 的每个元素都属于 B，则称 B 包含 A，或称 A 是 B 的子集，记为 $A \subset B$。

显然，$A \subset B \rightleftharpoons$“任意 $x \bar{\in} B \Rightarrow x \bar{\in} A$”。

包含关系“$\subset$”具有下列性质：

（1）反身性：$A\subset A$。

（2）传递性：若 $A\subset B$，$B\subset C$ 则 $A\subset C$。

（3）空集 $\Phi\subset A$（$\because$ $x\bar{\in}A\Rightarrow x\bar{\in}\Phi$）

定义 1.2 若集合 A 与 B 是由相同的元素组成,称 A 等于 B,记为 $A=B$。

定理 1.1 $A=B\rightleftharpoons A\subset B$,且 $B\subset A$

这是验证两集合相等的最基本的方法。

2、集合的运算

定义 1.3 设 A，B 是两个集，由 A 同 B 的一切元素所组成的集称为集合 A 与集合 B 的并集，记为 $A\bigcup B$；所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集称为 A 与 B 的交集，记为 $A\bigcap B$；由属于 A 而不属 B 的一切元素组成的集称为 A 与 B 之差，记为 $A-B$。

完全类似地可以定义任意个集的并集及交集。

设$\{A_\alpha|\alpha\in I\}$是任意一组集,其中 α 是集的指标,它在某个固定的指标集 I 中变化,由一切 $A_\alpha(\alpha\in I)$的所有元素所组成的集,称这组集的并集记为$\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$;同时属于每个集 $A_\alpha(\alpha\in I)$的一切元素所组成的集,称做这组集的交集,记为$\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$。显然,

$$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x|存在\alpha_0\in I,x\in A_{\alpha_0}\};$$

$$\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x|任意\alpha\in I,x\in A_\alpha\};$$

$$A-B=\{x|x\in A 且 x\bar{\in}B\}。$$

集合的交、并运算与数之间的积、和运算有类似的性质。我们有

定理 1.2 集合交,并运算满足结合律、交换律及分配律。即

（1）$A\bigcup(B\bigcup C)=(A\bigcup B)\bigcup C$;

$A\bigcap(B\bigcap C)=(A\bigcap B)\bigcap C$

（2）$A\bigcup B=B\bigcup A$

$A\bigcap B=B\bigcap A$

（3）$A\bigcap(\bigcup\limits_{\alpha\in I}B_\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha\in I}(A\bigcap B_\alpha)$

证:仅证(3):

$$x\in A\bigcap(\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha)\rightleftharpoons x\in A 且 x\in\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha$$

$$\rightleftharpoons x \notin A, \text{且存在} \alpha_0 \in I, x \in B_{\alpha_0}$$

$$\rightleftharpoons x \in A \bigcap B_{\alpha_0}, (\alpha_0 \in I)$$

$$\rightleftharpoons x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A \bigcap B_\alpha)$$

由定理 1.1 即知(3)成立。

我们需要注意的是，集合间的交，并运算与数之间积、和运算的不同性质。

定理 1.3 (幂等性) $A \bigcup A = A$

$A \bigcap A = A$

定理 1.4 $(A-B) \bigcup B = A$ 的充要条件是 $B \subset A$

证"⇒"显然。

"<="若 $B \subset A$,由 $A-B \subset A$,故有

$$(A - B) \bigcup B \subset A \tag{1}$$

另一方面,对任意 $x \in A$,若 $x \in B$ 则 $x \in (A-B) \bigcup B$ 若 $x \bar{\in} B$,则 $x \in A-B$,进而也有 $x \in (A-B) \bigcup B$,故

$$A \subset (A - B) \bigcup B \tag{2}$$

由(1)、(2)及定理 1.1 $A = (A-B) \bigcup B$ 定理得证。

关于集合的减法运算,我们有

定理 1.5 (1)若 $B \subset A$ 则 $B-A = \Phi$

(2)$(A-B) \bigcap C = (A \bigcap C) - (B \bigcap C)$

(3)$(C-A)-B = C-(A \bigcup B)$

定义 1.4 若 $B \subset A$,称 $A-B$ 为 B 关于 A 的余集,记为 $C_A B$,在某一问题中,若所考虑的集皆是某一集 X 的子集,称 X 为基本集,$X-A$ 称为 A 关于 X 的余集,简称 A 的余集,记为 CA。

关于余集的运算,有下列重要的

定理 1.6 对偶原理(笛摩根 De · Morgan 法则)

设 X 是基本集,$A_\alpha(\alpha \in I)$是 X 的子集,则

(1) $C(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in I} (CA_\alpha)$

(2) $C(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} (CA_\alpha)$

证 $x \in C(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha)$

$$\rightleftharpoons \quad x \bar{\in} \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$$

$$\rightleftharpoons \quad \text{对一切}\alpha\in I, x\bar{\in} A_\alpha$$

$$\rightleftharpoons \quad \text{对一切}\alpha\in I, x\in CA_\alpha$$

$$\rightleftharpoons \quad x\in \bigcap_{\alpha\in I}(CA_\alpha)$$

由定理 1.1, (1)式成立。

由(1)式取余集,$C(C\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha)=C(\bigcap_{\alpha\in I}(CA_\alpha))$,

$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=C(\bigcap(CA_\alpha))$,再把 A_α 换成 CA_α 即得(2)。定理得证。

3、函数与集合

在实变函数论中，利用集来分析函数的性质时，常要用到下面类型的集合。当集合 E 上的一个实函数 f 给定后，对于任意给定的实数 C，我们记

$$E(f\geqslant C)=\{x|x\in E,f(x)\geqslant C\}$$
$$E(f>C)=\{x|x\in E,f(x)>C\}$$

等等,它们都是由 f 决定的,而且是与 f 有密切联系的集。为了第三章的需要，我们先让读者对这些集的性质、运算作一些了解。例如它们有如下一些关系式:

(1) $E(f\geqslant C)UE(f<c)=E$

(2) $E(f>c)\bigcap E(f\leqslant d)=E(C<f\leqslant d)$

(3) $E(f^2>C)=E(f>\sqrt{c})\bigcup E(f<-\sqrt{c}),(C\geqslant 0)$

(4) $E(f>C)=\bigcup_{n=1}^{\infty}E(f\geqslant C+\frac{1}{n})$

证存在我们仅证(4)。 $x\in E(f>C)\Rightarrow f(x)>C$

$\Rightarrow$ 自然数 n_0,使得$f(x)\geqslant\frac{1}{n_0}+C$

$\Rightarrow \quad x\in E(f\geqslant C+\frac{1}{n_0})$

$\Rightarrow \quad x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}E(f\geqslant C+\frac{1}{n})$

以上推理的每一步骤都是可逆的,由定理 1.1,(4)成立。

例 1 设 f(x),g(x)是定义在集合 E 上的实函数,试证明,对于一切 $C>0$,

$$E(|f+g|\geqslant C)\subset E(|f|\geqslant \frac{C}{2})\bigcup E(|g|\geqslant \frac{C}{2})$$

证 $\qquad x\overline{\in}E(|f|\geqslant \frac{C}{2})\bigcup E(|g|\geqslant \frac{C}{2})$

$$\Rightarrow \quad |f(x)|<\frac{C}{2},且|g(x)|<\frac{C}{2},$$

$$(由于|f(x)+g(x)|\leqslant |f(x)|+|g(x)|<\frac{C}{2}+\frac{C}{2}=C)$$

$$\Rightarrow x\overline{\in}E(|f+g|\geqslant C)$$

故欲证之包含关系式成立。

例 2 设点集 E 上实函数列 $\{f_n(x)\}(n=1,2,\cdots)$有极限函数 f(x), 试证明, 对任意实数 C

$$E(f>C)=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}E(f_n>C+\frac{1}{k})$$

证 $\qquad$ 任取 $x\in E(f>C)\rightleftharpoons f(x)>C$

$\rightleftharpoons$存在自然数 N_0 及 k_0,当 $n>N_0$ 时,

$$f_n(x)>C+\frac{1}{k_0} \qquad (\because \lim_{n\to\infty} f_n f(x)=f(x)>c),$$

$$\rightleftharpoons \quad x\in \bigcap_{n=N_0}^{\infty}E(f_n>C+\frac{1}{k_0})$$

$$\rightleftharpoons \quad x\in \bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}E(f_n>C+\frac{1}{k_0})$$

$$\rightleftharpoons \quad x\in \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}E(f_n>C+\frac{1}{k})$$

由定理 1.1,即得欲证之等式

读者试自行证明,在例 2 中,若取基本集 $x=[a,b]$,则

$$CE(f>c)=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}E(f_n\leqslant c+\frac{1}{k})$$

在实变函数论中,有时也常会遇到要用函数来研究集的性质。下面的特征函数

便是这方面的一个重要例子。

例 3　设 X 是一个固定的非空集,又设 A 是 X 的一个子集。作 X 上的函数

$$x_A(x)=\begin{cases}1 & \text{当} x\in A\\0 & \text{当} x\in X-A\end{cases}$$

称$X_A(x)$为集 A 的特征函数。特征函数与集之间有下列重要关系:

(1)　$x_A(x)=X_B(x)\rightleftharpoons A=B$

(2)　$x_A(x)\equiv 1\rightleftharpoons A=X$

$x_A(x)\equiv 0\rightleftharpoons A=\Phi$

(3)　$x_A(x)\leqslant x_B(x)\rightleftharpoons A\subset B$

(4)　$$\left.\begin{array}{l}x_{\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha}(x)=\max\limits_{\alpha\in I}x_{A_\alpha}(x)\\x_{\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha}(x)=\min\limits_{\alpha\in I}x_{A_\alpha}(x)\end{array}\right\}$$

请读者自行证明。

习　　题

1.证明下列关系:

(1)$(A-B)\bigcap(C-D)=(A\bigcap C)-(B\bigcup D)$

(2)$(A\bigcap B)\bigcup C=(A\bigcup C)\bigcap(B\bigcup C)$

(3)$A-(B-C)\subset(A-B)\bigcup C$

(4)问$(A-B)\bigcup C=A-(B-C)$成立的充要条件为何?

2.证明:

(1)$\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha-B=\bigcup\limits_{\alpha\in I}(A_\alpha-B)$

(2)$\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha-B=\bigcap\limits_{\alpha\in I}(A_\alpha-B)$

3.设 f(x)是集合 E 上的一个实函数,C 是任何实数,证明:

(1)$E(f>C)\bigcup E(f<C)=E$

(2)$E(f>c)\bigcap E(f=c)=\Phi$

(3)当 $c<d$ 时　　$E(f>c)\bigcap E(f<d)=E(c<f<d)$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

(4)当 f>g 时　　$E(f>c)\supset E(g>c)$

4.设 f 是定义在集 E 上的实函数,C 是任何实数,证明:

(1)$E(C\leqslant f)=\bigcup_{n=1}^{\infty}E(c\leqslant f<c+n)$

(2)$E(f<c)=\bigcup_{n=1}^{\infty}E(f\leqslant c-\frac{1}{n})$

5.设$\{f_n(x)\}$是 $E=[a,b]$上的实函数列,

$f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant\cdots$,并且 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$

证明:

(1)$E(f(x)>c)=\bigcup_{n=1}^{\infty}E(f_n(x)>c)$

(2)$E(f(x)\leqslant c)=\bigcap_{n=1}^{\infty}E(f_n(x)\leqslant c)$

6.证明例 3 中的结论。

7*.设$\{f_n(x)\}$是 E 上的函数列,$f(x)$定义在 E 上,试证明:

$A=\{x|x\in E,\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\}$

$=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}E(x|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon_k\}$其中$\varepsilon_k\downarrow 0(k\to\infty)$

又问,使 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\neq f(x)$E 中的点集应如何表示?

8.设 $A_1,A_2,\cdots A_n,\cdots$为一列集,若记$\overline{A}$为这样的元素的全体,有无限多个 A_n 都含有这种元素。又记$\underline{A}$为这样的元素的全体,只有有限个 A_n 不含这种元素。证明

$$\overline{A}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$$

$$\underline{A}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k$$

且

$$\bar{A} \subset \bar{\bar{A}}$$

§2 集合的势与势的比较*

1.集合势的概念:

粗略地说,"势"是反映集合所含元素"数目"多少的。在适当定义"势"的概念之下,势相等的两个集合可以把它们的元素看作"一样"多。做出势的定义的最适当的工具是两个集合之间的 1-1 映射。

定义 2.1 若集合 A 与 B 之间存在 1-1 映射 φ,则称 A 与 B 对等,记为 A～B;或称 A 与 B 的势相同,记为$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$。

对等概念对于研究无限集是十分重要的。关于对等,易见有下列性质:

(1)反身性:A～A。

(2)对称性:若 A～B,则 B～A。

(3)传递性:若 A～B,B～C,则 A～C。

由对等的意义可知,当两个有限集互相对等时,它们的元素个数必相同。至于无限集,采用元素个数一词就不适宜,但对等的概念仍然可用。可以看出,势的概念是经过两次抽象产生的;首先是不必考虑集合元素的具体属性;其次,把用自然数编号建立数目多少的概念进一步抽象,这就是用$\overline{\overline{A}}$记集合 A 的势的原由。

例 1 $N=\{1,2,\cdots,n\cdots\}\sim S=\{2,4,\cdots 2n\}$

其实,存在 1-1 映射 $\varphi:\varphi(n)=2n,(n=1,2,\cdots)$,可知$\overline{\overline{N}} = \overline{\overline{S}}$。

例 2 $A=(0,1)\sim B=(0,+\infty)$

其实,令 $\varphi(x)=\dfrac{x}{1-x}$, $x\in(0,1)$,由

$\varphi'(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}>0,\varphi''(x)=\dfrac{2}{(1-x)^2}>0$,故 $\varphi(x)$在$(0,1)$上严格单调增,且下凸,可知 φ 是 A 与 B 之间的一个 1-1 映射,故 A～B,即$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$。

上述两例说明,无限集可以与它的一个真子集对等,这是无限集与有限集的一个重要区别。

2.可数集

定义 2.2 凡与自然数全体之集 $N=\{1,2\cdots,n,\cdots\}$对等的集称为可数集,或称可列集,其势记为 a。

定理 2.1 A 为可数集的充要条件是 A 的元素可以编号,使其成为无穷序列,$A=\{a_1,a_2,\cdots a_n\cdots\}$。

定理 2.2 可数集之势 a 有如下运算性质:

(1)$a+m=a$ (m 为任意正整数)

(2)$a+a=a$

(3)$a\cdot a=a$

证:仅证(3),不失一般性,设$\overline{\overline{A}}_i=a,(i=1,2\cdots)$

且$A_i\cap A_j=\varphi,(i\neq j)$ 往证 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=a$。记

$$
\begin{aligned}
&A_1=\{a_{11},a_{12},a_{13},\cdots,a_{1n},\cdots\}\\
&A_2=\{a_{21},a_{22},a_{23},\cdots,a_{2n},\cdots\}\\
&A_3=\{a_{31},a_{32},a_{33},\cdots,a_{3n},\cdots\}\\
&\cdots \qquad\qquad \cdots\\
&A_n=\{a_{n1},a_{n2},a_{n3},\cdots,a_{nn},\cdots\}\\
&\cdots \qquad\qquad \cdots
\end{aligned}
$$

称 $p+q=h$ 为元素a_{pq} $(p,q=1,2\cdots)$的高度,按高度大小编号,在同一高度中按 q 的值由小到大编号,这样把$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$的一切元素按箭头所指顺序编成一无穷序列,由定理 2.1 可证得(3)成立。

推论:设 $A_i(i=1.2\cdots)$皆是可数集,则$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$也是可数集。

例 3 所有有理数作成一个可数集合。

证:设$A_i=\{\frac{1}{i},\frac{2}{i},\frac{3}{i}\cdots\}(i=1,2\cdots)$,则 A_i 是可数集,由定理 2.3 的推论知,所有有理正数组成的集合$R^+=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$是可数集,同理所有负有理数组成的集合 R^-也是可数集,故全体有理数集 $R=R^++R^-+\{0\}$是可数集。

定理 2.3 任何无限集皆可与它的真子集对等。

证　首先指出，任何一个无限集皆有可数子集。其实，设 A 为无限集，$a_1 \in A$，则 $A-\{a_1\}$ 仍是无限集，再取 $a_2 \in A-\{a_1\}$，依次做下去，可得 $\{a_1,a_2,\cdots a_n,\cdots\} \subset A$ 令 $\tilde{A} = A - \{a_1,a_2,\cdots a_n\cdots\}$，由定理 1.4，$A = \tilde{A} + \{a_1,a_2\cdots\}$ 取 $\overline{A} = \tilde{A} + \{a_2,a_3\cdots\}$，则 $\overline{A}$ 是 A 的一个真子集。于是，映射 $\varphi:\varphi(a_i) = a_{i+1}\quad(i = 1,2\cdots);\varphi(x) = x,(x\in\tilde{A})$ 是 A 与 $\overline{A}$ 之间的 1-1 映射，故 $A \sim \overline{A}$。

定义 2.3　凡能与真子集对等的集称为无限集，否则称为有限集。

3.不可数集

下面定理说明不可数集是存在的。

定理 2.4　区间[0,1]中的点是不可数的。

证　用反证法。假定[0,1]中的点可数，由定理 2.1，把[0,1]中一切点编号为

$$x_1,x_2,\cdots x_n,\cdots$$

把闭区间[0,1]三等分，则显见 $[0,\frac{1}{3}]$ 与 $[\frac{2}{3},1]$ 中总有一个区间不含 x_1，用 I_1 表示这个闭区间。把 I_1 三等分，在它们的左与右两个闭区间中总有一个不含 x_2，用 I_2 表示这个闭区间。同样，把 I_2 三等分，可得不含 x_3 的一个闭区间 I_3，等等。据归纳法，便得到一列闭区间 $\{I_n\}$。由作法知;

(1)　$I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$

(2)　$X_n \overline{\in} I_n \qquad (n = 1,2,\cdots)$

(3)　$|I_n| = \frac{1}{3^n} \to 0 \qquad (n\to\infty)$

由分析中区间套定理，存在唯一的一点 $\xi\in I_n\,(n = 1,2\cdots)$，由于 $x_n \overline{\in} I_n$，故 ξ 不会是任一 x_n，但 ξ 是[0,1]中的点，出现了矛盾。这表明[0,1]中的点是不可数的。

定义 2.4　凡与[0,1]中的点组成之集对等的集其势为 c，或称具有连续统的势。

易见，全体实数之集，其势 $\overline{\overline{R}} = c$。

定理 2.5　任何无限集加上一个可数集，其势不变。

证　设 A 为无限集，B 为可数集，且 $A\cap B = \Phi$，由定理 2.3 的证明过程可知，存在可数集 $M\subset A$。由定理 1.4 知，

$$A = (A-M)+M$$

而　　$A+B = (A-M)+(M+B),\overline{\overline{M + B}} = a$

因此　　$A\sim A+B$

推论：c+a = c

定理 2.6　非可数的无限集减去可数集，其势不变。

证　设 A 是非可数的无限集，则存在可数集 $M\subset A$，显然 $A-M$ 仍是非可数无限

集,进而由定理 2.5 可得

$$A=(A-M)+M\sim A-M$$

由此可见,全体无理数之势为 c,若仅就势而言,有理数集在实数集中是微不足道的,尽管有理数在实数集中处处稠密。

我们看到,无限集的势中以 a 与 c 较简单。1878 年康托(G.Cantor)曾提出连续统假设,即 a 与 c 中间,没有第三种势存在。这个问题看来很简单,但多少年来没有得到证明。直到 1966 年才被人证明,此假设与集合论公理系是独立的。

4.势的比较*

关于势的大小比较,仍然借用对等定义。

定义 2.5 设 A,B 为两个集合,假定 A 与 B 不对等,而 A 与 B 的一个真子集 B_0 对等,则称 A 的势小于 B 的势,或 B 的势大于 A 的势,记为$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$。

定理 2.7 设 B 的势为 μ,用 2^{μ} 表示 B 的一切子集之集 A 的势,则有 $2^{\mu}>\mu$。

证 若 B 是有限集,$B=\{a_1,a_2,\cdots a_n\}$,那么 A 的元素是 Φ,$\{a_1\},\cdots\{a_n\},\{a_1,a_2\},\cdots\{a_{n-1},a_n\},\cdots\{a_1,a_2,\cdots a_n\}$。它共有$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^0=2^n$ 个元素,显然$2^n>n$。

若 B 是无限集,显然,$A\sim A_0=\{\{x\}|x\in A\}\subset A$,以下用反证法证明 B 与 A 不对等。若 B 与 A 之间存在 1-1 映射 φ,任取 $x\in B$,则 $\varphi(x)\in A$,根据 x 与 $\varphi(x)$之间的关系:

(1)若 $x\in\varphi(x)$,称 x 为好元素,

(2)若$x\overline{\in}\varphi(x)$,称 x 为坏元素。

例如,当 $\varphi(x)=B\in A$ 时,x 为好元素;当 $\varphi(x)=\Phi$ 时,x 为坏元素。记 B 中一切坏元素之集为 $Q\in A$,由反证假设存在 $a\in B,\varphi(a)=Q$,于是导致下列矛盾:

若 a 是好元素,则 $a\in\varphi(a)=Q$,这是不可能的;

若 a 是坏元素,$a\overline{\in}\varphi(a)=Q$,这也是不可能的。

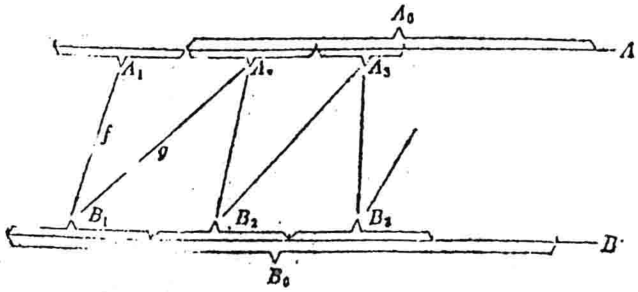
这说明 B 与 A 之间不存在 1-1 映射,即 B 与 A 不对等。由定义 1.5 知,$\overline{\overline{B}}<\overline{\overline{A}}$。

关于势的比较,有下列

定理 1.8 (伯恩斯坦 F·Bernstein,1898)

设 A,B 是两个集合,如果 A 对等于 B 的子集 B_0,B 又对等于 A 的子集 A_0,那末 A 与 B 对等,即$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$。

证 由假设存在 A 与 B_0 之间的 1-1 映射 f,又存在 B 与 A_0 之间的 1-1 映射 g。



(定理 1.8 证明示意图)

令 $A_1 = A - A_0$， $f(A_1) = B_1 \subset B_0$，

$g(B_1) = A_2 \subset A_0$， $f(A_2) = B_2 \subset B_0$，

$g(B_2) = A_3 \subset A_0$ $f(A_3) = B_3 \subset B_0$，

…… ……

显然 $A_i \cap A_j = \Phi$; $B_i \cap B_j = \Phi$ $(i \neq j)$,由于

$A_n \overset{f}{\sim} B_n$， $B_n \overset{g}{\sim} A_{n+1}$ $(n = 1,2,\cdots)$,故有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \overset{f}{\sim} \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \overset{g}{\sim} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n+1}$$

进而有

$$B - \bigcup_{n-1}^{\infty} B_n \overset{g}{\sim} A_0 - \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n+1} = A - \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

根据定理 1.4

$$B = (B - \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) + \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \sim (A - \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) + \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$$

故 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com