普通高等教育“十二五”规划教材

微积分学习指导教程

郭卫华　王霞　编著

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

微积分学习指导教程

郭卫华　王　霞　编著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书为《微积分》配套的学习辅导教材。本书共分 10 章，每章内容由六部分组成：基本概念、性质与结论；典型例题分析；疑难问题解答；基础训练与提高训练；自测题；参考答案与提示. 书末附有 2014～2015 年全国硕士研究生入学考试数学三试题及答案.

本书可作为高等院校理、工、农、经类本科生学习微积分的辅导书，也可作为教师教学的参考书，还可作为学生考研的系统复习与基础训练用书.

图书在版编目(CIP)数据

微积分学习指导教程/郭卫华，王霞编著. —北京：科学出版社，2015
（普通高等教育“十二五”规划教材）
ISBN 978-7-03-045255-9

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①郭… ②王… Ⅲ. ①微积分-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 172239 号

责任编辑：宋 丽 袁星星 / 责任校对：王万红
责任印制：吕春珉 / 封面设计：东方人华平面设计部

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
新科印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2015 年 8 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2015 年 8 月第一次印刷 印张：21 1/4
字数：580 000

定价：40.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈新科〉）
销售部电话 010-62134988 编辑部电话 010-62135120-2047

前　　言

本书为《微积分》的配套辅导教材，全书共分 10 章，每章内容由六部分组成：第一部分为基本概念、性质与结论，主要对本章内容进行归纳，既简洁又详实；第二部分为典型例题分析，对每节内容的逐个知识点进行剖析，选编的例题题型多，覆盖面广，基本涵盖了本章各节典型的重、难点题目；第三部分为疑难问题解答，对每个章节的疑难问题给出了详细的解答；第四部分为基础训练与提高训练，旨在帮助学生通过训练，巩固基础，掌握本章节的基本知识、解题方法与技巧，其中带“*”的习题多为综合试题和近年来的考研试题，供学有余力和有志于考研的学生练习用；第五部分为自测题，重在覆盖面，基本涵盖了本章每一个知识点，难度略高于期中、期末考试题，这样有助于检验学生对本章内容的掌握情况，发现缺陷，从而为完成全部课程的学习奠定基础；第六部分为参考答案与提示，较难的试题给出了解题的思路及方法．书末附有 2014～2015 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题及参考答案，便于有志继续深造的同学同步完成考研备考，达到考研的能力和要求．

本书结构严谨，条理清晰，综合性强，并有较强的针对性和可操作性，便于自学。本书可作为综合大学，理工科大学，高等师范学校理、工、经各专业大学生学习微积分课程的辅导读物和同步训练教程．对于青年教师来说，本书是一本较好的教学参考书．对于报考研究生的大学生来说，本书也是一本较好的系统复习用书和基础训练教程．

本书由郑州轻工业学院郭卫华、王霞主持编著，由刘雅妹、何国亮、段淑娟、杨静、蒋钰、芦金梅、李乐、李昕担任副主编．在编写的过程中，融入了作者许多近年来微积分的教育教学研究成果，并博采众家之长，汲取了多本参考书的精华，在此向各位作者表示感谢．

由于时间仓促，加上作者水平有限，书中不足之处在所难免，殷切希望广大读者提出宝贵意见，以便改进和修正．

作　者

2015 年 2 月

目　录

第一章　函　　数

一、基本概念、性质与结论

1. 概念

（1）函数、分段函数.

（2）反函数、复合函数.

（3）基本初等函数、初等函数.

（4）经济学中常用函数.

1）需求函数与供给函数.

2）收益函数与成本函数.

3）利润函数.

2. 性质

（1）有界函数 $f(x)$： $x \in X \subset D$，存在 $M>0$，使 $|f(x)| \leqslant M$.

（2）单调增加（或单调减少）函数 $f(x)$： $x_1, x_2 \in X \subset D$，当 $x_1 < x_2$ 时，$f(x_1) < f(x_2)$（或 $f(x_1) > f(x_2)$）.

（3）奇（或偶）函数 $f(x)$：$x \in D$，D 关于原点对称，$f(-x) = -f(x)$（或 $f(-x) = f(x)$）.

（4）周期函数 $f(x)$： $x \in (-\infty, +\infty)$，存在 $T>0$，使 $f(x+T) = f(x)$.

3. 结论

初等函数的连续性：

（1）基本初等函数在它们的定义域内都是连续的.

（2）一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

二、典型例题分析

1. 求函数的定义域

例 1.1　（1）已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,5]$，求函数 $y = f(x^2 - x - 1)$ 的定义域；（2）已知 $f(x) = \cos x$，$f[g(x)] = 1 - x^2$，且 $0 \leqslant g(x) \leqslant \pi$，求 $g(x)$ 及其定义域.

解　（1）因为 $y = f(x)$ 的定义域为 $[-1,1]$，所以对于函数 $f(x^2 - x - 1)$ 应有 $-1 \leqslant x^2 - x - 1 \leqslant 5$，即有 $\begin{cases} x^2 - x \geqslant 0 \\ x^2 - x - 6 \leqslant 0 \end{cases}$.解不等式得 $\begin{cases} x \geqslant 1 \text{ 或 } x \leqslant 0 \\ -2 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$，故函数 $f(x^2 - x - 1)$ 的定义域为 $[-2,0] \cup [1,3]$.

（2）由题设及复合函数的定义可得 $f[g(x)]=\cos[g(x)]=1-x^2$，且$0\leqslant g(x)\leqslant\pi$，所以 $g(x)=\arccos(1-x^2)$．由$|1-x^2|\leqslant 1$解得 $x\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，故 $g(x)$ 的定义域为$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$．

评注　求初等函数的定义域有以下原则：

（1）分式的分母不能为零.

（2）根式中负数不能开偶次方.

（3）对数的真数不能为零和负数.

（4）$\arcsin x$或$\arccos x$ 的定义域为$|x|\leqslant 1$；$\tan x$ 的定义域为 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$；$\cot x$ 的定义域为 $x\neq k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$．

（5）复合函数的定义域，通常将复合函数看成一系列初等函数的复合，然后考察每个初等函数的定义域和值域，得到对应的不等式组，通过联立求解不等式组，就可得到复合函数的定义域.

（6）对于应用问题中的函数，其定义域由实际问题的具体含义确定.

2. 把复合函数分解为基本初等函数的复合

例 1.2　把下列函数分解为最简单的函数.

（1）$y=\sin^2\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$；（2）$y=3^{\arcsin^2(1+2x)}$．

解　由外向里进行分解.

（1）$y=u^2$，$u=\sin v$，$v=w^{-\frac{1}{2}}$，$w=1+x^2$；

（2）$y=3^u$，$u=v^2$，$v=\arcsin w$，$w=1+2x$．

例 1.3　函数 $y=\sqrt{1-u}$ 与 $u=1+\mathrm{e}^x$ 能否构成复合函数？为什么？

解　两个函数能否构成复合函数，取决于外层函数的定义域和内层函数的值域有没有公共部分．这里外层函数 $y=\sqrt{1-u}$ 的定义域为 $D_f=\{u\,|\,u\leqslant 1\}$，内层函数 $u=1+\mathrm{e}^x$ 的值域为 $R_u=\{u\,|\,1<u<+\infty\}$，由于交集为空集，即 $D_f\cap R_D=\varnothing$，因此函数 $y=\sqrt{1-u}$ 与 $u=1+\mathrm{e}^x$ 不能构成复合函数.

3. 求反函数

例 1.4　求 $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & x<-1\\ x^3+1, & -1\leqslant x\leqslant 2\\ 2x+5, & x>2\end{cases}$ 的反函数.

解　当$x<-1$时，$y=1-x^2$，得 $x=-\sqrt{1-y}$，$y<0$;

当$-1\leqslant x\leqslant 2$时，$y=x^3+1$，得到 $x=\sqrt[3]{y-1}$，$0\leqslant y\leqslant 9$;

当$x>2$时，$y=2x+5$，得到 $x=\dfrac{y-5}{2}$，$y>9$．

所以所求反函数为

$$y=f^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt{1-x}, & x<0\\ \sqrt[3]{x-1}, & 0\leqslant x\leqslant 9\\ \dfrac{x-5}{2}, & x>9\end{cases}.$$

评注 反函数的求解方法比较固定，由 $y=f(x)$ 解出 $x=f^{-1}(y)$，对换自变量与因变量的位置，即得所求的反函数 $y=f^{-1}(x)$．对分段函数要注意所求函数表达式的区间．

4．函数的奇偶性

例 1.5 讨论函数 $f(x)=\varphi(x)\cdot\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$ 的奇偶性，其中 $\varphi(x)$ 为奇函数．

解 因为

$$f(-x)=\frac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}\varphi(-x)=-\frac{a^x(a^{-x}-1)}{a^x(a^{-x}+1)}\varphi(x)=\frac{a^x-1}{a^x+1}\varphi(x)=f(x),$$

所以 $f(x)$ 为偶函数．

例 1.6 设 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，对任意 $x,y\in(-\infty,+\infty)$，都有 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$，且 $f(x)\neq 0$，证明 $f(x)$ 为偶函数．

证明 在等式 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot f(y)$ 中，用 $-y$ 代 y 得

$$f(x-y)+f(x+y)=2f(x)\cdot f(-y),$$

比较两式得

$$2f(x)\cdot f(y)=2f(x)\cdot f(-y).$$

又因为 $f(x)\neq 0$，故 $f(y)=f(-y)$，所以 $f(x)$ 为偶函数．

评注 判定函数奇偶性的方法：

（1）根据奇偶性的定义或利用奇偶函数的运算性质．例如，奇（或偶）函数的代数和仍为奇（或偶）函数；奇（或偶）函数的积为偶函数；奇函数与偶函数的积为奇函数等．

（2）证明 $f(-x)=-f(x)$ 或 $f(-x)=f(x)$．

5．函数的周期性

例 1.7 设函数 $y=f(x)$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 的图形关于 $x=a,x=b\ (a<b)$ 均对称，证明 $y=f(x)$ 为周期函数．

证明 由对称性可知 $f(a+x)=f(a-x)$，$f(b+x)=f(b-x)$，所以

$$\begin{aligned}f(x)&=f[a+(x-a)]=f[a-(x-a)]=f(2a-x)\\&=f[b+(2a-x-b)]=f[b-(2a-x-b)]=f[x+2(b-a)]\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 为周期函数，周期为 $T=2(b-a)$．

评注 判定函数 $f(x)$ 为周期函数的主要方法有：①从定义出发，找到 $T>0$，使得 $f(x+T)=f(x)$；②利用周期函数的运算性质证明．

6. 函数的有界性

例 1.8　指出下列函数是否有界.

（1）$y=\dfrac{1}{x^2}$，$a\leqslant x\leqslant 1$，其中$0<a<1$；

（2）$y=x\cos x$，$x\in\mathbf{R}$.

解　（1）因为$a\leqslant x\leqslant 1\,(0<a<1)$，所以$a^2\leqslant x^2\leqslant 1$，故有$1\leqslant\dfrac{1}{x^2}\leqslant\dfrac{1}{a^2}$，令$M=\dfrac{1}{a^2}$，则对任意$x\in[a,1]$，有$|y|=\dfrac{1}{x^2}\leqslant M$，故$y=\dfrac{1}{x^2}$在$[a,1]$上有界$(0<x\leqslant 1)$.

（2）对$\forall M>0$，取$x=(2[M]+1)\pi$，则$\cos x=-1$，此时

$$|y(x)|=|(2[M]+1)\pi\cos(2[M]+1)\pi|=(2[M]+1)\pi>M,$$

由函数无界的定义知$y=x\cos x$在$\mathbf{R}$上无界.

评注　证明函数有界的常用方法：①利用函数有界性的定义，对函数取绝对值，然后对不等式进行放缩处理；②利用导数求最值的方法；③利用函数连续的性质.

7. 经济函数问题

例 1.9　某化肥厂生产某产品 1000 吨，每吨定价为 130 元，销售量在 700 吨以内时，按原价出售，超过 700 吨时，超过的部分需打 9 折出售，试将销售总收益与总销售量的函数关系用数学表达式表示.

解　设总销售量为x吨，总收益为R元，依题意得

当$0\leqslant x\leqslant 700$时，$R=130x$；

当$700<x\leqslant 100$时，$R=130\times 700+(x-700)\times 130\times 0.9=9100+117x$，所以

$$R=\begin{cases}130x, & 0\leqslant x\leqslant 700\\ 9100+117x, & 700<x\leqslant 1000\end{cases}.$$

例 1.10　某厂生产一种产品，该厂设计的生产能力为日产 100 件，每日的固定成本为 150 元，每件的平均可变成本为 10 元.

（1）试求该厂此产品的日总成本函数及日平均成本函数；

（2）若每件售价为 14 元，求收益函数；

（3）求利润函数及损益分歧点.

解　（1）设日产量为Q件的日成本为C元，由题设，$0\leqslant Q\leqslant 100$，则

$$C=C(Q)=C_1+C_2(Q)=150+10Q.$$

日平均成本函数为

$$\overline{C}(Q)=\frac{C(Q)}{Q}=\frac{150+10Q}{Q}=\frac{150}{Q}+10,\quad 0\leqslant Q\leqslant 100.$$

（2）设收益为R，显然它与销售量有关，假定生产的产品可以全部售出，即日产量与销售量相同，均为Q，则

$$R=R(Q)=14Q,\quad 0\leqslant Q\leqslant 100.$$

（3）设利润为L，则
$$L = L(Q) - C(Q) = 14Q - (150 + 10Q) = -150 + 4Q，\quad 0 \leqslant Q \leqslant 100，$$
解方程$L(Q) = 0$，即$-150 + 4Q = 0$，得$Q = 37.5$件，即损益分歧点为$Q = 37.5$，这意味着每天至少生产38件产品方不亏本.

三、疑难问题解答

（1）何谓代数函数？何谓超越函数？

答　从多项式出发，由代数运算（加、减、乘、除和求方根）构成的函数称为代数函数. 易知任何有理函数$y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$（其中$P(x)$，$Q(x)$都是多项式函数）、无理函数都是代数函数.

非代数函数又称超越函数，超越函数的集合包括三角函数、反三角函数、指数函数、对数函数及无理指数幂函数.

（2）单调函数必有单值反函数，不单调的函数是不是一定没有单值反函数？

答　不是的. 一个函数是否存在单值反函数，取决于它的对应规律f在定义域D与值域U之间是否构成一一对应的关系. 如果是一一对应的，那么必有单值反函数. 函数在区间I上单调只是一种特殊的一一对应关系，因此单调仅是存在单值反函数的充分条件，而不是必要条件.

（3）为什么不说初等函数在其定义域内连续，而说在定义区间内连续？

答　基本初等函数在其定义域内是连续的，初等函数在其定义区间内是连续的，但初等函数在定义域的某些点处不一定连续. 定义区间与定义域有所不同，定义区间是包含于定义域内的区间，定义域不一定是区间，可能包含孤立点. 例如，初等函数$f(x) = \sqrt{\cos x - 1}$的定义域$\{x | x = 2k\pi，k \in \mathbf{Z}\}$中的每个点都是孤立点，由于函数在定义域的孤立点的邻近没有定义，不具备讨论函数连续性的前提条件，也就谈不上函数在该点连续.

四、基础训练与提高训练

基础训练

1．选择题.

（1）设$f(x)$是定义在$(-\infty, +\infty)$内的任意函数，则$f(x) - f(-x)$是（　　）.

A．奇函数　　B．偶函数　　C．非奇非偶函数　　D．非负函数

（2）关于函数$y = -\dfrac{1}{x}$的单调性的正确判断是（　　）.

A．当$x \neq 0$时，$y = -\dfrac{1}{x}$单调增加

B．当$x \neq 0$时，$y = -\dfrac{1}{x}$单调减少

C．当$x<0$时，$y=-\frac{1}{x}$单调减少；当$x>0$时，$y=-\frac{1}{x}$单调增加

D．当$x<0$时，$y=-\frac{1}{x}$单调增加；当$x>0$时，$y=-\frac{1}{x}$单调减少

（3）下列两个函数相同的是（　　）.

A．$f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$

B．$f(x)=|x|$，$g(x)=\mathrm{e}^{\ln x}$

C．$f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$，$g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$

D．$f(x)=x$，$g(x)=(\sqrt{x})^2$

（4）已知$f(x)=\sin x$，$f[\phi(x)]=1-x^2$，则$\phi(x)$的定义域为（　　）.

A．$(-\infty,+\infty)$　　B．$[-1,1]$　　C．$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$　　D．$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

（5）函数$y=x\mathrm{e}^{\cos x}$是（　　）.

A．奇函数　　B．偶函数　　C．单调函数　　D．有界函数

2．填空题.

（1）函数$y=\arcsin\frac{2x-1}{2}$的定义域用区间表示为________.

（2）设$f(x)$的定义域是$[0,1]$，则

①$f(\mathrm{e}^x)$的定义域为________；②$f(\ln x)$的定义域为________.

（3）设$f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=1+\cos x$，则$f\left(\cos\frac{x}{2}\right)=$________.

（4）将圆$x^2+y^2=2x$的直角坐标方程化为极坐标方程为________.

（5）函数$f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x$的最小正周期为________.

3．设$f(x)=\ln\frac{2-x}{2+x}$，求$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$的定义域.

4．求函数$f(x)=\arccos\frac{2x}{1+x}+\sqrt{1-x-2x^2}$的定义域.

5．设$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{x^3+x}{x^4+3x^2+1}\ (x\neq 0)$，求$f(x)$.

6．设$f(\ln x)=x^2-x+2,\ 0<x<+\infty$，求$f(x)$及其定义域.

7．求函数$y=\ln\frac{a-x}{a+x}\ (a>0)$的反函数的形式.

8．下列函数可以看作由哪些简单函数复合而成：

（1）$y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$；（2）$y=\mathrm{e}^{-\sin^3\frac{1}{x}}$；（3）$y=\ln^2\arccos x^3$.

9．某产品供给量Q对价格P的函数关系为$Q=Q(P)=a+b\cdot c^P$. 已知$P=2$时，$Q=30$；$P=3$时，$Q=50$；$P=4$时，$Q=90$．求供给量Q对价格P的函数关系.

10．某化肥厂生产某产品1000t，每吨定价为130元，销售量在700t以内时，按原

价出售，超过 700t 时，超过的部分需打 9 折出售，试将销售总收益 R 与总销售量 x 的函数关系用数学表达式表示.

11．生产队要用篱笆围成一个形状是直角梯形的苗圃（图 1.1），它的相邻两面借用夹角为的 135° 的两面墙（图中 AD 和 DC），另外两面用篱笆围住，篱笆的总长是 30m，将苗圃的面积表示成 AB 的边长 x 的函数.

12．等腰直角三角形的腰长为 l（图 1.2），试将其内接矩形的面积表示成矩形的底边长 x 的函数.

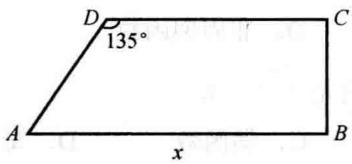

图 1.1

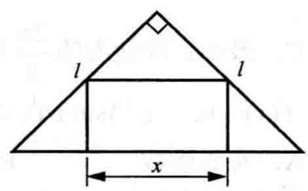

图 1.2

13．某零售报摊上每份报纸的进价为 0.25 元，而零售价为 0.40 元，如果报纸当天未售出不能退给报社，只好亏本．若每天进报纸 t 份，而销售量为 x 份，试将报摊的利润 y 表示为 x 的函数.

提高训练

1．设 $f(x)$ 是以 $T=2$ 为周期的周期函数，且在 $[0,2]$ 上 $f(x)=x^2-2x$，求 $f(x)$ 在 $[-2,4]$ 上的表达式.

2．设

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|=1\\ -1, & |x|>1\end{cases},\ g(x)=\mathrm{e}^x,$$

求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$.

3．设函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & -\infty<x<1\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4\\ 2^x, & 4<x<+\infty\end{cases},$$

求 $f(x)$ 的反函数 $\varphi(x)$.

4．分别就 $a=2$，$a=\dfrac{1}{2}$，$a=-2$ 讨论 $y=\ln(a-\sin x)$ 是不是复合函数．如果是复合函数，求其定义域.

5．设 $z=x+y+f(x-y)$，且当 $y=0$ 时，$z=x^2$，求 $f(x)$ 及 z.

6．设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，对一切实数 x、y 适合 $f(xy)=f(x)f(y)$，且 $f(0)\neq 0$，求证：$f(x)\equiv 1$.

7．设 $f(x)$ 对一切实数 x_1、x_2 成立 $f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$，且 $f(0)\neq 0$，$f(1)=a$，求

$f(0)$ 及 $f(n)$（n 为正整数）.

五、自测题

1．选择题（每题 3 分，共 12 分）.

（1）$f(x)=(\cos 3x)^2$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内是（　　）.

A．最小正周期为 3π 的周期函数　　B．最小正周期为 $\frac{\pi}{3}$ 的周期函数

C．最小正周期为的 $\frac{2\pi}{3}$ 周期函数　　D．非周期函数

（2）$f(x)=(e^x-e^{-x})\sin x$ 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内是（　　）.

A．有界函数　　B．单调增加函数　　C．偶函数　　D．奇函数

（3）设 $f(x)=x|x|$，$x\in(-\infty,+\infty)$，则 $f(x)$（　　）.

A．在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调减少

B．在 $(-\infty,0)$ 内单调减少，在 $(0,+\infty)$ 内单调增加

C．在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加

D．在 $(-\infty,0)$ 内单调减少，在 $(0,+\infty)$ 内单调增加

（4）下列函数中为奇函数的是（　　）.

A．$y=x^2\tan(\sin x)$　　B．$y=x^2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

C．$y=\cos(\arctan x)$　　D．$y=\sqrt{2^x-2^{-x}}$

2．填空题（每题 4 分，共 8 分）.

（1）设 $f(x)$ 的定义域是 $(0,1]$，则 $f(\sqrt{1-x^2})$ 的定义域是________.

（2）设 $f(x)=\sqrt{x+1}+\ln(2-x)$，则 $f(x)$ 的定义域用区间表示为________.

3．解答题（每题 8 分，共 40 分）.

（1）求函数 $f(x)=\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}\ (x\leqslant 1)$ 的反函数 $\varphi(x)$，并求 $\varphi(x)$ 的定义域.

（2）讨论函数 $f(x)=1-\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 内的单调性.

（3）设 $f(x)=\begin{cases}2+x, & x<0\\ 2, & x\geqslant 0\end{cases}$，求 $f[f(x)]$.

（4）设 $f(x)=e^x\sin x$，则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是否有界？

（5）设 $f\left(x-\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2}{x^4+1}\ (x\neq 0)$，求 $f(x)$.

4．分析题（20 分）.

（1）设 $f(x)$ 为奇函数，且满足条件 $f(1)=a$ 和 $f(x+2)-f(x)=f(2)$.

① 试求 $f(2)$ 及 $f(n)$（n 为正整数）；

② 若 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数，试求 a 的值.

（2）设函数 $f(x)$ 满足 $4f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}$，讨论 $f(x)$ 的奇偶性．

5．应用题（20 分）．

（1）由直线 $y=x$，$y=2-x$ 及 x 轴围成等腰三角形 OAB，在底边上任取一点 $x\in[0,2]$，过 x 作垂直于 x 轴的直线，试将图上阴影部分表示成 x 的函数（图 1.3）．

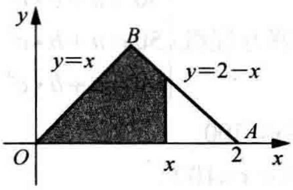

图 1.3

（2）旅客乘火车可免费携带 20kg 的物品，超过 20kg 但不大于 50kg 部分，每千克交费 0.2 元，超过 50kg 部分，每千克交费 0.5 元．求运费与携带物品质量的关系．

6．证明题（5 分）．

设 $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$，证明 $f(y)+f(z)=f\left(\frac{y+z}{1+yz}\right)(|y|<1,\ |z|<1)$．

六、参考答案与提示

基础训练

1．（1）A．（2）A．（3）C．（4）C．（5）A．

2．（1）$-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$．（2）① $(-\infty,0]$；② $[1,\mathrm{e}]$．（3）$1-\cos x$．（4）$\rho=2\cos\theta$．（5）2π．

3．$D(f)=\left(-2,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},2\right)$．提示：求 $f(x)$ 与 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 的定义域的交集．

4．$D(f)=\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$．提示：$1-x-2x^2\geqslant0$ 与 $-1\leqslant\frac{2x}{1+x}\leqslant1\ (x\neq-1)$ 的交集．因 $1-x-2x^2\geqslant0\Rightarrow-1\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$，故 $1+x>0$．$\frac{2x}{1+x}\leqslant1\Rightarrow\frac{x-1}{1+x}\leqslant0\Rightarrow x-1\leqslant0\Rightarrow x\leqslant1$，$-1\leqslant\frac{2x}{1+x}\Rightarrow\frac{3x+1}{1+x}\geqslant0\Rightarrow3x+1\geqslant0\Rightarrow x\geqslant-\frac{1}{3}$．

5．$f(x)=\frac{x}{x^2+1}$．提示：分子、分母同除以 x^2，得

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{x+\frac{1}{x}}{x^2+3+\frac{1}{x^2}}=\frac{x+\frac{1}{x}}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+1}\Rightarrow f(x)=\frac{x}{x^2+1}.$$

6．$f(x)=\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x+2$，$x\in(-\infty,+\infty)$．

7\. $y=\dfrac{a(1-\mathrm{e}^x)}{1+\mathrm{e}^x}$.

8\. (1) $y=\sqrt{u}$，$u=\ln w$, $w=\sqrt{x}$；(2) $y=\mathrm{e}^u$, $u=-w^3$, $w=\sin v$, $v=\dfrac{1}{x}$；
(3) $y=u^2$, $u=\ln v$, $v=\arccos w$, $w=x^3$.

9\. $Q=10+5\times 2^P$. 提示：解方程组$\begin{cases}30=a+b\cdot c^2\\50=a+b\cdot c^3\\90=a+b\cdot c^4\end{cases}$.

10\. $R=\begin{cases}130x, & 0\leqslant x\leqslant 700\\9100+117x, & 700<x\leqslant 1000\end{cases}$.

11\. $S=-\dfrac{3}{2}x^2+60x-450$. 提示：高为$30-x$，上底为$2x-30$.

12\. $S=\dfrac{1}{2}x(\sqrt{2}l-x), 0<x<\sqrt{2}l$.

13\. $y=0.4x-0.25t$.

提高训练

1\. $f(x)=\begin{cases}x^2+2x, & -2\leqslant x<0\\x^2-2x, & 0\leqslant x<2\\x^2-6x+8, & 2\leqslant x<4\end{cases}$.

提示：$x\in[-2,0)$, $f(x+2)=f(x)=(x+2)^2-2(x+2)=x^2+2x$；$x\in[2,4)$, $f(x-2)=f(x)=(x-2)^2-2(x-2)=x^2-6x+8$.

2\. $f[g(x)]=\begin{cases}1, & x<0\\0, & x=0\\-1, & x>0\end{cases}$，$g[f(x)]=\begin{cases}\mathrm{e}, & |x|<1\\1, & |x|=1\\\mathrm{e}^{-1}, & |x|>1\end{cases}$.

提示：$f[g(x)]=\begin{cases}1, & g(x)<1\\0, & g(x)=1\\-1, & g(x)>1\end{cases}=\begin{cases}1, & \mathrm{e}^x<1\\0, & \mathrm{e}^x=1\\-1, & \mathrm{e}^x>1\end{cases}=\begin{cases}1, & x<0\\0, & x=0\\-1, & x>0\end{cases}$；

同理求$g[f(x)]$.

3\. $\varphi(x)=\begin{cases}x, & x<1\\\sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 16\\\log_2 x, & x>16\end{cases}$.

4\. $a=2$时是复合函数，$y=\ln(2-\sin x)$，$D=(-\infty,+\infty)$；
$a=\dfrac{1}{2}$时是复合函数，$y=\ln\left(\dfrac{1}{2}-\sin x\right)$，