大学数学应用型本科
“十二五”规划教材

微积分

Weijifen

主　编　邵文凯　阮杰昌
副主编　王晓平　刘少雄

重庆大学出版社
http://www.cqup.com.cn

大学数学应用型本科“十二五”规划教材

微积分

主　　编　邵文凯　阮杰昌
副 主 编　王晓平　刘少雄
编写人员　尹东梅　尹用平　龚　书

重庆大学出版社

内容提要

本书是编者们在多年教学经验的基础上，参照应用型专业人才培养定位，结合当前大学数学课程教学实际编写而成的。全书共7章，主要内容包括函数的极限与连续、导数与微分、导数的应用、一元函数微积分学及其应用、多元函数微积分学、微分方程及无穷级数等基础知识。本书结合应用型本科大学学生的实际情况，注重大学数学与中学数学的衔接，文字表述力求通俗易懂，章节安排紧凑，尽量突出应用。此外，本书在例题和课后习题的选取方面兼顾了内容的丰富性和层次性。

本书适合应用型高校相关专业学生使用，也可作为高校教学人员和学习大学数学课程的社会人员的参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

微积分/邵文凯，阮杰昌主编．—重庆：重庆大学出版社，2015.8

ISBN 978-7-5624-9206-1

Ⅰ.①微… Ⅱ.①邵… ②阮 Ⅲ.①微积分—高等学校—教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第132822号

大学数学应用型本科"十二五"规划教材

微积分

主　编　邵文凯　阮杰昌

副主编　王晓平　刘少雄

责任编辑：李定群　版式设计：李定群

责任校对：关德强　责任印制：赵　晟

*

重庆大学出版社出版发行

出版人：邓晓益

社址：重庆市沙坪坝区大学城西路21号

邮编：401331

电话：(023) 88617190　88617185(中小学)

传真：(023) 88617186　88617166

网址：http://www.cqup.com.cn

邮箱：fxk@cqup.com.cn (营销中心)

全国新华书店经销

重庆市国丰印务有限公司印刷

*

开本：720×960　1/16　印张：15.5　字数：262千

2015年8月第1版　2015年8月第1次印刷

印数：1—2 600

ISBN 978-7-5624-9206-1　定价：33.80元

前言

“微积分”是普通高等学校相关专业的一门重要基础课程,教学内容多,进度快,与专业知识结合紧密,在教学时不仅需要引导学生当前的学习,而且对学生的可持续发展还应当有所启迪.本教材参照教育部教指委制订的高等数学课程的教学基本要求,结合编者多年来的教学实践编写而成.

本书编构科学合理,体现“以学生为主体,以实际背景引入”的数学概念;例题习题的选择灵活多变,层次分明,利于满足不同专业、不同层次的需要.

本书重视知识的传授,更注重能力的培养,使学生在获得知识的同时,也能比较系统地提高能力,体现知识教学与能力训练的统一;重视培养学生运用数学的意识,通过典型例题,将多种计算方法列出,择优而取,既有利于学生牢固掌握知识,又能学到探求知识的思想、方法和手段.

本书适度淡化数学理论,强化数学概念的直观性,对一些定理的证明以几何解释或经济说明为主,给以直观的讲解,以利于学生拓宽知识面、提高将数学知识应用于解决实际问题的能力.

本书共7章,主要内容包括函数的极限与连续、导数与微分、导数的应用、一元函数微积分学及其应用、多元函数微积分及其应用、微分方程及无穷级数等.各专业可根据专业培养目标和要求,选学相应的教学内容.

鉴于编者水平有限,书中难免出现一些疏漏,敬请读者与同行批评指正.

编　者

2015年5月

目　录

第一章　极限与连续

高等数学主要研究变化的变量及其相互之间的关系. 函数是高等数学研究的主要对象,极限是高等数学中研究问题的基本方法,而函数的连续则是研究的条件. 本章将在进一步熟悉函数概念与性质的基础上,介绍函数的极限与连续性等基本概念、性质及运算法则.

第一节　初等函数

一、初等数学知识要点回顾

1. 集合

具有某种特定性质的事物的总体,称为集合,通常以大写字母表示. 组成这个集合的事物,称为该集合的元素,常以小写字母表示. 某个元素 a 在某个集合 A 中,称为元素 a 属于集合 A,否则称为元素 a 不属于集合 A,分别表示为

$$a \in A \text{ 和 } a \notin A$$

特殊集合的表示为:空集(不包含任何元素的集合):$\varnothing$;自然数集:$\mathbf{N}$;整数集:$\mathbf{Z}$;有理数集:$\mathbf{Q}$;实数集:$\mathbf{R}$;复数集:$\mathbf{C}$.

2. 区间

区间是指介于某两个实数之间的全体实数. 这两个实数称为区间的端点.

3. 邻域

设 a 与 δ 是两个实数,且 $\delta > 0$,数集 $\{x \mid |x - a| < \delta\}$ 称为点 a 的 δ 邻域,

记为 $U_\delta(a)$，即

$$U_\delta(a) = \{x \mid |x-a| < \delta\}$$

点 a 称为这邻域的中心，δ 称为这邻域的半径.

注 (1) 邻域的几何意义：邻域是数轴上一个以 a 为中心、长度为 2δ 的开区间，即.

$$U_\delta(a) = (a-\delta, a+\delta)$$

(2) 点 a 的去心的 δ 邻域记为 $U_\delta^0(a)$，即

$$U_\delta^0(a) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$$

4. 常量与变量

在某过程中数值保持不变的量，称为常量，而数值变化的量，称为变量. 常量与变量是相对“过程”而言的. 通常用字母 a,b,c 等表示常量，用字母 x,y,t 等表示变量.

5. 绝对值

(1) 定义为

$$|a| = \begin{cases} a & a \geqslant 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

(2) 几何意义

$|a|$表示数轴上点 a 到原点的距离.

(3) 性质为

$|ab| = |a||b|$；$|a| - |b| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a| + |b|$；

$|x| \leqslant a(a>0) \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$；$|x| \geqslant a(a>0) \Leftrightarrow x \geqslant a$ 或 $x \leqslant -a$.

二、函数的概念

符号说明：“$\forall$”全称量词，表示“任意的”；“$\exists$”存在量词，表示“存在”或“有某个”的意思.

定义 1.1 设 D 是一非空数集，若对 $\forall x \in D$，按照某个规则 f，$\exists y$（唯一、确定）与之对应，则称此规则 f 为定义在 D 上的一个函数关系，或称 y 是 x 的函数，记为 $y = f(x), x \in D$. x 称为自变量，y 称为因变量或函数，D 称为定义域，记为 $D = D(f)$. 当 $x_0 \in D$ 时，称 $f(x_0)$ 为函数在点 x_0 处的函数值.

函数的定义域通常通过以下方式确定：

(1) 根据实际问题的限制.

(2) 使解析式有意义的 x 的全体.

1. 函数的表现形式

(1) 解析形式:用一解析式表示自变量 x 与因变量 y 之间关系.

① 分段函数:用公式法表示函数时,有时需在不同的范围内用不同的式子表示同一函数,此函数称为分段函数.

例如,绝对值函数

$$y = |x| = \begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

② 隐函数:若函数 y 可用自变量 x 的数学式 $y = f(x)$ 直接表达,则此函数称为显函数. 例如,$y = \sin(x^2) - e^x$. 若函数 y 与自变量 x 的关系是用一个方程 $F(x,y) = 0$ 表示,则此函数称为隐函数. 例如,$x^2 + y^2 = 25, x \in [-5,5]$.

(2) 表格法:函数与自变量的关系可用一表格表示. 例如,三角函数表、对数表等.

(3) 图像法:函数与自变量的关系由平面直角坐标系中的曲线给出.

2. 几个特殊的函数举例

(1) 符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$,显然有

$$x = \operatorname{sgn} x\,|x|$$

(2) 取整函数 $y = [x]$,表示不超过 x 的最大整数. 此时,有不等式 $x - 1 < [x] \leqslant x < [x] + 1$ 成立.

(3) 狄利克雷函数(Dirichlet) 函数

$$y = D(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ 是有理数} \\ 0 & x \text{ 是无理数} \end{cases}$$

例 1.1　求函数 $y = \dfrac{1}{\ln(1-2x)}$ 的定义域.

解　要使函数 $y = \dfrac{1}{\ln(1-2x)}$ 有意义,必须满足 $\ln(1-2x) \neq 0$ 且 $1 - 2x > 0$,即

$$x \neq 0 \text{ 且 } x < \frac{1}{2}$$

故函数 $y = \dfrac{1}{\ln(1-2x)}$ 的定义域为

$$D = (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

三、函数的简单几何性质

1. 函数的奇偶性

若函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，且对于 $\forall x \in D$ 都有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数；$f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，且对于 $\forall x \in D$ 都有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数.

注 奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称.

例如，$f(x) = x$ 为奇函数，$f(x) = |x|$ 为偶函数.

2. 函数的单调性

若函数 $f(x)$ 在区间 D 内有定义，对 $x_1, x_2 \in D$：当 $x_1 < x_2$ 时，总有 $f(x_1) < f(x_2)$ 或 $(f(x_1) > f(x_2))$，则称函数 $f(x)$ 在区间 D 内是单调递增（递减）函数，D 称为 $f(x)$ 的单调递增（递减）区间.

3. 函数的周期性

设 $y = f(x)$ 为 D 上的函数，若 $\exists T > 0$，对 $\forall x \in D$，$f(x+T) = f(x)$ 恒成立，则称此函数为 D 上的周期函数，T 称为 $f(x)$ 的一个周期.

如在 $(-\infty, +\infty)$ 上，$f(x) = \cos x$ 是周期函数，其最小正周期为 2π.

4. 函数的有界性

设函数 $y = f(x)$ 在某区间 D 内有定义，若 $\exists M > 0$，对 $\forall x \in D$，恒有 $|f(x)| \leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 内是有界的. 若不存在这样的正数 M，则称 $f(x)$ 在 D 内无界.

函数的有界性与区间是有关系的，在某给定区间上有界的函数，其图像介于直线 $y = -M$ 与 $y = M$ 之间.

例如，$f(x) = \sin x$ 在定义域 $D = (-\infty, +\infty)$ 内有界.

例 1.2 判断函数 $f(x) = \lg \dfrac{1-x}{1+x}$ 的奇偶性.

解 由 $\dfrac{1-x}{1+x} > 0$ 得

$$-1 < x < 1$$

故函数定义域关于原点对称.

又

$$f(-x)=\lg\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\lg\frac{1+x}{1-x}=\lg\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1}=-f(x)$$

故 $f(x)$ 为奇函数.

四、基本初等函数

1. 常数函数

$y=c$(c 为任意实数)

定义域:$(-\infty,+\infty)$.

图像:过点$(0,c)$,且与 x 轴平行或重合的直线.

性质:有界、是偶函数、没有最小正周期的周期函数.

2. 幂函数

$y=x^{\mu}$(μ 为任意实数)

定义域:随 μ 取值而异(见图 1.1).

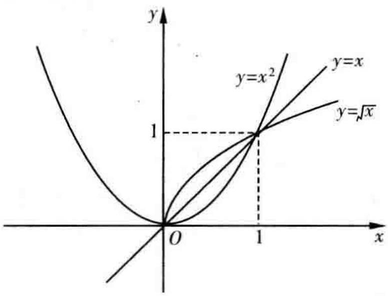

图 1.1

性质:当 μ 是奇数时,$y=x^{\mu}$ 是奇函数.

当 μ 是偶数时,$y=x^{\mu}$ 是偶函数.

3. 指数函数

$y=a^{x}(a>0,a\neq 1)$

定义域:$(-\infty,+\infty)$.

图像:过点(0,1),恒在 x 轴的上方(见图 1.2).

性质:当 $0<a<1$ 时,$y=a^{x}$ 单调递减;当 $a>1$ 时,$y=a^{x}$ 单调递增.

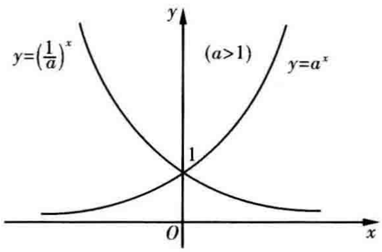

图 1.2

4. **对数函数**

$$y = \log_a x(a > 0, a \neq 1)$$

定义域:$(0, +\infty)$.

图像:过点$(1,0)$,恒在y轴的右方(见图 1.3).

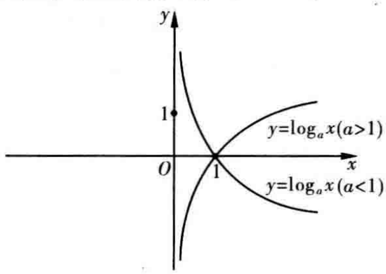

图 1.3

性质:当$0 < a < 1$时,$y = \log_a x$单调递减;当$a > 1$时,$y = \log_a x$单调递增.

注意:指数函数与对数函数互为反函数,因此有相同的单调性.

5. **三角函数**

$$y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$$

(1) **正弦函数**

$$y = \sin x$$

定义域:$(-\infty, \infty)$.

值域:$[-1,1]$.

最小正周期为2π(见图 1.4).

性质:有界、奇函数、最小正周期为2π.

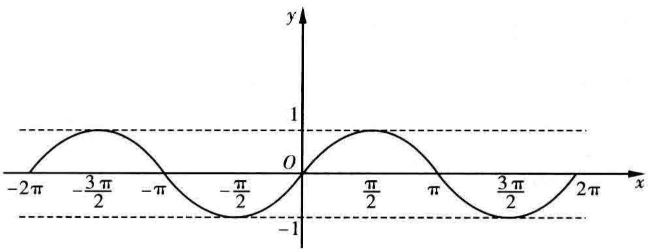

图 1.4

(2) 余弦函数

$$y = \cos x$$

定义域:$(-\infty, +\infty)$.

值域:$[-1,1]$.

图像:如图 1.5 所示.

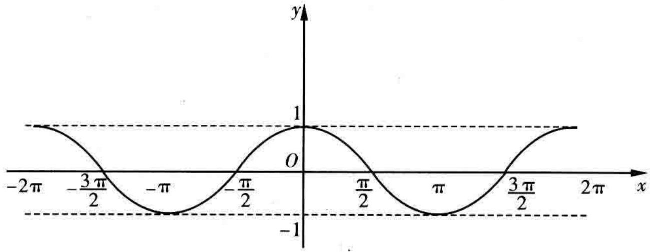

图 1.5

性质:有界、偶函数、最小正周期为 2π.

(3) 正切函数

$$y = \tan x$$

定义域:$\left\{x \middle| x \in \mathbf{R}, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

图像:如图 1.6 所示.

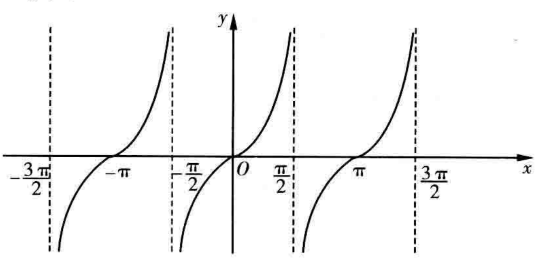

图 1.6

性质:奇函数、单调递增、最小正周期为 π.

6. **反三角函数**

$$y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$$

以上 6 类函数统称为基本初等函数.

五、初等函数

1. 复合函数

定义 1.2 设 y 是 u 的函数:$y = f(u)$,而 u 是 x 的函数:$u = \varphi(x)$,若 $\varphi(x)$ 的函数值全部或部分在 $f(u)$ 的定义域内,故称函数 $y = f[\varphi(x)]$ 为由函数 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 复合而成的函数,简称复合函数. 其中,u 称为中间变量,$f(u)$ 称为外层函数,$\varphi(x)$ 称为内层函数.

例 1.3 已知 $y = e^u, u = \sin x$,试把 y 表示为 x 的复合函数.

解
$$y = e^u = e^{\sin x}$$

例 1.4 设 $f(x) = \begin{cases} e^x & x < 1 \\ x & x \geqslant 1 \end{cases}$, $\varphi(x) = \begin{cases} x+2 & x < 0 \\ x^2 - 1 & x \geqslant 0 \end{cases}$, 求 $f[\varphi(x)]$.

解
$$f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{\varphi(x)} & \varphi(x) < 1 \\ \varphi(x) & \varphi(x) \geqslant 1 \end{cases}$$

令 $\varphi(x) < 1$:

当 $x < 0$ 时,$\varphi(x) = x + 2 < 1$,得 $x < -1$.

或 $x \geqslant 0$ 时,$\varphi(x) = x^2 - 1 < 1$,得 $0 \leqslant x < \sqrt{2}$.

再令 $\varphi(x) \geqslant 1$.

当 $x < 0$ 时,$\varphi(x) = x + 2 \geqslant 1$,得 $-1 \leqslant x < 0$.

或 $x \geqslant 0$ 时,$\varphi(x) = x^2 - 1 \geqslant 1$,得 $x \geqslant \sqrt{2}$.

综上可得

$$f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{x+2} & x < -1 \\ x + 2 & -1 \leqslant x < 0 \\ e^{x^2-1} & 0 \leqslant x < \sqrt{2} \\ x^2 - 1 & x \geqslant \sqrt{2} \end{cases}$$

例 1.5 指出函数的复合过程,并求其定义域.

(1) $y = \left(\arcsin \dfrac{1}{x}\right)^2$　　　　(2) $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

解　(1)$y=\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)^2$ 是由 $y=u^2,u=\arcsin v,v=\frac{1}{x}$ 这 3 个函数复合成的. 要使 $y=\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)^2$ 有意义,只需 $\arcsin\frac{1}{x}$ 有意义,应 $\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$,即 $|x|\geqslant 1$,因此 $y=\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)^2$ 的定义域为 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

(2)$y=\sqrt{x^2-3x+2}$ 是由 $y=\sqrt{u},u=x^2-3x+2$ 两个函数复合成的,要使 $y=\sqrt{x^2-3x+2}$ 有意义,只需 $x^2-3x+2\geqslant 0$,解此不等式得 $y=\sqrt{x^2-3x+2}$ 的定义域为 $(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$.

注意:

(1) 并不是任何两个函数 $y=f(u),u=\varphi(x)$ 都可构成一个复合函数,关键在于外层函数 $y=f(u)$ 的定义域与内层函数 $u=\varphi(x)$ 的值域的交集是否为空集. 若其交集不为空,则这两个函数就可复合,否则就不能复合. 例如,$y=\sqrt{u}$ 及 $u=-2-x^2$ 就不能复合成一个复合函数. 因为 $u=-2-x^2$ 的值域为 $(-\infty,-2]$,不包含在 $y=\sqrt{u}$ 的定义域 $[0,+\infty)$ 内,因而不能复合.

(2) 分析一个复合函数的复合过程,每个层次都应是基本初等函数或常数与基本初等函数的四则运算式(即简单函数).

(3) 复合函数通常不一定是由纯粹的基本初等函数复合而成,更多的是由基本初等函数经过四则运算构成的简单函数复合而成,因此,当分解到常数与基本初等函数的四则运算式(简单函数)时,就不再分解了.

2. 初等函数

定义 1.3　由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的复合所构成的,并可用一个式子表示的函数,称为初等函数.

例如,$y=\sin^2x,y=\sqrt{1-x^2},y=\lg(1+\sqrt{1+x^2})$ 都是初等函数. 而 $y=\begin{cases}x^2 & x\geqslant 0\\ 2x-1 & x<0\end{cases}$ 不是初等函数.

六、常用经济函数

1. 需求函数

在经济学中,某一商品的需求量是指在一定的价格水平下,消费者愿意而且有支付能力购买的商品量. 影响商品需求的因素很多,商品的价格是影响需

求的一个主要因素，还有其他因素，如消费者收入的增减、季节的变换以及消费者的偏好等都会影响需求. 如果把价格以外的其他因素都看作常量，则需求量 Q 可视为该商品的价格 p 的函数，这个函数称为需求函数. 常用 $Q = Q(p)$ 表示.

2. 供给函数

供给是与需求相对的概念，需求是就购买者而言，供给是就生产者而言. 某一商品的供给量是指在一定的价格水平下，生产者愿意生产并可供出售的商品量. 供给量也是由多个因素决定的. 同样，如果把价格以外的其他因素都看作常量，则供给量 S 就是价格 p 的函数，这个函数称为供给函数，记为

$$S = S(q)$$

3. 成本函数

一般成本包括固定成本和可变成本. 固定成本与产量和销售量无关，它包括设备的固定费用和其他管理费用. 如果产量（或销售量）为 q，固定成本为 C_0（即产量 $q = 0$ 时的成本），C_1 为单位可变成本，总成本函数模型的一般形式为

$$C(q) = C_1 q + C_0$$

4. 收入函数

商品的收入 R 依赖于商品的价格 p 和销量 q，其函数模型为

$$R = pq$$

当商品的市场价格是一个常数 p_0 时，收益只随销售量的增减而增减. 此时，函数模型为

$$R = p_0 q$$

5. 利润函数

如果利润函数为 $L(q)$，收入函数为 $R(q)$，总成本函数为 $C(q)$，则利润函数模型为

$$L(q) = R(q) - C(q)$$

七、函数模型的建立

下面举例建立函数模型来解决某些实际问题.

例 1.6　某商品共有 1 000 t 可供销售，每吨定价 80 元，若销售量在 800 t 以内，按原定价格出售；若销售量超过 800 t，则超过部分打 9 折优惠出售，试求收入函数 $R(q)$.

解　由于在不同的销售量范围价格不同,因此必须将需求量(销售量)q 分段来考虑.

可表示为

$$R(q)=\begin{cases}80q & 0\leqslant q\leqslant 800\\ 80\times 800+80\times 90\%(q-800) & 800<q\leqslant 1\,000\end{cases}$$

例 1.7　某工厂在甲乙两地的两个分厂各生产某种机床 12 台和 6 台. 现销售给 A 地 10 台,B 地 8 台. 已知从甲地调运 1 台至 A 地、B 地的运费分别为 400 元和 800 元,从乙地调运 1 台至 A 地、B 地的运费分别为 300 元和 500 元.

(1) 设从乙地调运 x 台至 A 地,求总运费 y 关于 x 的函数关系式.

(2) 若总运费不超过 9 000 元,问共有几种调运方案?

分析　甲乙两地调运至 A,B 两地的机床台数及运费见表 1.1.

表 1.1

调出地	甲　地		乙　地	
调至地	A 地	B 地	A 地	B 地
台数	$10-x$	$12-(10-x)$	x	$6-x$
每台运费/元	400	800	300	500
运费合计/元	$400(10-x)$	$800[12-(10-x)]$	$300x$	$500(6-x)$

解　(1) 依题意得

$$y=400(10-x)+800[12-(10-x)]+300x+500(6-x)\qquad 0\leqslant x\leqslant 6, x\in \mathbf{Z}$$

即

$$y=200(x+43)\qquad 0\leqslant x\leqslant 6, x\in \mathbf{Z}$$

(2) 由 $y\leqslant 900$,解得

$$x\leqslant 2$$

由于 $0\leqslant x\leqslant 6, x\in \mathbf{Z}$　所以 $x=0,1,2$.

因此,共有 3 种调运方案.

实际问题的函数关系就是该实际问题的一个数学模型. 建立实际问题的函数关系,就是为了用函数方法揭示实际问题的规律,并用数字、图表、公式等表示出来,从而得到数学模型. 数学模型只是对现实事物的某种属性的一种模拟,需不断验证修改,才能使其与实际情况拟合得更好. 根据数学模型,就可对所论问题进行分析讨论.